

ラプラス変換と
シグナルフロー・グラフ

中川馨 著
松田稔 共著

東京
パワー社



は し が き

ラプラス変換 (Laplace Transformation) は近年、自動制御工学などを始めとして、線形微分方程式を取扱う広範囲の工学の分野できわめて有効な手段としてクローズアップされ、利用されつつあるものである。

電気工学はもちろんのこと、運動、特に振動を取扱う機械工学とか、土木、建築などの分野においても、今やラプラス変換をマスターしていなければ、十分に理解したり、利用したりすることが困難な部分がきわめて多くなってきているようである。

もちろん、ラプラス変換について数学的に厳密な理解をすることはそう簡単なことではないし、一般の工学技術者や学生がそのことのために過度のエネルギーを消費し、かりに理解し得たとしても實際上これを有効に利用できるとは限らないと思われるのである。

本書では、あくまでも工学技術者として数学的に求められた多くの結果を、それぞれの専攻分野において利用するという立場から、理論については必要最小限の説明にとどめ、むしろいかに利用し、計算を行い、その結果を見出すかについて、具体的な例をあげて説明し、実用的な応用能力を身につけることを主眼としているのである。

工学技術者にとって必要なことは、数学的に程度の高いことを多く“知っている”ということではなくて、たとえそれが、数学的には初歩的な段階のことであったとしても、それを十分に“使いこなせる”ということであると考える。

本書を学ぶについて必要な数学の能力は、高校の数学を一応マスターしていれば十分であって、本書の例題や練習問題を一つ一つ自から計算してゆくうちに、自然にラプラス変換を利用する能力が身につくように配慮したつもりである。

著者が電気工学を専攻する関係で、説明の大部分が電気工学に関係のある例

は し が き

題などを取扱ってはいるが、電気工学以外の分野においても時間を変数とする微分方程式という、共通な媒介をもつ工学のすべての分野の人々は、その微分方程式を解く手段としての、ラプラス変換の計算能力を身につけることの困難さにおいて変りがないと思う。

少なくとも工学技術者が線形微分方程式を苦しめないで、処理することができるようになることを期待するものである。

著 者

目 次

§ 1. ラプラス変換とは

| | | |
|-----|---------------------|---|
| 1-1 | ラプラス変換の意義 | 1 |
| 1-2 | ラプラス変換に関する基本的な定義と術語 | 2 |
| 1-3 | 線形微分方程式を解く順序 | 3 |

§ 2. 基本公式の導き方

| | | |
|-------|---|----|
| 2-1 | 基本的な関数の場合 | 5 |
| 2-1-1 | $f(t)=1$ の \mathcal{L} 変換 | 5 |
| 2-1-2 | $f(t)=t$ の \mathcal{L} 変換 | 6 |
| 2-1-3 | $f(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$ の \mathcal{L} 変換 | 6 |
| 2-1-4 | $f(t)=\omega_1 \sin \omega_1 t$ の \mathcal{L} 変換 | 7 |
| 2-2 | 導関数のラプラス変換 | 8 |
| 2-3 | 積分関数のラプラス変換 | 10 |

§ 3. ラプラス逆変換の基本的な方法

| | | |
|-------|------------|----|
| 3-1 | 基本公式による逆変換 | 14 |
| 3-2 | 部分分数分解法 | 17 |
| 3-3 | 高次式の分解方法 | 20 |
| 3-3-1 | 三次方程式の解法 | 20 |
| 3-3-2 | 三次方程式の近似解法 | 23 |
| 3-3-3 | 四次方程式の近似解法 | 25 |

§ 4. 線形微分方程式の解き方

| | | |
|-----|-------------|----|
| 4-1 | 線形微分方程式 | 29 |
| 4-2 | ラプラス変換による解法 | 30 |

| | | |
|-----------------|---------------------|----|
| 4-2-1 | 線形微分方程式のラプラス変換 | 30 |
| 4-2-2 | $X=F(s)$ の整理と逆変換の準備 | 32 |
| 4-2-3 | 公式の適用について | 33 |
| 4-3 | 公式による逆変換 | 35 |
| 4-4 | 公式のない場合の逆変換 | 38 |
| | | |
| § 5. 電気工学における利用 | | |
| 5-1 | 電気回路の過渡現象 | 43 |
| 5-1-1 | 回路方程式 | 44 |
| 5-1-2 | やや複雑な回路の過渡現象 | 48 |
| 5-1-3 | 初期値を含む回路の場合 | 51 |
| 5-1-4 | 特殊な入力を加える場合 | 53 |
| 5-2 | 伝達関数 | 56 |
| 5-2-1 | 回路要素の変換 | 57 |
| 5-2-2 | 電気回路の伝達関数 | 58 |
| 5-3 | 増幅器を含む回路の伝達関数 | 62 |
| 5-4 | 正弦波入力の過渡現象 | 66 |
| 5-5 | その他の伝達関数の例 | 70 |
| 5-5-1 | 増幅器 | 70 |
| 5-5-2 | 可動線輪形計器 | 71 |
| 5-5-3 | 他励発電機 | 72 |
| | | |
| § 6. 力学系での応用 | | |
| 6-1 | 基本要素の伝達関数 | 73 |
| 6-1-1 | シリンダ機構 | 73 |
| 6-1-2 | ダッシュポット | 74 |
| 6-1-3 | ばね | 74 |
| 6-2 | 簡単な組合わせの伝達関数 | 75 |

| | | |
|-------|------------------|----|
| 6-2-1 | ダッシュポットとばね | 75 |
| 6-2-2 | ばねと質量と外力 | 76 |
| 6-2-3 | ばねと質量とダッシュポット | 76 |
| 6-3 | 振動問題の例 | 77 |
| 6-3-1 | ばねと質量の場合 | 77 |
| 6-3-2 | ばねと質量とダッシュポットの場合 | 78 |

§ 7. 微分方程式の解のカーブ

| | | |
|-----|----------------|----|
| 7-1 | 解のカーブの形 | 79 |
| 7-2 | やや複雑な関数のカーブの計算 | 79 |

§ 8. ラプラス変換のやや高度な問題

| | | |
|-------|--------------------|-----|
| 8-1 | 関数の移動 | 87 |
| 8-1-1 | 時間遅れ関数 | 87 |
| 8-1-2 | 像関数の移動 | 88 |
| 8-1-3 | 移動関数の逆変換 | 90 |
| 8-2 | 相似定理 | 91 |
| 8-3 | 初期値および最終値の定理 | 93 |
| 8-4 | その他の重要点の一部 | 96 |
| 8-4-1 | 周期関数の取扱い | 96 |
| 8-4-2 | $t^n f(t)$ のラプラス変換 | 99 |
| 8-4-3 | 一般公式の拡充 | 101 |

§ 9. シグナルフローグラフ

| | | |
|-----|--------------------|-----|
| 9-1 | シグナルフローグラフ概説 | 106 |
| 9-2 | ノードとブランチ | 107 |
| 9-3 | 微分方程式のシグナルフローグラフ表現 | 109 |

| | | |
|-------|----------------------------|------|
| 9-4 | パス, ループおよびパス利得, ループ利得..... | 111 |
| 9-5 | MASON の法則 (メイソンの法則)..... | 113 |
| 9-6 | グラフの等価変換..... | 116 |
| | 問題の解答..... | 120 |
| 付録 I | 関係のある数学公式..... | 130 |
| 付録 II | ラプラス変換公式..... | 1~30 |

§ 1. ラプラス変換とは

ラプラス変換には、Pierre Simon Laplace (1749~1827) の名前がつけられている。彼はフランスの有名な数学者、天文学者であり、宇宙の起源に関する“ラプラスの星雲説”とか、天王星を惑星であると指摘したなどの業績は著名である。

しかし、この変換を使って微分方程式を解く方法を最初に見出したのは、ドイツの数学者、L. Euler (1707~1783) であり、しかも初めて使用されたのは、ラプラスの生れる前の1737年のことであったといわれる。しかし、オイラーの示した方法は、ほとんど、顧みられないままに放置され、1782年になって、ラプラスが再び線形微分方程式を解く手段として用いたのである。

1-1 ラプラス変換の意義

ラプラス変換について、具体的な説明に入る前に、まず、ラプラス変換とは一体どのようなもので、どのようにして、どんな目的のために利用されるものか、ということを知っておくことも有意義なことであろう。

ラプラス変換ということは、正しくは、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \dots\dots\dots (1-1)$$

という積分を行うことである。つまり、時間の関数 $f(t)$ に e^{-st} を掛けて、0 から ∞ まで積分することである。しかし、一般には、ラプラス変換といえば、その変換と逆変換とを利用して線形微分方程式を解くための一つの演算子法であると考えられているように思われる。

線形微分方程式を解くための演算子法は、すでにいくつかの方法があり、中でもヘビサイド (Oliver Heaviside: 1850~1925) によって創案され、多くの数学者の努力によって発展させられたヘビサイド演算子“ p ”は、過去においてかなり広範囲に利用され、現在でも一部には利用されている。この方法は、経験的な仮定によって考案された方法で、当初は数学的な根拠が否定されたのであるが、カーソン (J.R. Carson) とか、ブロミッチ (T. Bromwick), ワグナー (K.W. Wagner) などという数学者たちの手で、 p の数学的意義が明らかにされて、演算子法として確立され、現在でもその適用分野の開拓が行われつつある。

一方これと並行して、ヘビサイド法におけるカーソン積分と、ラプラス変換積分との対比において、その実用的な利用度の点などからラプラス変換を利用した方がより実用性が

高いと認められ、近年はラプラス変換がもっぱら用いられる方向にあるようである。

(1-1) 式は、時間 t の関数 $f(t)$ を、特別な形の積分によって演算子 s の関数 $F(s)$ に変換するものである。この式を利用して、線形微分方程式を解くには、その方程式の各項を、この (1-1) 式によって変換することにより、微分方程式を s の代数方程式に変換することから始まる。次にこの代数方程式を関数について整理し、この関数を s の関数から t の関数に戻す(逆変換)と、直ちに微分方程式の解が得られることになる。

微分方程式には、一般解と特別解があることはご承知のとおりであるが、ラプラス変換法では、始めに変換を行うときに初期条件を含めて変換するので、結果として得られる解は、その初期条件に適合した特別解である。このことは、物理的、工学的な問題を実際に解くときにはきわめて有利なことである。ヘビサイド法では、まず一般解を求めた後に条件を入れて積分定数を計算しなければならない。

電気工学とか、その他力学系工学の分野では、線形微分方程式を取扱うことが必要な場合がかなり多い。しかし、従来これらを気軽に解くことができず、場合によっては敬遠されたりしたために、工学問題の理解や進歩に問題があったことは否定できないであろう。したがって、もしもこれらの線形微分方程式(非線形の場合は線形に近似すれば)が気軽に取扱えるとなれば、いかに大きなメリットがあるかは想像にかたくないことであろう。この意味で、このラプラス変換のもつ意義はきわめて大きいものである。

1-2 ラプラス変換に関する基本的な定義と術語

前項で、ラプラス変換とは (1-1) 式の積分を行うことであると述べた。ここではこの積分に関係することがらを整理し、さらに詳しく明確に定義していくことにしよう。

まず (1-1) 式について、さらに正しく表現すると次のようになる。

$t > 0$ において定義される一価関数 $f(t)$ に ε^{-st} を乗じたものを、0 から ∞ まで t について積分したものをラプラス積分と呼ぶ。

この積分の結果として得られる関数は t を含まず、 s のみの関数 $F(s)$ となる。この $F(s)$ を、 $f(t)$ のラプラス変換と呼び、この積分を行うことをラプラス変換するという。また ε^{-st} のことを核、 $f(t)$ を原関数、 $F(s)$ を像関数などとも呼んでいる。このラプラス変換については \mathcal{L} の大文字 \mathcal{L} が用いられ、次のように表現する。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt \dots\dots\dots (1-2)$$

以上のような変換は、一般に積分変換と呼ばれる方法であり、この場合は ε^{-st} を核とする積分変換である。(1-1) 式を特に第一種ラプラス変換と呼ぶこともある。このときには当然少なくとも第二種が存在するわけであるが、この場合、第二種ラプラス変換と呼ぶのは、前項でふれたヘビサイド演算法におけるカーソン積分のことであって、

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \dots\dots\dots (1-3)$$

この式は、(1-1) 式の右辺に s を掛け、 s を p に書き替えたものである。

$f(t)$ と $F(s)$ が、(1-2) 式の関係にあるときには、この関係を次のようにも表現することができる。

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \dots\dots\dots (1-4)$$

この場合、 $f(t)$ を $F(s)$ のラプラス逆変換と呼び、この計算を行うことを逆変換するという。この逆変換を行うためには、ブロミッチ積分と呼ばれる積分計算が必要であり、その結果として (1-2) 式が成立すれば、(1-4) 式も成立するという、ラプラス変換と逆変換の可逆的な関係が証明されるわけであるが、これには理論的に高度の知識を必要とするので、ここでは説明は省略させてもらうことにしたい。

しかしこのことは、 $f(t)$ のある特定のものについて、(1-2) 式の結果としての $F(s)$ が得られたとすれば、(1-4) 式の計算を行うことなしに、 $F(s)$ から $f(t)$ に逆変換ができるということであって、きわめて重要な意味をもつことである。つまり $F(s)$ の式について、既知関数の $F(s)$ と同じ形のものを見つけだすことができれば、その変換の公式を逆にたどって $f(t)$ を見つけることが可能であるということである。

1-3 線形微分方程式を解く順序

線形微分方程式を解く手段として、ラプラス変換がきわめて有力なものであることはすでに述べたとおりである。ここでは、またラプラス変換の実際については何も説明していないので具体的に述べることはできないが、その方法としての有利さを理解してもらうとともに、線形微分方程式を解くことは容易なものであることを知ってもらえばよいと考える。

たとえば、次のような微分方程式を解けといわれた場合を考えて見よう。一般の工学技術者としては当然何とかなるとしても、大部分の人がもしも演算子法などになれていないとすれば、ちょっと面倒くさいというような感じをもたれるものと思う。しかし、ラプラス変換を知っていれば何の苦もないことなのである。

【例】

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = e^t$$

$$\text{ただし } t=0 \text{ で } x=0 \quad \frac{dx}{dt}=1$$

まず、説明ぬきでラプラス変換による解を示そう。

- 1) まず公式によって、各項ごとにラプラス変換を行うと、

$$s^2X - 1 + 2sX + X = \frac{1}{s-1}$$

- 2) 次に X について s の代数式を求める

$$X = \frac{-s}{(1-s)(1+s)^2}$$

- 3) 公式 (巻末—No.—0031B) によって、 $T_1 = -1$ $T_2 = 1$ とおけば

$$x = \frac{1}{4}\varepsilon^t - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\right)\varepsilon^{-t}$$

となって解が得られるのである。この例は比較的簡単な場合であって、 $X = F(s)$ の形が公式集の中にあっただけで、まったく簡単に解が求められたのであるが、一般にはもちろんそう簡単なものばかりではない。公式集の量にも限りがあるので、当然公式のない場合も多い。もちろんその場合には対応策があるが、それは今後順次説明する予定である。

以上の例で、ラプラス変換を使うことによって、きわめて簡単に線形微分方程式が解けそうだという感じが得られたのではないかと思う。以上の方法について、その順序を整理すると次のようになる。

◎線形微分方程式を解く順序

- 1) 各項を公式によってラプラス変換する。
- 2) 式を整理して、 $X = F(s)$ の式を求め、公式を適用できる形に整頓する。
- 3) 公式によって逆変換する。

大筋はこれだけのことであり、今まで微分方程式を敬遠気味にして来られた諸君にとっては、まったく不思議と思えるほど簡単な操作で解が求められることがおわかりになったと思う。

これから、その順序に従って計算を行うための基本的な公式とか、その取扱い方法あるいは公式の適用方法、結果の処理などについて、その能力を獲得してもらえるように、一つ一つ例題、応用などを組合わせて説明してゆくことにしよう。この順序については §4. で再び詳しく説明するつもりである。

§ 2. 基本公式の導き方

巻末の公式集の中でラプラス変換に関する公式は、1. 理論公式、2. 基本公式 3. 一般公式の三つに区分されている。

この中の理論公式は数学的な原則とか理論的な公式であり、基本公式というのは、基本的な関数のラプラス変換の公式であって、主として変換用に利用されるもの、一般公式は主として逆変換用の公式と考えてはいただければよい。ここではまず、(1-1) の定義式によって求められる基本公式について、その積分例によってラプラス変換の実例を確認してほしいと思う。

以下基本公式を導いて見るが、その前に確認しておきたいことは(1-1) 式の計算は積分であるから、積分についての基本的な方法はすべて適用できるということである。つまり当然次のような関係はすべて成立するはずであるから、改めて説明を加えることはしないつもりである。

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t)] = a \cdot \mathcal{L}[f(t)] \dots\dots\dots (2-1)$$

$$\mathcal{L}[f(t) \pm g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \pm \mathcal{L}[g(t)] \dots\dots\dots (2-2)$$

その外、たとえば部分積分法なども当然適用することができるのである。

2-1 基本的な関数の場合

2-1-1 $f(t) = 1$ の \mathcal{L} 変換

(1-1) 式にしたがって計算を行って見よう。

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \times 1 dt \\ &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} \varepsilon^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

この変化については少しくどいくらいに示したが、結局

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \dots\dots\dots (2-3)$$

であって(1-4)式で説明したことを思いだしていただければ、同時に

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \dots\dots\dots (2-3)'$$

が成立することになる。

まったく同じことではあるが

$$f(t) = a \text{ であれば}$$

$$\mathcal{L}[a] = \frac{a}{s} \dots\dots\dots (2-4)$$

2-1-2 $f(t) = t$ の \mathcal{L} 変換

$$F(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \cdot t \, dt$$

を計算すればよい。この場合は、 t と ε^{-st} という二つの関数の積の積分であるから、方法としては一般に部分積分法が用いられよう。つまり積分の公式

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \dots\dots\dots (2-5)$$

において、いま、 $u = t$ $dv = \varepsilon^{-st} dt$ とおけば、

$$du = dt \quad v = -\frac{1}{s} \varepsilon^{-st}$$

となるから

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \cdot t \, dt = \left[-\frac{1}{s} \varepsilon^{-st} \cdot t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} \varepsilon^{-st} \right) dt \\ &= 0 + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s} \varepsilon^{-st} \right) dt = \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} \varepsilon^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \\ \therefore \mathcal{L}[t] &= \frac{1}{s^2} \dots\dots\dots (2-6) \end{aligned}$$

となる。

2-1-3 $f(t) = \frac{1}{T} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ の \mathcal{L} 変換

この関数は、ちょっと不必要な形をしていると考えられるかも知れない。これは $t=0$ のときに大きさ $1/T$ で、以後時定数 T で減衰する指数関数を示している。このように $1/T$ をつけた理由は、 $F(s)$ の式の形の方に基準をおいているためであって、なれてさえもらえば別に大したことではないのである。結果を見てもらえばわかっていただけと思う。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \left[\varepsilon^{-st} \cdot \frac{1}{T} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-(s+\frac{1}{T})t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-\frac{1+Ts}{T}t} dt = \left[\frac{-\varepsilon^{-(1+Ts)t/T}}{1+Ts} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+Ts} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\left[\frac{1}{T} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}\right] = \frac{1}{1+Ts} \dots\dots\dots (2-7)$$

一般の公式集では、大部分がこの方式ではなく、 $f(t) = \varepsilon^{-at}$ について表示してある。すなわち

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{-at}] = \frac{1}{s+a} \dots\dots\dots (2-7)'$$

この式は公式集の中には〔IV'〕として示しておいたが、一見こちらの方が簡単であり、実用上便利な場合もある。しかし、時定数の表示とかその他、物理的な意味から、著者は本書の方式の方がよいと信じているので、この方法を主として使ってゆくつもりである。

2-1-4 $f(t) = \omega_1 \sin \omega_1 t$ の \mathcal{L} 変換

三角関数は、微分方程式の解の中に、指数関数と並んできわめて頻りに現われてくる関数である。自然現象の変化の中の大部分が、指数関数的なものか、振動的なもの、またはこれらの合成であるとしてよい。このことは、物理や工学の分野で取扱う変化現象の大部分が、このような関数で表現されるということである。

ここでも、 ω_1 という振幅はおかしいと考えられるかも知れないが、これも $F(s)$ の方を標準にして考えていると理解してほしい。

この場合のラプラス変換にはちょっとした工夫が必要である。

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots\dots\dots (2-8)$$

という形の式をすでに知っておられる読者も多いことと思う。この式はベクトルの複素表示と関係があり、図 2-1(a) のようなベクトル z を、 $x + yi$ という複素数と対応させて表示することや、同図(b) のように x や y が

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \quad r = |z| \end{aligned}$$

で示されることから、

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

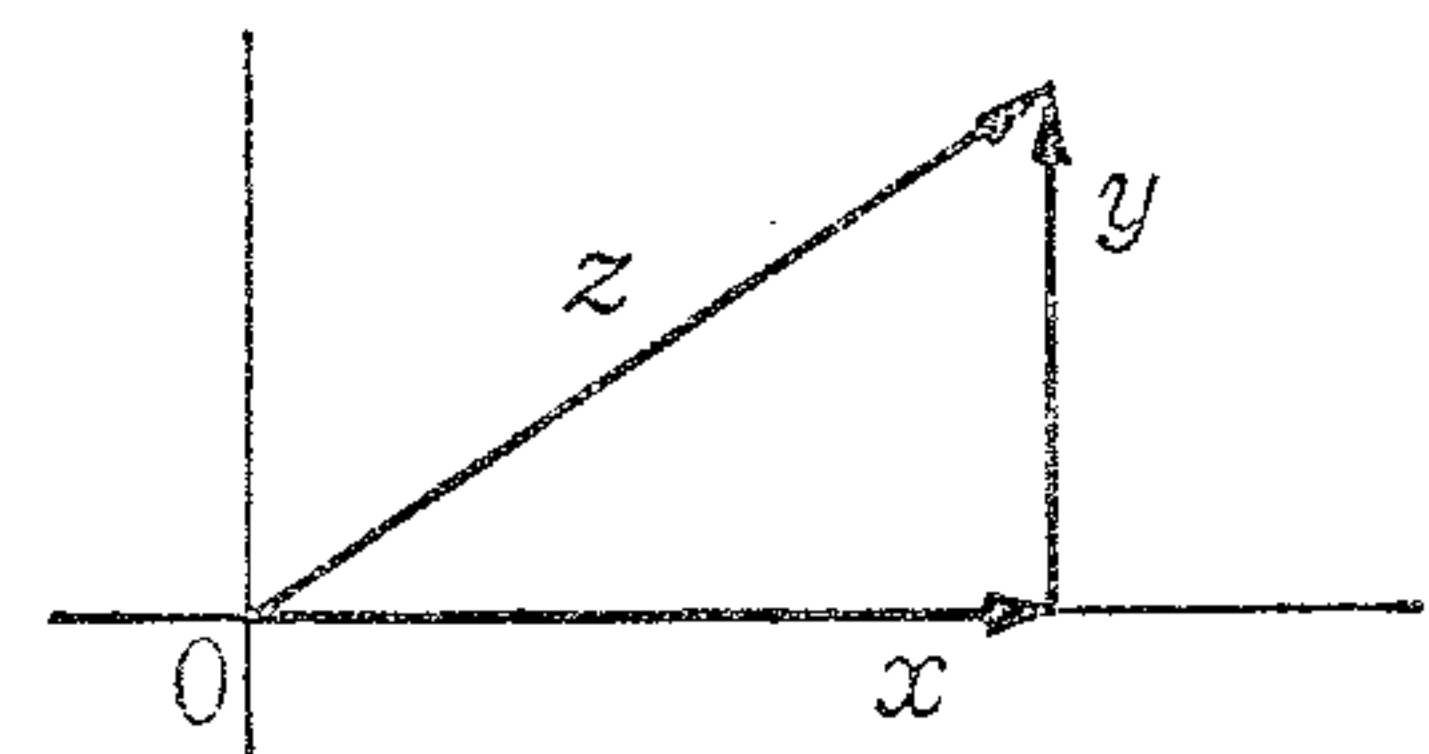
と書くことができるということ、その上さらに、 $\cos \theta$ や $\sin \theta$ を級数に展開したものを、 i を加えて合成すると、 z は $re^{i\theta}$ の形に等しくなることから明らかにされたオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \dots\dots\dots (2-9)$$

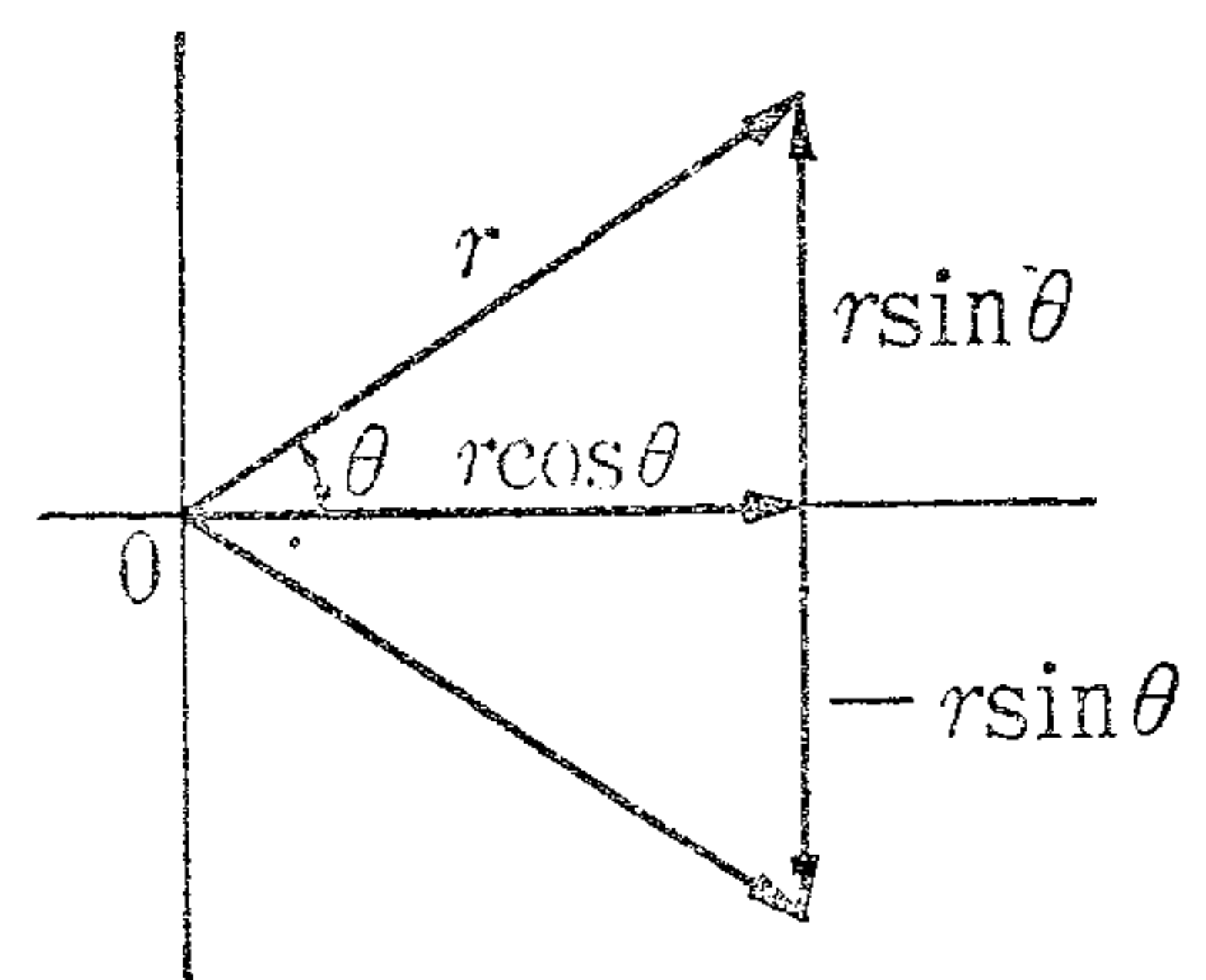
$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \dots\dots\dots (2-10)$$

を思い出していただきたい。この (2-9) 式と (2-10) 式を、両辺差引いて、 $2i$ で割れば (2-8) 式を導くこともできる。

ここで、ことわっておきたいが、著者を含む電気工学の分野では、ご承知のように電圧が e であり、電流が i である。したがって、(2-8) 式のように e 、 i を使うことは取扱い上不可能であって、以前から、 e の代りに ε を、 i の代りに j を使う習慣であるので以後は本書でも、その習慣に従って記号を使ってゆくことを了承していただきたい。さらに上式の θ は未知の関数であるから、これを一般の公式の形で示すことにして、(2-8) 式を書



(a)



(b)

図 2-1

き改めると

$$\sin x = \frac{\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}}{2j} \dots\dots\dots (2-8B)$$

さらに、この式によって当面の関数について

$$\sin \omega_1 t = \frac{\varepsilon^{j\omega_1 t} - \varepsilon^{-j\omega_1 t}}{2j}$$

と書くことができることになる。したがって

$$f(t) = \omega_1 \sin \omega_1 t = \frac{\omega_1}{2j} (\varepsilon^{j\omega_1 t} - \varepsilon^{-j\omega_1 t})$$

$$\therefore F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega_1}{2j} \left[\int_0^\infty (\varepsilon^{j\omega_1 t} - \varepsilon^{-j\omega_1 t}) \varepsilon^{-st} dt \right]$$

$$= \frac{\omega_1}{2j} \left[\int_0^\infty \varepsilon^{-(s-j\omega_1)t} dt - \int_0^\infty \varepsilon^{-(s+j\omega_1)t} dt \right]$$

$$= \frac{\omega_1}{2j} \left[\left[\frac{-\varepsilon^{-(s-j\omega_1)t}}{s-j\omega_1} \right]_0^\infty - \left[\frac{-\varepsilon^{-(s+j\omega_1)t}}{s+j\omega_1} \right]_0^\infty \right]$$

$$= \frac{\omega_1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega_1} - \frac{1}{s+j\omega_1} \right] = \frac{\omega_1}{2j} \frac{2j\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$$

$$= \frac{\omega_1^2}{s^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{1 + s^2/\omega_1^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}[\omega_1 \sin \omega_1 t] = \frac{1}{1 + s^2/\omega_1^2} \dots\dots\dots (2-11)$$

$f(t)$ の ω_1 を外した場合には当然

$$\mathcal{L}[\sin \omega_1 t] = \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \dots\dots\dots (2-11)'$$

と書くことできるし、(2-11)'式の方が変換の目的のときには都合がよいかも知れない。公式集には、基本公式の中にそれぞれ公式 V, V' として示してあるが、どちらを使うことも可能であり、使う人のなれによることである。

【問題 2-1】

次の関数をラプラス変換せよ。

1) $f(t) = t^2$ 2) $f(t) = \cos \omega_1 t$

3) $f(t) = 5\varepsilon^{-2t}$

4) $f(t) = \sin(\omega_1 t + \pi/4)$ (ヒント 展開せよ。)

2-2 導関数のラプラス変換

ここでは、 $f(t)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(t)$ の形で示すことにする。つまり

$$\frac{d}{dt}f(t) = f^{(1)}(t) \quad \frac{d^2}{dt^2}f(t) = f^{(2)}(t)$$

まず、一次導関数 $f^{(1)}(t)$ をラプラス変換する場合を考えて見よう。定義によって、

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) \varepsilon^{-st} dt$$

この場合にも、部分積分法を利用して見ることにしよう。(2-5) 式において、

$$u = \varepsilon^{-st}, \quad dv = f^{(1)}(t) dt \quad \text{とおけば}$$

$$du = -s\varepsilon^{-st} dt, \quad v = f(t) \quad \text{となるから、}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(1)}(t)] &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \cdot f^{(1)}(t) dt \\ &= \left[\varepsilon^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s\varepsilon^{-st}) f(t) dt \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = sF(s) - f(0) \dots\dots\dots (2-12)$$

ここで、 $F(s)$ は微分をしない前の原関数のラプラス変換である。また上記の変化の中で $t = \infty$ のとき $\varepsilon^{-st} f(t)$ が不定とならないことが条件であり、また、 $f(0)$ は厳密には $f(0+)$ と書くべきであるが、本書では、 $t = 0+$ のときの問題には厳密に立入っていないので、また実用上の計算ではほとんど問題にはならないので、 $f(0)$ と書いて $f(0+)$ の意味に使用してゆくことにする。

上記と同様にして、 $f^{(2)}(t)$ のラプラス変換も求められる。まず

$$\mathcal{L}[f^{(2)}(t)] = \int_0^{\infty} f^{(2)}(t) \varepsilon^{-st} dt$$

において、上記と同様に

$$u = \varepsilon^{-st}, \quad dv = f^{(2)}(t) dt \quad \text{とおけば}$$

$$du = -s\varepsilon^{-st} dt, \quad v = f^{(1)}(t) \quad \text{となるから}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^{(2)}(t) \varepsilon^{-st} dt &= \left[\varepsilon^{-st} f^{(1)}(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s\varepsilon^{-st}) f^{(1)}(t) dt \\ &= -f^{(1)}(0) + s \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) \varepsilon^{-st} dt \end{aligned}$$

となって、この式の第2項は、 $f^{(1)}(t)$ のラプラス変換に s を乗じたものと同じものであるから

$$\mathcal{L}[f^{(2)}(t)] = -f^{(1)}(0) + s(sF(s) - f(0))$$

$$\therefore \mathcal{L}[f^{(2)}(t)] = s^2 F(s) - s(f(0) - f^{(1)}(0)) \dots\dots\dots (2-13)$$

まったく同様な手段によって

$$\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f^{(1)}(0) - f^{(2)}(0) \dots\dots\dots (2-14)$$

この形から推して、 $f^{(n)}(t)$ のラプラス変換も容易に求められるであろう。

(2-12) ~ (2-14)式を見ればわかるようにもしもすべての初期値が0であれば, 1回微分するごとに, $F(s)$ に s を一つずつ乗ずることになり, この初期値がすべて0であるという条件の下では

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) \quad (\text{初期値 } 0) \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

が成立する。このときには, ヘビサイド演算子法の変換と同じような形になるのである。

【例題 2-1】

$f(t) = \sin t$ をラプラス変換せよ。

この問題は, (2-11)式の公式を利用すれば, 当然直ちに結果が得られる。つまり, 公式 (2-11) または (2-11)' において, $\omega_1 = 1$ とおけば, いずれの場合でも直ちに

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1+s^2}$$

となるが, ここでは上記の導関数の場合の例題として考えて見ることにしよう。

$f(t) = \sin t$ であるから,

$$f^{(1)}(t) = \cos t, \quad f^{(2)}(t) = -\sin t,$$

$$\text{また } f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1, \quad f(0) = \sin 0 = 0$$

ここで, (2-13)式を利用して,

$$\mathcal{L}[f^{(2)}(t)] = -\mathcal{L}[\sin t] = s^2 \mathcal{L}[\sin t] - s \times 0 - 1$$

$$\therefore (s^2 + 1) \mathcal{L}[\sin t] = 1$$

$$\therefore \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1+s^2}$$

【問題 2-2】

1) $f^{(4)}(t), f^{(5)}(t)$ のラプラス変換の式を作れ。

2) (2-12), (2-13)式を利用して

(i) $\mathcal{L}[t]$ (ii) $\mathcal{L}[\varepsilon^{-at}]$ を求めよ。

2-3 積分関数のラプラス変換

ここでも, 積分関数を $f^{(-n)}(t)$ の形で示すことにする。そこで, 前項と同様に定義式から,

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \int_0^{\infty} f^{(-1)}(t) \varepsilon^{-st} dt$$

この式についても部分積分法を使うとして, この場合には, $f(t)$ の変換式から出発する方がよい。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \varepsilon^{-st} dt$$

において

$$u = \varepsilon^{-st}, \quad dv = f(t) dt \quad \text{とおくと}$$

$$du = -s\varepsilon^{-st} dt, \quad v = f^{(-1)}(t) \quad \text{となるから,}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[\varepsilon^{-st} f^{(-1)}(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s\varepsilon^{-st}) f^{(-1)}(t) dt \\ &= -f^{(-1)}(0) + s \mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \dots\dots\dots (2-16)$$

同様に二階の積分関数については,

$$\mathcal{L}\left[\int\int f(t) dt dt\right] = \mathcal{L}[f^{(-2)}(t)] = \int_0^{\infty} f^{(-2)} \varepsilon^{-st} dt$$

この場合には, (2-16)式の途中の式

$$F(s) = -f^{(-1)}(0) + s \int_0^{\infty} f^{(-1)}(t) \varepsilon^{-st} dt$$

の第二項について部分積分を適用すれば,

$$u = \varepsilon^{-st}, \quad dv = f^{(-1)}(t) dt \quad \text{とおくと}$$

$$du = -s\varepsilon^{-st} dt, \quad v = f^{(-2)}(t) \quad \text{とするから}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= -f^{(-1)}(0) + s \left[\left[\varepsilon^{-st} f^{(-2)}(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f^{(-2)}(t) \varepsilon^{-st} dt \right] \\ &= -f^{(-1)}(0) - s f^{(-2)}(0) + s^2 \mathcal{L}[f^{(-2)}(t)] \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[f^{(-2)}(t)] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s} \dots\dots\dots (2-17)$$

まったく同様の手段で,

$$\mathcal{L}[f^{(-3)}(t)] = \frac{F(s)}{s^3} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^3} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-3)}(0)}{s} \dots\dots\dots (2-18)$$

以下同様にして何階の積分関数についても, ラプラス変換式を作ることができよう。

上記の式の中で, $f^{(-1)}(0)$ とか $f^{(-2)}(0)$ という初期値は, 導関数の場合と多少異なった意味をもつものであることに注意が必要である。これらは積分された関数の初期値であるから, その数値を求めるためには原関数の積分が求められなければならないわけである。

電気工学においては, 電流を求める式の中でコンデンサの初期電圧が示されることが多く, この場合には電流の積分値を静電容量で割った値が与えられていることになる。次の例題を見てほしい。

【例題 2-2】

コンデンサの逆起電力の式

$$e_C = f(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

をラプラス変換せよ。ただし、 $t=0$ において、 $e_{C0} = 2[V]$ であるとする。

この場合の電流 $i[A]$ はもちろん時間の関数であるが、その内容、流れ方は未知である。この場合、 $i=f(t)$ とおけば、この i に概当する s の関数は、 $I(s)$ と書くか、単に大文字だけで I と表示する。一般には、 s 領域の関数については、すべて $X(s)$ とか $I(s)$ 、 $E(s)$ というように (s) をつける習慣もかなり多いが、本書では十分に区別ができるときは (s) をつけずに、単に大文字で表わすことにする。つまり x, e, i のラプラス領域での表示は、それぞれ X, E, I 、で示すことにしておく。

上式は、公式(2-16) (基本公式VIII-a)によって変換すると

$$E_C = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{C} \left(\frac{I}{s} + \frac{2}{s} \right) \quad (\text{誤})$$

となりそうである。しかし、これは重大な誤りであることを注意しておきたい。なぜならばこの計算では、 $f^{(-1)}(0) = 2$ としており、一見よさそうだが、実は $f^{(-1)}(t)$ は $\left[\int i dt \right]$ であって、その単位は電圧ではなく、電荷量だからであり、それが電圧となるためには、 C で割らなければならないからである。このことを式で示すと次のようになる。

$$\left[\frac{1}{C} \int i dt \right]_{t=0} = \left[\frac{1}{C} i^{(-1)}(t) \right]_{t=0} = \left[\frac{1}{C} Q(t) \right]_{t=0} = \frac{Q(0)}{C} = 2[V]$$

である。初期値を代入するときには、それが何の初期値であるのかを明確に把握しておかなければならない。以上により正解は

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{C} \left(\frac{I}{s} + \frac{Q_0}{s} \right) = \frac{I}{sC} + \frac{2}{s}$$

【例題 2-3】

$f(t) = \sin t \cdot \cos t$ をラプラス変換せよ。

これは別にも方法があるが、特に本節の場合の方法を利用して見よう。

$$f(t) = \sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{であるから}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[g(t)] \quad \text{とおくと}$$

$$g(0) = \sin 0 = 0 \quad g^{(-1)}(0) = -\frac{1}{2} \cos 0 = -\frac{1}{2}$$

$$g^{(-2)}(0) = -\frac{1}{4} \sin 0 = 0$$

公式(2-17)式によって、

$$\mathcal{L}[g^{(-2)}(t)] = \frac{G(s)}{s^2} + \frac{g^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{g^{(-2)}(0)}{s} = \frac{G(s)}{s^2} - \frac{1}{2s^2}$$

$$\text{つまり } \mathcal{L}\left[-\frac{1}{4}\sin 2t\right] = -\frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{\mathcal{L}[\sin 2t]}{s^2} - \frac{1}{2s^2}$$

$4s^2$ を掛けて

$$-s^2\mathcal{L}[\sin 2t] = 4\mathcal{L}[\sin 2t] - 2$$

$$\therefore \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\therefore \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{1}{s^2 + 4}$$

この結果は (2-11)' 式を使えば、直ちに得られることは明らかである。

以上のような、基本的な公式を整理したものが巻末公式集の中の、B 基本公式の部分であり、以後は公式について、(2-16)式というような表示を用いず、公式(VIII-a)といったような表示を使うことにしたい。

【問題 2-3】

公式(VIII-b)を使って $\mathcal{L}[\omega_1 \cos \omega_1 t]$ を求めよ。

§ 3. ラプラス逆変換の基本的な方法

前節では、ラプラス変換の基本的な公式を定義式によって導いた。ラプラス変換の利用方法は、§.1 で述べたように変換して得られた s の関数を代数的に整理してから、元の t の関数に戻すことによって完成されるものである。ここでは、この元に戻す“逆変換”について、基本的な方法、手順を説明することにしたい。

ただし1-2項でも述べたように、その理論的な説明は省略し、結果を利用する立場から出発することにする。逆変換の理論式は、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \oint \varepsilon^{st} F(s) ds \dots\dots\dots (3-1)$$

であり

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \dots\dots\dots (3-2)$$

であれば

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \dots\dots\dots (3-3)$$

が成立するということを出発点として話を進めることにする。この(3-2)、(3-3)式の相互関係は、指数関数と対数の関係と対比してよく説明されているものである。

3-1 基本公式による逆変換

いままで説明してきた基本公式を、逆に使って逆変換を行うことはそうむずかしいことではないが、その手段として2~3の要点を説明してゆくことにしよう。

まず代数的に整理された $F(s)$ について、もしもその式がきわめて簡単なものであれば、基本公式が直ちに適用できることもある。しかし、一般にはそんな簡単な場合はほとんどないから、これを基本公式が応用できるような形に変形する必要がある。

この変形の手続きを列挙すれば次のようになる。

- (イ) まず $F(s)$ の分母を一次式（複素因数も含む）の積に因数分解する。
- (ロ) 部分分数分解法によって $F(s)$ を分解する。
- (ハ) その他便法として、分子が s を含む場合は、分母の因数で分子を割り算して商と剰余を区分するとか、適当に分子を区分して式を分割してから計算を進める方法などがある。

本節の目的は、基本公式による逆変換であるから、まず原則的な方法である(イ)(ロ)について説明を進めることにしよう。しかし、この(イ)については特別なものは別として、実は相当な代数的な能力を必要とする。つまり高次方程式を解くことができなければ、因数分解

は不可能だからである。しかも一般的にいえば（練習問題などを別にして）そのほとんどが整式ではないし、したがって近似解法などが必要となる場合が多い。これらについては後に説明するとして、まずは簡単な式から始めることにしよう。

【例題 3-1】

$$F(s) = \frac{4+7s+s^2}{1+2s-s^2-2s^3} \dots\dots\dots (3-4)$$

を逆変換せよ。

この式の分母は、容易に因数分解できる。

$$F(s) = \frac{4+7s+s^2}{(1+s)(1-s)(1+2s)} \dots\dots\dots (3-4A)$$

いま、この式を分母の因数ごとに分解できたものにして、これを次のようにおいて見る。

$$F(s) = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{1-s} + \frac{C}{1+2s} \dots\dots\dots (3-4B)$$

もしも何かうまい方法でこの A , B , C が求められれば、あとは基本公式IVで簡単に逆変換ができることになる。

いま (3-4A, B) 式の両辺に $(1+s)$ を掛けると

$$(1+s)F(s) = \frac{4+7s+s^2}{(1-s)(1+2s)} = A + \frac{(1+s)B}{1-s} + \frac{(1+s)C}{1+2s}$$

この式において $1+s=0$ すなわち $s=-1$ とおいて見ると、

$$A+0+0 = \frac{4-7+1}{(1+1)(1-2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

となって、 A の値が求まることがわかると思う。 B , C についても、同じようにその分母の式を掛けて後、その式を 0 とする s の値を代入すればよいから、

$$B = \left. (1-s)F(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{4+7s+s^2}{(1+s)(1+2s)} \right|_{s=1} = \frac{4+7+1}{2 \times 3} = 2$$

$$C = \left. (1+2s)F(s) \right|_{s=-\frac{1}{2}} = \left. \frac{4+7s+s^2}{(1+s)(1-s)} \right|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{4-\frac{7}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 1$$

これらの値を (3-4B) に代入すれば、

$$F(s) = \frac{1}{1+s} + \frac{2}{1-s} + \frac{1}{1+2s}$$

したがって公式IV

$$\frac{1}{1+Ts} \iff \frac{1}{T} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$$

によれば、 $T_1=1$ $T_2=-1$ $T_3=2$ として、

$$f(t) = \varepsilon^{-t} - 2\varepsilon^t + \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{t}{2}} \dots \dots \dots (3-4C)$$

ということになる。

【例題 3-2】

$$F(s) = \frac{-2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} \dots \dots (3-5) \text{ を逆変換せよ。}$$

まず分母を因数分解して、

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)(s^2+2s+2)} \dots \dots \dots (3-5A)$$

この式は、一般公式を適用すれば（後述）容易に逆変換できるが、本節の目的とする基本公式では、このままでは逆変換できないから、もう少し分解して一次式の積の形にしてしまうことにしよう。このことは少しくどいと思われるかも知れないが、このような方法が基本になって、二次因数についての一般公式ができあがっているという経過も知ってほしいからである。

二次因数 s^2+2s+2 は、 $(=0)$ とおいて根の公式を使ってもよいし、変形して平方に開いてもよい。0とおいて根を求めると

$$s = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm j \text{ したがって}$$

$$s^2+2s+2 = (s+1-j)(s+1+j)$$

と分解することができることになる。そこで、

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)} \dots \dots \dots (3-5B)$$

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1-j} + \frac{C}{s+1+j} \dots \dots \dots (3-5C)$$

とおけば、前の例題の場合とまったく同様にして A, B, C が求められることになる。

$$A = \left. (s+1)F(s) \right|_{s=-1} = \left. \frac{-2}{(s+1-j)(s+1+j)} \right|_{s=-1}$$

$$= \left. \frac{-2}{(-1+1-j)(-1+1+j)} \right| = \frac{-2}{-j^2} = -2$$

$$B = \left. (s+1-j)F(s) \right|_{s=-1+j} = \frac{-2}{(-1+j+1)(-1+j+1+j)} = \frac{-2}{2j^2} = 1$$

$$C = \left. (s+1+j)F(s) \right|_{s=-1-j} = \frac{-2}{(-1-j+1)(-1-j+1-j)} = \frac{-2}{2j^2} = 1$$

したがって (3-5C) 式は

$$F(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s+1-j} + \frac{1}{s+1+j} \dots\dots\dots (3-5D)$$

公式IVによって逆変換すれば

$$\begin{aligned} f(t) &= -2e^{-t} + e^{-(1-j)t} + e^{-(1+j)t} \\ &= -2e^{-t} + e^{-t}(e^{jt} + e^{-jt}) \dots\dots\dots (3-5E) \end{aligned}$$

これでも一応の逆変換ができたことになるが、式の形の上では不完全である。常識として指数関数の指数の中に j が現われたときは、しかもそれが正負同形るときには、三角関数におきかえられることを当然知っていなければならないからである。前節に示した (2-9), (2-10) 式を加えると

$$e^{jt} + e^{-jt} = 2 \cos t$$

であるから

$$\begin{aligned} f(t) &= -2e^{-t} + 2e^{-t} \cos t \\ &= -2e^{-t}(1 - \cos t) \end{aligned}$$

というのが一般的な解である。

【問 題 3-1】

1) 次の各式を部分分数に分解せよ。

$$(i) \quad F(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(ii) \quad F(s) = \frac{6s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

2) 上式の結果を基本公式IVによって逆変換せよ。

3-2 部分分数分解法

すでに前項の例題で実際に使用した方法であるが、多少の例外もあるので、ここではもう一度正式に説明することにする。いま

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)\dots\dots(s+a_{n-1})(s+a_n)} \dots\dots\dots (3-6)$$

という式を考えることにしよう。ただしこの場合、 $A(s)/B(s)$ は既約分数であり、 $A(s)$ は $B(s)$ よりも低次の式であって、 a_1, a_2, \dots, a_n は互いに等しくないものとする。

(3-6) 式を部分分数に分解したとき

$$F(s) = \frac{C_1}{s+a_1} + \frac{C_2}{s+a_2} + \dots\dots + \frac{C_{n-1}}{s+a_{n-1}} + \frac{C_n}{s+a_n} \dots\dots\dots (3-7)$$

という式が得られるものとするれば、 C 中の任意の C_r を求めるためには、(3-6), (3-7) 式に C_r の分母 $(s+a_r)$ を掛けると、

$$(s+a_r)F(s) = \frac{(s+a_r)A(s)}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_r)\cdots(s+a_n)} \dots\dots\dots (3-6A)$$

$$(s+a_r)F(s) = \frac{(s+a_r)C_1}{s+a_1} + \frac{(s+a_r)C_2}{s+a_2} + \dots + C_r + \dots + \frac{(s+a_r)C_n}{s+a_n} \dots\dots\dots (3-7A)$$

ここで, $s+a_r=0$ すなわち $s=-a_r$ とおくと, (3-7A)式から,

$$C_r = \left. (s+a_r)F(s) \right|_{s=-a_r} \dots\dots\dots (3-8)$$

(3-6A)式からはこの(3-8)式の実際の値を求められる形の式が得られるので,

$$C_r = \left. (s+a_r)F(s) \right|_{s=-a_r} = \left. \frac{(s+a_r)A(s)}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)} \right|_{s=-a_r} \dots\dots\dots (3-9)$$

ということになる。ここまでの内容についてはすでに前項の例題で実例を示したので, 特に説明が必要はないと思う。

◎分母に重根がある場合◎

このときは, 簡単に(3-9)式を適用することはできない。いま説明を簡単にするために次のような式を考えて見よう。

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s+a)^m(s+b)} \dots\dots\dots (3-10)$$

$$= \frac{D_1}{s+a} + \frac{D_2}{(s+a)^2} + \frac{D_3}{(s+a)^3} + \dots + \frac{D_m}{(s+a)^m} + \frac{C}{s+b} \dots\dots\dots (3-11)$$

何故このような形に分解されるかについては, たとえば, 同じ $(s+a)$ を分母とする m ケの項に分けることが不可能であることから理解されるだろう。

この式の中で, C については(3-9)式で求めることができるのは, 直ちに理解されるであろうと思う。いま一般にこの例のようにただ一つとは限らない重根でない部分を一括して $G(s)$ とおいて切り離して考えることにしよう。

(3-11)式の両辺に $(s+a)^m$ を掛けて

$$(s+a)^m F(s) = D_1(s+a)^{m-1} + D_2(s+a)^{m-2} + \dots + \dots + D_{m-1}(s+a) + D_m + (s+a)^m G(s) \dots\dots\dots (3-12)$$

ここで前と同じように $s=-a$ とおけば,

$$D_m = \left. (s+a)^m F(s) \right|_{s=-a} = \left. \frac{A(s)}{s+b} \right|_{s=-a} \dots\dots\dots (3-13)$$

となって, D_m も直ちに求められるのである。しかし, D_{m-1} 以下はこの方法では求めることはできない。つまり D_{m-1} を求めるために $(s+a)^{m-1}$ を掛けても, D_m の分母には $(s+a)$ が残るから, $s=-a$ とおいても ∞ となって D_{m-1} を求めることはできない。

D_{m-1} 以下を求めるためには次のような手段が必要である。すなわち(3-12)式を微分し

て見ると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s+a)^m F(s) &= (m-1)D_1(s+a)^{m-2} + \dots + 2D_{m-2}(s+a) \\ &\quad + D_{m-1} + \frac{d}{ds}(s+a)^m G(s) \end{aligned}$$

ここで, 例のように, $s+a=0$, $s=-a$ とおくと

$$D_{m-1} = \left. \frac{d}{ds}(s+a)^m F(s) \right|_{s=-a} = \left. \frac{d}{ds} \cdot \frac{A(s)}{s+b} \right|_{s=-a} \dots \dots \dots (3-14)$$

ということになる。 D_{m-2} については, さらにもう一度微分して同じことを行くと,

$$D_{m-2} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2}(s+a)^m F(s) \right|_{s=-a} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2} \cdot \frac{A(s)}{s+b} \right|_{s=-a} \dots \dots \dots (3-15)$$

一般的に

$$D_{m-r} = \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r}{ds^r}(s+a)^m F(s) \right|_{s=-a} \dots \dots \dots (3-16)$$

という形で部分分数に分解されることになるのである。これらについては, 次の例題で確かめてほしいが, そんなに多くの重根は一般にはないからそう繁雑でもない。

【例題 3-3】

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s - 1}{(s+1)^3(s+4)} \quad \text{を部分分数に分解せよ。}$$

$$\text{まず} \quad F(s) = \frac{D_1}{s+1} + \frac{D_2}{(s+1)^2} + \frac{D_3}{(s+1)^3} + \frac{C}{s+4}$$

とおけば, C と D_3 は簡単に求められる。

$$C = \left. (s+4)F(s) \right|_{s=-4} = \left. \frac{s^2 - 3s - 1}{(s+1)^3} \right|_{s=-4} = \frac{16 + 12 - 1}{(-3)^3} = -1$$

$$D_3 = \left. (s+1)^3 F(s) \right|_{s=-1} = \left. \frac{s^2 - 3s - 1}{s+4} \right|_{s=-1} = \frac{1 + 3 - 1}{3} = 1$$

$$D_2 = \left. \frac{d}{ds}(s+1)^3 F(s) \right|_{s=-1} = \left. \frac{s^2 + 8s - 11}{(s+4)^2} \right|_{s=-1} = \frac{-18}{9} = -2$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3 F(s) \right|_{s=-1} = \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + 8s - 11}{(s+4)^2} \right) \right|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \left(1 + \frac{-27}{(s+4)^2} \right) \right|_{s=-1} = \frac{1}{2} \left. \frac{27 \times 2(s+4)}{(s+4)^4} \right|_{s=-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{54}{27} = 1$$

$$\therefore F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+4}$$

【問題 3-2】

1) 次の $F(s)$ を部分分数に分解せよ。

$$(i) F(s) = \frac{1}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2}$$

$$(ii) F(s) = \frac{4}{(s+1)^2 (s+2)^2 (s+3)}$$

2) 次の $F(s)$ を部分分数に分解した後、逆変換せよ。

$$(i) F(s) = \frac{1}{(1+s)^3 (1+2s)}$$

$$(ii) F(s) = \frac{1}{s(1+0.5s)(1+2s)^2}$$

3-3 高次式の分解方法（根の求め方）

前項の方法は、まず分母が因数分解されていることを前提としている。しかしそのためには、当然のことであるが、分母を因数分解する能力がなければならず、このためには高次式を0とおいて根（分母を0とする値は一般には極という）を求めることができなければならないのである。

後に述べるように、一般式を利用するときには複素根まで求めなくてもよく、実根を持たない二次因数までに分解すればよいので、ここでは実根と実根を持たない二次因数の積に分解するという考えで話を進めることにしよう。

3-3-1 三次方程式の解法

三次方程式を解くには、有名な Cardano の解法がある。三次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

において、 $x = X - a/3$ とおいて、

$$X^3 + 3pX + q = 0 \dots\dots\dots (3-17)$$

の形に直して解いてゆくこの方法は、大てい代数学の教科書にのっているが、数学の中ではどうしてこうも不親切？なのかと思われるほど簡単な説明しかしていないし、中には次の四次方程式の場合も含めて、“これらの解法は、理論的には面白いが実用性はない” というような注記をしているものさえもあるほどだから、実用的に利用するという場合はあ

まりないと考えているように受取れるのである。

しかし、われわれの立場では、現に実用的に使用する必要に迫られているので、何とかして、この方法を生かして使うことを考えなければならない。ここでは Cardano の方法の中味を実用的な形にして、実際に計算できるようにしたものを示すことにしよう。

いま三次方程式の一般形として

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0 \dots\dots\dots (3-18)$$

この式の根を求めるためには、次の順序で計算を行ってゆけばよい。

$$l = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$m = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}$$

$$n = \sqrt{l^3 + m^2} \dots\dots\dots (3-18A)$$

n が実数であるときは、つまり $l^3 + m^2 \geq 0$ のときは、次のように計算を進める。

$$p = \sqrt[3]{-(m-n)}$$

$$q = \sqrt[3]{-(m+n)}$$

以上の結果、(3-18)式の三根は、

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= p + q - \frac{a}{3} \\ s_2, s_3 &= \frac{-(p+q) \pm j\sqrt{3}(p-q)}{2} - \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-18B)$$

(3-18A)において $l^3 + m^2 < 0$ の場合、すなわち、 n が虚数であるときには、(3-18)式は三実根をもつのであるが、このときは別な計算を行うことになる。

$$\theta = \cos^{-1} \frac{m}{\sqrt{-l^3}} \dots\dots\dots (3-18C)$$

によって θ を求めると、(3-18)式の三根は次のような形になる。

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -2\sqrt{-l} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{a}{3} \\ s_2 &= -2\sqrt{-l} \cos \left(\frac{\theta}{3} + 120^\circ \right) - \frac{a}{3} \\ s_3 &= -2\sqrt{-l} \cos \left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ \right) - \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-18D)$$

以上の計算の中には、一つだけちょっとややこしい点がある。それは立方根の計算であるが、おおざっぱな計算では計算尺でも十分であるが、詳しい結果を必要とするときには、筆算とか計算機を使うなどして、なるべく多くの桁を計算しなければならない。この

方法の実用性を認められるか否かは、この立方根の計算にかかっているとって過言ではないように思われる。近頃は卓上電算機でも、立方根が簡単に求められるので、この方法の実用性は十分に大きいと考えられる。

二、三の例題を示そう。

【例題 3-4】

$s^3 - 18s^2 + 132s - 416 = 0$ を解け。

この方程式に上記の方法を適用して見よう。

まず $a = -18$ $b = 132$ $c = -416$ だから

$$l = \frac{396 - 324}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

$$m = \frac{-11664 + 21384 - 11232}{54} = \frac{-1512}{54} = -28$$

$$n = \sqrt{512 + 784} = \sqrt{1296} = 36$$

$$p = \sqrt[3]{-(-28 - 36)} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$q = \sqrt[3]{-(-28 + 36)} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$p + q = 2 \quad p - q = 6 \quad \frac{a}{3} = -6$$

$$\therefore s_1 = 2 + 6 = 8$$

$$\begin{aligned} s_2, s_3 &= \frac{-2 \pm j\sqrt{3} \times 6}{2} + 6 = -1 \pm j3\sqrt{3} + 6 \\ &= 5 \pm j3\sqrt{3} \end{aligned}$$

となって、簡単に根が求められた。

【例題 3-5】

$s^3 - 6s^2 + 9s - 2 = 0$ を解け。

この式では、

$a = -6$ $b = 9$ $c = -2$ であるから、上記の順に従って計算を行ってゆくと、

$$l = -1 \quad m = 0 \quad n = \sqrt{-1} = j \quad \frac{a}{3} = -2$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{0}{\sqrt{-l^3}} = 90^\circ \quad \therefore \frac{\theta}{3} = 30^\circ$$

したがって

$$s_1 = -2\sqrt{+1} \cos 30^\circ + 2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$s_2 = -2\sqrt{1}\cos 150^\circ + 2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$s_3 = -2\sqrt{1}\cos 270^\circ + 2 = 2$$

以上の2つ例題は、解き方の順序を示したもので、両者とも特に簡単に解けるものを選んである。実際にはもう少し計算がややこしくなるものと考えておいてほしい。

3-3-2 三次方程式の近似解法

三次方程式は上記の方法で正しく解けるから、特に近似解法は不必要であると思うかも知れない。しかし、この方法は5次以上の奇数次方程式とか、実根を含む4次以上の偶数次方程式の実根の近似値を見つけ出す方法としても有効なものである。

奇数次の方程式が少なくとも一つの実根を持つことはすでに知っておられることと思う。このことは、 $y=f(x)$ において、 x の絶対値がきわめて大きくなったときには、 y の正負は x の正負によって定まることから明らかであって、 y のカーブは x が $-\infty$ から $+\infty$ に動くとき、少なくとも一回は x 軸を横切ること、すなわち少なくとも一つの実根を持つということである。

ここでは、このことによって奇数次方程式の中に必ず存在する実根を見つけて、これを分離し、残りを偶数次の方程式にする方法と考えてもらってもよいのである。

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0$$

において、その第一近似根として、まず何を選ぶかが問題となるのであるが、この方法では、方程式の一次以下の部分の根を利用するのである。すなわち、

$$bs + c = 0 \quad \text{から} \quad s = -\frac{c}{b} \dots \dots \dots (3-19)$$

次にすべきことは、この第1近似因数 $(s + c/b)$ で原式を割り算して見た上で、第二近似因数以下を見出し、結果として剰余が満足できるくらいに小さくなるまで計算を繰返して、目的とする近似根を見つければよいのである。

割り算と第二近似因数は次のようになる。

$$\begin{array}{r} s^2 + (a - c/b)s + D \\ s + c/b \overline{) s^3 + as^2 + bs + c} \\ \underline{s^3 + cs^2/b} \\ (a - c/b)s^2 + bs \\ \underline{(a - c/b)s^2 + c/b \times (a - c/b)s} \\ Ds + c \\ \underline{Ds + Dc/b} \\ c - \frac{c}{b}D \end{array}$$

ただし

$$D = b - \frac{c}{b} \left(a - \frac{c}{b} \right)$$

この結果、第二近似因数は、この割り算の商の定数項 D で c を割って、 $(s + c/D)$ を使

い、剰余の $c - \frac{c}{b}D$ がきわめて小さくなるまで同じことを繰返えせばよいのである。

【例題 3-6】

$s^3 - 6s^2 + 9s - 2 = 0$ の実根を見出せ。

この問題は、すでに【例題3-5】で解いてあるが、ここでも実例として使って見よう。

まず、第1近似因数 $(s - 2/9) \doteq (s - 0.22)$ で割算をして見よう。

$$\begin{array}{r}
 s^2 - 5.78s + 7.73 \\
 s - 0.22 \overline{) s^3 - 6s^2 + 9s - 2} \\
 \underline{s^3 - 0.22s^2} \\
 -5.78s^2 + 9s \\
 \underline{-5.78s^2 + 1.27s} \\
 7.73s - 2 \\
 \underline{7.73s - 1.70} \\
 -0.3
 \end{array}$$

第2近似因数 $(s - \frac{2}{7.73}) \doteq (s - 0.259)$

以下同じような計算を行うのであるが、この割算を簡単にするためには、次のような手段がある。

- (i) s^n を記入しなくても計算はできる。ただし、欠けている次数の場所を空けておくことが必要である。
- (ii) 同じ値になる各行の左端は省略してもよいから、スペースをとらないで、計算を行うことができる。

以上のことはこの第二近似計算で見てほしいと思う。

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -5.741 \quad +7.513 \\
 1 - 0.259 \overline{) 1 \quad -6 \quad +9 \quad -2} \\
 \underline{-0.259 \quad +1.487 \quad -1.946} \\
 -5.741 \quad 7.513 \quad -0.054
 \end{array}$$

この計算は見なれないとわかりにくいかも知れないが、実際の計算と比較して見れば、その利点がよくわかると思う。

第三近似因数 $(s - 2/7.513) \doteq (s - 0.2662)$

商 $s^2 - 5.7338s + 7.4737$ 余り -0.0105

第四近似因数 $(s - 0.2676)$

商 $s^2 - 5.7324s + 7.4660$ 余り -0.0021

この程度でまず十分と見てよいであろう。この近似根 0.2676 という数字は、例題3-5の解の $s_2 = 2 - \sqrt{3} = 0.26794\dots$ と比較してきわめてよい近似であることがわかってもらえることと思う。この例は3実根の場合であったが、一実根の場合 例題3-4にも適用して見ることにしよう。

【例題 3-7】

$s^3 - 18s^2 + 132s - 416 = 0$ を解け、

この場合にはちょっと近似が収束しにくい。計算は省略して、近似因数と結果だけを示そう。

| | 近似因数 | 商 | 余り |
|------|--------------------------|--------------------------|-----------|
| I | $s - 3.15$ | $s^2 - 14.85s + 85.22$ | -147.56 |
| II | $s - 4.88$ | $s^2 - 13.12s + 67.97$ | -84.31 |
| III | $s - 6.12$ | $s^2 - 11.88s + 59.29$ | -53.15 |
| IV | $s - 7.02$ | $s^2 - 10.98s + 54.92$ | -30.46 |
| V | $s - 7.57$ | $s^2 - 10.43s + 53.04$ | -14.5 |
| VI | $s - 7.84$ | $s^2 - 10.16s + 52.35$ | -5.6 |
| VII | $s - 7.947$ | $s^2 - 10.053s + 52.11$ | -1.88 |
| VIII | $s - 7.983$ | $s^2 - 10.017s + 52.034$ | -0.613 |
| IX | $s - 7.995$ | $s^2 - 10.005s + 52.01$ | -0.1801 |
| X | $s - 7.999 \doteq s - 8$ | | |

$$F(s) = (s - 8)(s^2 - 10s + 52)$$

$$\therefore s = 8$$

$$\text{or } s = 5 \pm j3\sqrt{3}$$

ということになる。この例は多少収束するのが遅かったが、この他にもこの方法には問題となる点がある。これらを集めて見ると

- (i) この方法は容易に収束しない場合も多い。
- (ii) 一次の項がない場合には、定数項の因数を選んで第一近似根とする。
- (iii) 剰余が正負に振動するようなどときには求めた近似根を前回の近似根と算術平均して計算を進めるとよい。

3-3-3 四次方程式の近似解法

四次方程式の一般解法として知られている Ferrari の解法は、三次方程式の場合よりもさらに一段と繁雑で、ほとんど実用にならないので、ここでは偶数次方程式の近似解法として知られるリン (S. Lin) の解法を説明しておこうと思う。この方法は偶数次一般について可能であるが、実根を含む場合とか、二次式の定数項の値が近い値であるような場合にはなかなか収束しないという難点をもっているのである。

いま、一般式として、

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \dots\dots\dots (3-20)$$

を解く場合に、その第一近似因数として左辺の二次の項以下の式を考えるのである。

$$a_2s^2 + a_1s + a_0 \text{ から,}$$

$$\left(s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}\right)$$

を第1近似因数として、次のような割算を行い、この場合にも剰余がきわめて小さな値となるまで繰返して近似解を求める。

$$\begin{array}{r}
 s^{n-2} + \dots\dots\dots \\
 \hline
 s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} \left) s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots\dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 \right. \\
 \underline{s^n + a_1/a_2 \cdot s^{n-1} + a_0/a_2 \cdot s^{n-2}} \\
 \qquad \qquad \qquad \left(a_{n-1} - \frac{a_1}{a_2} \right) s^{n-1} + \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \hline
 \text{第二近似因数 } \left(s^2 + \frac{b_1}{b_2}s + \frac{a_0}{b_2} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \circ \quad b_2s^2 + b_1s + a_0 \\ \qquad \quad b_2s^2 + c_1s + c_0 \end{array} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{剰余} \longrightarrow (b_1 - c_1)s + (a_0 - c_0)
 \end{array}$$

第二近似因数以下は、このように割算の下から3行目の式を使って求めるのである。

(注) この方法にも、上に説明しように難点がある。

- (i) 実根のあるときは収束しにくいから別の方法で実根を求めた方がよい。
- (ii) 実根があつたり、定数項が接近しているなどのときには、剰余が正負大小に振動する。このときは、近似式の各係数をそれぞれ前回の近似式と平均しながら計算を進めるとよい。

【例題 3-8】

$s^4 + 3s^3 + 20s^2 + 34s + 32 = 0$ を解け。

第1近似因数として、終りの三項から、

$$s^2 + 34/20s + 32/20 = s^2 + 1.7s + 1.6$$

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad \qquad 1 \quad +1.3 + 16.19 \\
 \hline
 1 + 1.7 + 1.6 \left) 1 \quad +3 \quad +20 \quad +34 \quad +32 \right. \\
 \underline{1 \quad +1.7 + 1.6} \\
 \qquad \qquad \qquad 1.3 + 18.4 + 34 \\
 \qquad \qquad \qquad 1.3 + 2.21 \quad 2.08 \\
 \hline
 \left[\text{第二近似因数} \leftarrow \begin{array}{l} \circ \quad 16.19 + 31.92 + 32 \\ \qquad \quad 16.19 + 27.52 + 25.9 \end{array} \right. \\
 \left. \rightarrow s^2 + 1.97s + 1.98 \qquad \qquad \qquad \underline{4.40 + 6.1} \right.
 \end{array}$$

以下同様に計算した結果を示すと、

| | 近似因数 | 商 | 剰余 |
|-----|------------------------|-------------------------|------------------|
| II | $s^2 + 1.97s + 1.98$ | $s^2 + 1.03s + 15.99$ | $0.46s + 0.34$ |
| III | $s^2 + 1.999s + 2.001$ | $s^2 + 1.001s + 15.998$ | $0.017s - 0.012$ |

$$\text{IV } s^2 + 2.00006s + 2.00025$$

$$\doteq s^2 + 2s + 2$$

したがって

$$\text{原式} = (s^2 + 2s + 2)(s^2 + s + 16) = 0$$

$$\therefore s = -1 \pm j \text{ or } \frac{-1 \pm j\sqrt{63}}{2}$$

【例題 3-9】

$s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 22s + 5 = 0$ を解け。

この例は実根を含む場合で、上記の(注)(ii)の場合に相当する例である。計算の結果を整理したものについて説明してゆくことにしよう。

$$\text{第1近似因数} \quad s^2 + 1.57s + 0.36$$

$$\text{第2} \quad // \quad s^2 + 3.06s + 0.75$$

$$\text{第3} \quad // \quad s^2 + 4.66s + 1.18$$

$$\text{第4} \quad // \quad s^2 + 3.10s + 0.76$$

$$\text{第5} \quad // \quad s^2 + 4.66s + 1.18$$

となって、この例では、第2と第4、第3と第5がそれぞれほぼ等しい形であって、したがって、剰余も同様に大小を繰返すことになって、このままでは収束しないことになる。

このようなときには、(注)(ii)に示したように、各項ごとに平均をとって計算を進める。まず第2と第3を平均したものを第3'として

$$\text{第3'} \quad s^2 + 3.86s + 0.97$$

$$\text{第4b} \quad s^2 + 6.27s + 1.05$$

$$\text{第4'} \quad s^2 + 5.065s + 1.01$$

$$\text{第5b} \quad s^2 + 2.553s + 0.606$$

$$\text{第5'} \quad s^2 + 3.809s + 0.808$$

$$\text{第6b} \quad s^2 + 4.195s + 1.032$$

$$\text{第6'} \quad s^2 + 4.002s + 0.920$$

$$\text{第7b} \quad s^2 + 3.966s + 0.983$$

$$\text{第7'} \quad s^2 + 3.984s + 0.952$$

$$\text{第8b} \quad s^2 + 4.003s + 0.996$$

$$\text{第8'} \quad s^2 + 3.993s + 0.974$$

上記の計算では(b)は、割り算の結果で求めた近似因数、(')のついたものは(b)とその前の平均をとった因数で、この(')のついた式で割算を行うものである。以上の結果、近似因数は次第に $(s^2 + 4s + 1)$ に近づいてゆくことがわかる。結果として

$$\text{原式} = (s^2 + 4s + 1)(s^2 + 2s + 5) = 0$$

$$\therefore s = -2 \pm \sqrt{3} \text{ or } -1 \pm j2$$

この例は、二つの実根が含まれ、しかもその実根が一次式の形で分離しにくい形であるというように、近似計算が相当に困難な場合の例であった。

以上で本章の逆変換の基本的な方法に関係のある事柄の説明を終えたいが、実際の逆変換は、むしろ一般公式を利用することにその重点があるのである。このことについては、次の線形微分方程式の解き方の項で詳しく説明することにしよう。

【問 題 3-3】

1) 次の三次方程式を公式によって解け。

(i) $s^3 - 3s^2 - 8s - 10 = 0$

(ii) $s^3 - 10s^2 + 17s + 28 = 0$

(iii) $s^3 + 9s^2 + 9s + 8 = 0$

(iv) $s^3 + 14s^2 - 34s - 32 = 0$

(v) $s^3 + 2.5s^2 - 1.5s + 7 = 0$

(vi) $s^3 - 33s + 18 = 0$

2) ①の(ii)(iv)(vi)について、近似法によって1つの実根を求めて見よ。

3) 次の四次式を二次式の積に分解せよ。

(i) $s^4 - 5s^3 + 2s^2 + 14s + 28$

(ii) $s^4 - 3s^3 + 16s^2 - 17s + 33$

(iii) $s^4 + 6s^2 - 5s + 6$

(iv) $s^4 - 2s^3 + 6s^2 - 44s + 24$

(v) $s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2$

§ 4. 線形微分方程式の解き方

以上で、ラプラス変換および逆変換の基本的な事項については大よその説明を終えた。

すなわち、ラプラス変換と逆変換の意味と基本的な公式の導き方、公式の可逆的な使用方法、さらに分母の分解法とこれによる逆変換の可能性について、ほぼ理解していただけたことと思う。

巻末にある公式集の中の一般公式は、このような方法によって、一般的な形としてすでに作り上げられた式の一部であり、それらを逆変換に重点を置いて使いやすいように分類整理したものである。

これからは、いままでのような基本的な立場ではなく、公式を利用するという立場で考えてゆくことにしよう。

4-1 線形微分方程式

一般に微分方程式と呼ばれるものは、“変数関数およびその導関数の間の関係を示す方程式”のことであって、きわめて多くの形が考えられる。この中で特に次のような形をとるものを線形微分方程式と呼ぶ。

$$\frac{dx}{dt} + Ax = B \dots\dots\dots (4-1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A_1 \frac{dx}{dt} + A_2 x = B \dots\dots\dots (4-2)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots\dots + A_n x = B \dots\dots\dots (4-3)$$

ただし、 A 、 B は定数または t の関数であるものとする。これらの式の特徴としていえることは、 x およびその導関数について、そのすべてが一次であるということであって、たとえば、 x^3 とか $(dx/dt)^2$ というような項が含まれていれば、それは線形ではない。

電気工学とか力学などで取扱う微分方程式は、そのほとんど全部がこのような線形微分方程式であるといってもよいが、たとえば、歯車の遊びとか、電子素子の非直線性などを含めるときには線形微分方程式では表現できないし、非線形の式は一般的には解けないから、工学的な立場ではこのような場合にはアナログ計算機などを利用して、近似的な線形微分方程式に直して、近似解を求めることが多いのである。

ここでは、このような線形微分方程式を解くのに最も効果的であるといわれる、ラプラス変換の使用方法を順を追って具体的に説明しようと思う。

4-2 ラプラス変換による解法

この解法は、次のような順序で行う。

(イ) まず微分方程式の各項を項ごとに、基本公式によってラプラス変換する。

(ロ) 変換された X と s の方程式を整理して、 $X=F(s)$ の形にする。このことは線形微分方程式が x とその導関数についてすべて一次であることから容易なことである。

(ハ) さらに $F(s)$ の分母を分解し、公式が適用できるように変形する。

(ニ) 次に公式を適用して逆変換した上で、 t について整頓し、 $x=f(t)$ を求める。

以上の概要については1-3項で述べたがここでは、各項目についてさらに詳しくその手順を説明しよう。

4-2-1 線形微分方程式のラプラス変換

線形微分方程式をラプラス変換する場合には、(4-3)式などの A_r がきわめて特殊なものである場合を除いて、各項ごとに基本公式を適用すればよいので、基本公式の取扱いになれさえすれば大した困難はない。しかし A_r が特殊な場合には、相当に厄介なこともあり、その内の一部は §8. で少し触れてあるが、より高度の知識を必要とすることもある。しかし、工学的な問題ではそのような例はきわめて少ないといえよう。ここではまず一般的な例から説明してゆくことにしよう。

【例題 4-1】

$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 1$ をラプラス変換せよ。ただし $t=0$ で $x=1$, $dx/dt=2$ と

する。

第1項から順に変換して見ることにしよう。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X - s - 2 \quad \text{基本公式 VII-b}$$

$$\mathcal{L}\left[4\frac{dx}{dt}\right] = 4(sX - 1) = 4sX - 4 \quad \text{// VII-a}$$

$$\mathcal{L}[3x] = 3X$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \text{// I}$$

以上の中 $\mathcal{L}[3x]$ については、特に公式はないが、[例題2-2]の説明を読み返していただきたいと思う。要するに t の関数は、 x でも e でも i でも、 s 領域では大文字の X , E , I で表示するということである。

上記の4つの項を原式の符号に従って結び合わせると、

$$s^2X - s - 2 + 4sX - 4 + 3X = \frac{1}{s}$$

$$\therefore X(s^2 + 4s + 3) = \frac{1}{s} + 6 + s \dots\dots\dots(A)$$

ということになる。もう少し複雑な例を示すことにしよう。

【例題 4-2】

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-\frac{t}{2}}$$

をラプラス変換せよ。ただし $t=0$ で

$$x = -1 = \frac{dx}{dt} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2 \quad \text{とする。}$$

前例と同様に各項ごとに変換して見よう。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3x}{dt^3}\right] = s^3X + s^2 + s - 2 \quad \text{基本公式 VII-c}$$

$$\mathcal{L}\left[2\frac{d^2x}{dt^2}\right] = 2(s^2X + s + 1) \quad \text{VII-b}$$

$$\mathcal{L}\left[2\frac{dx}{dt}\right] = 2(sX + 1) \quad \text{VII-a}$$

$$\mathcal{L}[x] = X$$

$$\mathcal{L}[e^{-\frac{t}{2}}] = 2\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right] = \frac{2}{1+2s} \quad \text{IV}$$

これらを集めると、

$$s^3X + s^2 + s - 2 + 2s^2X + 2s + 2 + 2sX + 2 + X = \frac{2}{1+2s}$$

$$\therefore X(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = \frac{2}{1+2s} - 2 - 3s - s^2 \dots\dots\dots(B)$$

以上のような操作は、計算ミスさえ犯さなければ比較的簡単に行うことができることがわかっていただけたと思う。

ここで、このラプラス変換による解法の特徴について触れておきたいと思う。すでに気がついておられることと思うが、それは、一般の数学的な解法とか、他の方法たとえば、ヘビサイド法などでは、その大部分が、まず初期条件を別にして先に一般解を求め、その後初期値を入れて積分定数を算出した上で特別解を求める方法であるのに対して、ラプラス変換による解法では、上例のように始めから初期値を組入れて計算を行い、直接的に特別解を求める方法であるということである。

このことは、実用的に微分方程式を利用するときには、きわめて重要な意味をもつことであって、実際には一般解が得られただけでは役に立たないのである。数学の教科書などではその大部分が一般解が求められた段階で説明が終っており、特別解には触れられていない。基本的な数学の分野では、それで十分という判断に立ってのことであろうが、実はこのことが、応用する工学の分野で微分方程式が十分に活用されていないという現実を生み出しているように思われるのである。したがって、直接具体的な特別解を得ることができるこの方法の意義は大きいのである。

4-2-2 $X=F(s)$ の整理と逆変換の準備

前項で行ったラプラス変換の結果、(A)(B)のような式ができるが、これを $X=F(s)$ の形として、さらに一般公式が適用しやすいように変形整理することが必要である。このための手段は、代数式の変化と §3. で述べたような高次式の分解法などである。ここでは前項の例題をそのまま利用して話を進めようと思う。

〔(A)式の場合〕

(A)式を $X=F(s)$ の形に直すと

$$X(s^2+4s+3) = \frac{1}{s} + 6 + s = \frac{1+6s+s^2}{s}$$

$$\therefore X = \frac{1+6s+s^2}{s(s+1)(s+3)} \quad (A')$$

ここで巻末の一般公式を見ていただきたいと思う。本書ではすべての公式が

$$F(s) = \frac{(s \text{ の } k \text{ 次式})}{s^n (\text{一次式})^m (\text{二次式})^l} \dots\dots\dots (4-4)$$

の形に整理されており、しかも各因数式の定数項はすべて1という形になっている。

ラプラス変換に関する公式集の大部分は、最高次数の項の係数を1とする形で整理されているのに対して、本書の方式は多少異なっていることについて多少の説明が必要であるかも知れない。

主として数学的な立場からは s^n の最高次の係数を1としており、これを源流として、大部分の公式集がそれを踏襲していると考えられるのであるが、著者は工学的な立場から、定数項を1とする本書の方式の方がより実用的であると考えているのである。

その利点の一つは、たとえば §8. で説明する予定であるが、微分方程式の解である $x=f(t)$ について、その定常状態の値、つまり $t=\infty$ における x の値を求めることがしばしば必要となるがこれに利用される最終値の定理

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \dots\dots\dots (4-5)$$

では、 $F(s)$ に s を掛けて、 $s=0$ とおくことによって x の定常値が求まることになるが、

すべての定数が1となっていれば、すべての因数式は皆1となるから、きわめて簡単にその結果が求められることになる。このことは実用的にきわめて意義のあることで、反対の場合の初期値が求めやすいということとは比較にならないと考えられるのである。

ついでに、一般公式につけてある公式No.について、説明しておこう。

公式No.は4桁の数字と1つの文字から成り立っている。この数字は(4-4)式の k, l, m, n を順に並べたのであって、各次数(指数)を時計方向に順にとったと覚えていただくとよいのである。すなわち

| | | |
|------|---------------------------------|-----|
| 第1数字 | 分子の s の次数 (独立した s を除く) | k |
| 第2数字 | 分母の二次因数の数 | l |
| 第3数字 | 分母の一次因数の数 | m |
| 第4数字 | 分母の s の次数 (分子にあるときは $-n$) | n |
| 第5文字 | 同一No.内での区分を示す。 | |

再び(A')式に戻って、定数項を1の形に整理すると、

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+6s+s^2}{s(1+s)(1+s/3)} \dots\dots\dots (A-1)$$

この形で公式の適用が可能になるわけであるが、上記のNo.の方式に従ってNo.を見つけると、2021 ということになるので、一般公式集でこれに該当する部分を見ると、公式集としては、No.2021Aという式が正しくこの式に適合することがわかるのである。公式を適用するときは、1/3 を別にして計算した後にまた1/3をかければよいことはもちろんである。

〔(B)式の場合〕

$$X(s^3+2s^2+2s+1) = \frac{2}{1+2s} - 2 - 3s - s^2 = \frac{-s(7+7s+2s^2)}{1+2s}$$

$$\therefore X = \frac{-s(7+7s+2s^2)}{(1+2s)(1+2s+2s^2+s^3)} = \frac{-7s(1+s+2s^2/7)}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \dots\dots\dots (B-1)$$

この式の公式No.は(-2121)であるが、この程度の式でも公式集に準備されていないことも多い。そのような場合にはどうするかという問題も含めて、次の項で逆変換について説明しよう。

4-2-3 公式の適用について

前項までの手続きによって逆変換の準備が一応整ったところで、次は公式をいかにして

適用するかという問題に移ろう。

まず第1に必要なことは、該当する公式を見つけ出すことである。本書の巻末の公式は前項で説明した公式No.の順序に従って配列されているから、整理の終わった $X=F(s)$ について、(4-4)式の $k l m n$ によってNo.が見出されさえすれば、該当する公式を見つけ出すことは容易なことであろう。

公式No.の末尾の文字は、一次因数の形、二次因数の形などによって式の形が異なるものについてその区別をするため、一応の方式によってはいるが、見比べて見れば正しい公式を見つけることに大した困難はないと思う。

公式の量には限りがあることはわかってもらえることと思う。もちろん紙数に限りがないければかなり多くの公式を集めることもできるが、 $F(s)$ の形の多種多様なすべての場合についてこれをすべてカバーするようなことは到底無理な話である。したがって、公式のない場合が出て来るが、その場合にどうしたらよいかということが次の問題となるのである。その他二次因数の取扱いなど、項を改めて次節以降で説明しよう。

【問題 4-1】

次の微分方程式について、与えられた初期値を含めてラプラス変換し、整理した上で公式No.を見出せ（巻末になくてもよい）

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 1 \quad (x_0=1 \quad \dot{x}_0=-1)$$

$$2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t \quad (x_0=-1 \quad \dot{x}_0=1)$$

$$3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 4 \sin 2t \quad (x_0=1 \quad \dot{x}_0=0)$$

$$4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 4e^{-2t} \quad (x_0=1=\dot{x}_0)$$

$$5) \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 1 \quad (x_0=2=\dot{x}_0 \quad \ddot{x}_0=0)$$

$$6) \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 8x = t \quad (x_0=0 \quad \dot{x}_0=1=\ddot{x}_0)$$

$$7) \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad (x_0=1 \quad \dot{x}_0=-1=\ddot{x}_0)$$

$$8) \quad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 1 \quad (x_0=0=\dot{x}_0 \quad \ddot{x}_0=1 \quad \dddot{x}_0=-1)$$

ただし、 $t=0$ において

$$x=x_0 \quad dx/dt=\dot{x}_0 \quad d^2x/dt^2=\ddot{x}_0 \quad d^3x/dt^3=\dddot{x}_0 \quad \text{とする。}$$

4-3 公式による逆変換

まず、公式そのものを利用した逆変換の説明から始めることにしよう。

〔(A-1)式の場合〕

この式には、No.2021A がぴったりと合致する。並記して見よう。

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+6s+s^2}{s(1+s)(1+s/3)} \dots\dots\dots (A-1)$$

$$F(s) = \frac{1+as+bs^2}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \dots\dots\dots (2021A)$$

$$f(t) = 1 + \frac{b-aT_1+T_1^2}{T_1(T_2-T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{b-aT_2+T_2^2}{T_2(T_2-T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$$

この $f(t)$ 式の第二、第三項の分子は公式集では M_1, M_2 となっているのであるが、記号表から拾って、特に説明のために置き戻してある。

逆変換をするには、(A-1)式と公式の $F(s)$ の式とを対比させて、各文字の数値を見つけ出して、これらを $f(t)$ の式に代入すればよいのである。

$$a=6 \quad b=1 \quad T_1=1 \quad T_2=1/3$$

まずこれらを代入する場合の手法として、始めから全体の式に数値を入れてゆくのはきわめて下手であって、まず、各区分ごとに計算したものを最後に全体の式に組入れて計算をすべきである。以下その手法によって、

$$M_1 = b - aT_1 + T_1^2 = 1 - 6 + 1 = -4$$

$$M_2 = b - aT_2 + T_2^2 = 1 - 2 + 1/9 = -8/9$$

$$T_2 - T_1 = -2/3$$

$$\frac{M_1}{T_1(T_2-T_1)} = \frac{-4}{1 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = 6 \quad \frac{M_2}{T_2(T_2-T_1)} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right)} = 4$$

$$\therefore 3f(t) = 1 + 6\varepsilon^{-t} - 4\varepsilon^{-3t}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{3} + 2\varepsilon^{-t} - \frac{4}{3}\varepsilon^{-3t}$$

となる。この際、原式の $1/3$ を忘れないように注意しなければならない。

これで 例題4-1の微分方程式が、ラプラス変換を利用して解けたことになる。次に二次因数を含む場合の例について説明をしよう。

【例題 4-3】

次の微分方程式を解け。ただし $x_0 = 0 = \dot{x}_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 1$$

まずラプラス変換から始めよう。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X \quad \mathcal{L}\left[2\frac{dx}{dt}\right] = 2sX$$

$$\therefore s^2X + 2sX + 2X = \frac{1}{s}$$

$$\therefore X = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s(1 + s + s^2/2)}$$

公式は No. 0101A である。公式を示すと

$$F(s) = \frac{1}{s(1 + 2d s/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)} \dots\dots\dots (0101A)$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d}$$

この外、記号表によれば $D = \sqrt{1-d^2}$ である。

二次因数の場合には、 ω_1 と d とが問題である。ここでいう二次因数はもちろん実根はなく、複素根または純虚根をもつものであり、このような場合には振動性をもつことはすでに知っていることである。この ω_1 は一般に固有振動数、 d は制動比と呼ばれる。 ω_1 の単位は $\omega_1 = 2\pi f$ であることから、radian/sec であることに注意しなければならない。

また d については、実根のときは $d > 1$ 、等根のときには $d = 1$ となるようになるから、そのときは一次式に分解すべきであり、公式は別なものを使わなければならない。

前例と同様に、まず係数を比較して ω_1 と d を求めることから始める。まず ω_1 から

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \omega_1 = \sqrt{2}$$

$$\frac{2d}{\omega_1} = 1 \quad \therefore d = \frac{\omega_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D = \sqrt{1-d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad d\omega_1 = 1, \quad \omega_1 D = 1$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d} = \tan^{-1} \frac{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} = \tan^{-1} \frac{1}{-1} = 135^\circ$$

$$\therefore 2f(t) = 1 + \sqrt{2} \varepsilon^{-t} \sin(t - 135^\circ)$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{-t} \sin(t - 135^\circ)$$

となる。以上の計算の中で、誤りを犯しやすいきわめて重要な点を指摘しておこう。

その1つは ϕ の求め方についてである。一般の逆三角関数において、おそらく、

$$\phi = \tan^{-1} x$$

について、その定義域は $-\infty < x < \infty$ であり、その主値は $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ というこゝで覚えていることと思う。この場合には

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{-1} = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$$

という誤りを犯しやすいのである。大切なことは、ここでの ϕ は位相角であって、

$$\tan \phi = y/x$$

であることを確認しておくことである。

図4-1 を見てほしい。図に示すようにここでは、明らかに

$$\frac{y}{-x} \neq \frac{-y}{x}$$

なのであって、これを等しいとおけば、図のように 180° の差を生ずることになるのである。要するに逆三角関数の分母と分子は別々に計算しなければならないということである。

もう一つの注意事項は、 $\omega_1 Dt$ (ここでは単に t) の角度の単位が、radian であるということを忘れてはならないということである。つまり、解の中の $(t-135^\circ)$ という式の中には、実は二つの角度の単位が混在しているのである。一般にこのようにしてあるので、本書でもその例に従っているが、正確に書けば計算上便利な角度法に統一して

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin\left(\frac{180^\circ}{\pi} t - 135^\circ\right)$$

とするのがよい。この関数のカーブを描く計算をするときなどは、この形でなければいけない。

ここで次に(B-1)式について逆変換を行って見るべきであろうが、この式はかなり複雑であり、公式集によってはこの程度の公式を収容していない場合もある。本書の場合には一応収録してあるが、もしない場合にはどうするかという次項の例題として利用して見ようと思う。

【問題 4-2】

1) 次の各 $F(s)$ を逆変換せよ。

(i)
$$F(s) = \frac{2}{s(1+s)(1+2s)}$$

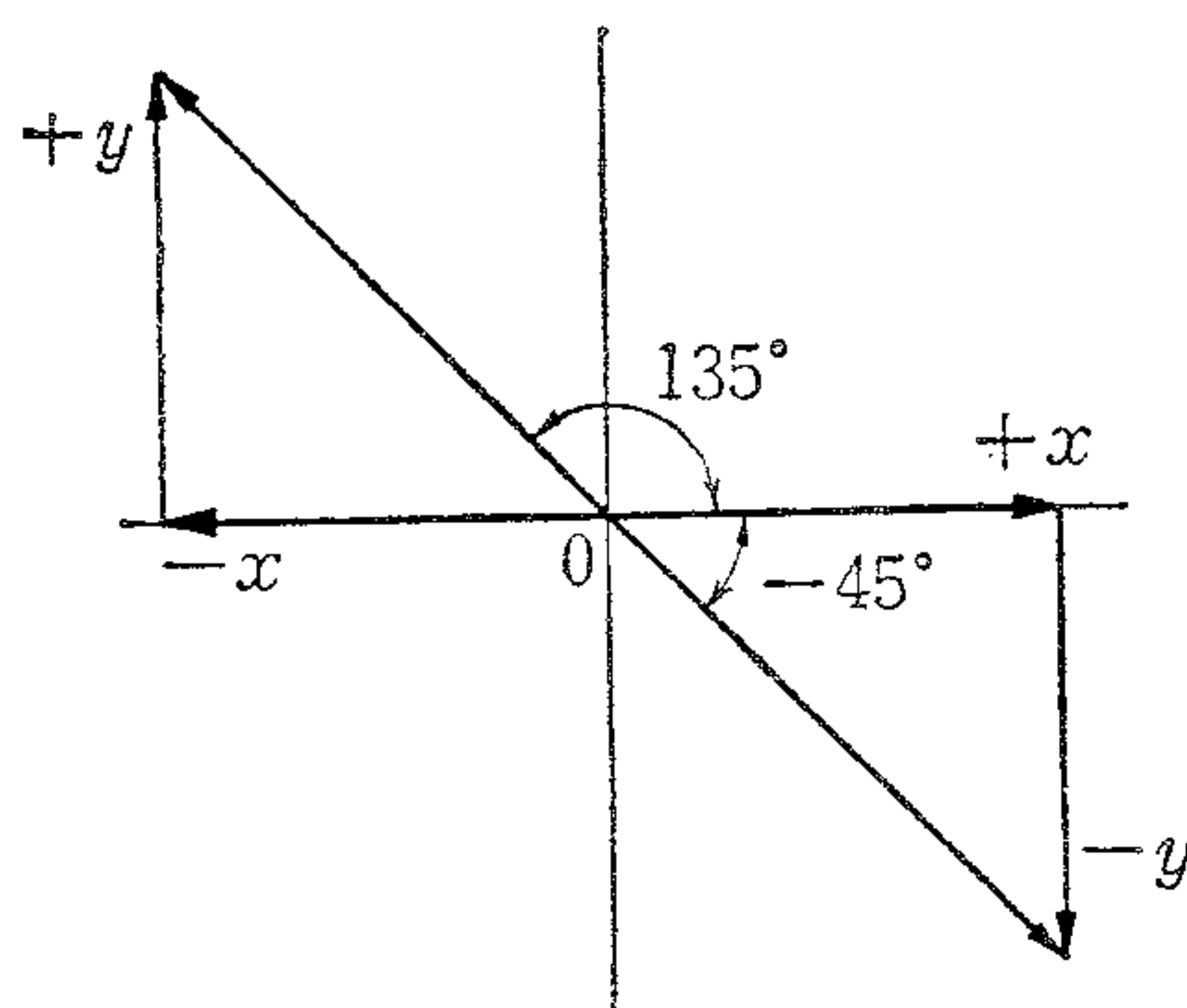


図 4-1

$$(ii) \quad F(s) = \frac{1}{s(1+s+0.25s^2)}$$

$$(iii) \quad F(s) = \frac{5}{(1+0.5s)(1+s+s^2)}$$

$$(iv) \quad F(s) = \frac{1}{s^2(1+0.25s^2)}$$

$$(v) \quad F(s) = \frac{1-s}{s(1+2s)(1+2s+2s^2)}$$

$$(vi) \quad F(s) = \frac{s}{(1-s)(1+4s+8s^2)}$$

2) 問題4-1 の, 1), 4), 7) の解を逆変換して, 微分方程式の解を求めよ。

4-4 公式のない場合の逆変換

$F(s)$ の式が複雑になれば, 一般にそのすべてに対して公式を用意することはとても不可能である。しかし, 原則的には 3-1 項で述べたような部分分数分解法を使えば, 基本公式によって逆変換ができるはずなので, 一般的な関数については逆変換が不可能であるということはない。しかし, 部分分数分解法によって細かく分解してしまうことはまったくもって繁雑であって, また基本公式で逆変換した結果を集約するのも容易なことではないのである。ここで説明しようとするものは, もう少し要領よく, 適当に処理を行う方法であって, その大要は,

“分子を適宜に区分, 加減して, 部分的に約分できる形として, 式を二つ~三つに区分する方法”
である。

早速, 例題の (B-1) 式について, この方法を応用して見よう。

$$X = \frac{-s(7+7s+2s^2)}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \dots\dots\dots (B-1)$$

(注) 分割するためには, 定数をくり出す前の方がよい。

まず, 分子をそれと同じ次数 (ここでは 3 次) の分母の因数式で割って見る。たとえば

$$-\frac{2s^3+7s^2+7s}{s^3+2s^2+2s+1} = -\left(2 + \frac{3s^2+3s-2}{s^3+2s^2+2s+1}\right)$$

少しまわりくどいようだが, 十分に理解してもらうために, このことの意味を示すと, (B-1) 式は次のように書き替えられるということなのである。

$$\begin{aligned} X &= \frac{-2(1+2s+2s^2+s^3)}{(1+2s)(1+2s+2s^2+s^3)} - \frac{3s^2+3s-2}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \\ &= \frac{-2}{1+2s} - \frac{3s^2+3s-2}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \end{aligned}$$

この式の第2項についても同じことができることは容易にわかることと思う。

$$\begin{aligned}\therefore X &= -\frac{2}{1+2s} - \frac{3}{(1+2s)(1+s)} + \frac{5}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \\ &= X_1 + X_2 + X_3\end{aligned}$$

とおけば

$$X_1 = -\frac{2}{1+2s} \quad \text{公式 No. 0010}$$

$$X_2 = -\frac{3}{(1+2s)(1+s)} \quad \text{0020 A}$$

$$X_3 = \frac{5}{(1+2s)(1+s)(1+s+s^2)} \quad \text{0120 A}$$

となるから、これらを別に逆変換して合成すればよいのである。少し繁雑であるが、例題として一応解をまとめて見ることにしよう。

$$x_1 = -\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$$

は直ちに求められる。

X_2 は No. 0020 A において、

$$T_1=2 \quad T_2=1$$

とおくと、

$$-\frac{x_2}{3} = \frac{1}{2-1} \left(\varepsilon^{-\frac{t}{2}} - \varepsilon^{-t} \right)$$

$$\therefore x_2 = 3\varepsilon^{-t} - 3\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$$

X_3 は No. 0120 A において

$$T_1=2 \quad T_2=1 \quad \omega_1=1 \quad d=1/2$$

$$D = \sqrt{3}/2 \quad d\omega_1=1/2 \quad \omega_1 D = \sqrt{3}/2$$

$$A_1 = 1 - 2 + 4 = 3$$

$$A_2 = 1 - 1 + 1 = 1 \quad \sqrt{A_1 A_2} = \sqrt{3}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{T_1 \omega_1 D}{1 - T_1 d \omega_1} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1-1} = 90^\circ$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{T_2 \omega_1 D}{1 - T_2 d \omega_1} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}/2}{1-1/2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 150^\circ$$

$$\therefore \frac{x_3}{5} = \frac{4}{3} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{-1} \varepsilon^{-t} + \frac{\varepsilon^{-\frac{t}{2}}}{3/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 150^\circ\right)$$

$$\therefore x_3 = \frac{20}{3} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} - 5 \varepsilon^{-t} + \frac{10}{3} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - 150^\circ\right)$$

$$\therefore x = \frac{8}{3} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} - 2 \varepsilon^{-t} + \frac{10}{3} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - 150^\circ\right)$$

ということになる。

この例は分子に s の式が存在する場合であった。当然、次の例のように分子に s の式がないときにはどうするのかという疑問が出てくることが想像される。しかし、これも次のように処理すれば問題はないことである。

【例題 4-4】

$$F(s) = \frac{2}{s(1+s)(1+3s)(1+2s+2s^2)} \text{ を逆変換せよ。}$$

この式は公式 No. 0121A に該当するから、公式によって直ちに解けるが、ここでは分解手段の説明例として、まず分解して見よう。

その方法の要点は、分子に s の式がない場合には、分母の因数のうち約分したいものを分子に作って、その不足分を負の形で示すことである。まずやってみよう。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2(1+2s+2s^2) - 2(2s+2s^2)}{s(1+s)(1+3s)(1+2s+2s^2)} \\ &= \frac{2}{s(1+s)(1+3s)} - \frac{4}{(1+3s)(1+2s+2s^2)} \\ &= X_1 - X_2 \quad \text{とおく。} \end{aligned}$$

この例は、一寸うまく行きすぎであるが、方法はわかってもらえると思う。逆変換して見ることにしよう。

X_1 は No. 0021A において

$$T_1=1, \quad T_2=3$$

とおけば、

$$\frac{1}{2} x_1 = 1 + \frac{1}{3-1} (\varepsilon^{-t} - 3\varepsilon^{-\frac{t}{3}})$$

$$\therefore x_1 = 2 + \varepsilon^{-t} - 3\varepsilon^{-\frac{t}{3}}$$

X_2 は No. 0110A において、

$$T=3, \quad \omega_1=1/\sqrt{2} \quad d=1/\sqrt{2}$$

$$D=1/\sqrt{2} \quad d\omega_1=1/2 \quad \omega_1 D=1/2$$

$$A=1-3+9/2=5/2$$

$$C=1-3/2=-1/2$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C} = \tan^{-1} \frac{3/2}{-1/2} = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \doteq 108.43^\circ$$

$$\therefore \frac{x_2}{4} = \frac{3/2}{5/2} \varepsilon^{-\frac{t}{3}} + \frac{1/\sqrt{2} \varepsilon^{-\frac{t}{2}}}{1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/2}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 108.43^\circ\right)$$

$$\therefore x_2 = \frac{12}{5} \varepsilon^{-\frac{t}{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 108.4^\circ\right)$$

$$\therefore x = x_1 - x_2 = 2 + \varepsilon^{-t} - \frac{27}{5} \varepsilon^{-\frac{t}{3}} - \frac{4\sqrt{10}}{5} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 108.43^\circ\right)$$

となる。最初にことわったように、この式は No. 0121A でも直接解けるから、上記の計算の検算の意味でそのままもう一度逆変換して見ることにしよう。

$$T_1=1 \quad T_2=3 \quad \omega_1=1/\sqrt{2} \quad d=1/\sqrt{2}$$

$$A_1=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad A_2=1-3+\frac{9}{2}=\frac{5}{2}$$

$$C_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad C_2=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1 D}{C_1} = \tan^{-1} \frac{1/2}{1/2} = 45^\circ$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{T_2\omega_1 D}{C_2} = \tan^{-1} \frac{3/2}{-1/2} = \tan^{-1} \frac{3}{-1} = 108.43^\circ$$

$$\phi_3 = \tan^{-1} \frac{D}{-d} = \tan^{-1} \frac{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} = 135^\circ$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 180^\circ + 108.43^\circ = 288.43^\circ$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 1 + \frac{1/2}{1/2 \times (3-1)} \varepsilon^{-t} + \frac{27/2}{5/2 \times (1-3)} \varepsilon^{-\frac{t}{3}}$$

$$+ \frac{\varepsilon^{-\frac{t}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 288.43^\circ\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-t} - \frac{27}{10} \varepsilon^{-\frac{t}{3}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 108.43^\circ\right)$$

$$\therefore x = 2 + \varepsilon^{-t} - \frac{27}{5} \varepsilon^{-\frac{t}{3}} - \frac{4\sqrt{10}}{5} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}t - 108.43^\circ\right)$$

となって、当然のことであるが解が一致する。このように一致するのは当然のことではあるが、実際上は必ずしも一致しないことがしばしば出てくるのである。その原因は三角関数であって、分解を行うときに結果として二次因数を含む式が二つ以上あれば、当然二つ以上の三角関数が出て来ることになる。三角関数の合成は、その取扱い能力がきわめて大

きくないと、そう簡単には合成できないので結果が異なってくることになる。このことは、さらに $f(t)$ のカーブを描く計算の複雑さにも関係することになる。

分割計算を行う場合の最大の注意は、分母に二次因数を含む項を極力少なくするようにすることである。つまり二次因数に着目して、できるだけそれが約分されるように考えてゆくことである。

以上の外にも、公式のない場合の手段が考えられないことはないが、以上の方法をマスターすれば、たいいていの関数の逆変換が可能となるはずである。

【問題 4-3】

- 1) 問題4-1の, 2), 3), 5), 6), 8) の関数を逆変換せよ。
- 2) 次の各 $F(s)$ を逆変換せよ。

$$(i) \quad F(s) = \frac{2+2s+2s^2+s^3}{s(1+s)(1+2s)(1+s+s^2)}$$

$$(ii) \quad F(s) = \frac{1+s+s^2+s^3}{(1+s)^2(1+2s)(1+s+s^2)}$$

$$(iii) \quad F(s) = \frac{1}{s(1+2s)(1+4s)(1+s^2/4)}$$

$$(iv) \quad F(s) = \frac{1}{s(1+s)^2(1+s/2)^2(1+s^2)}$$

§ 5. 電気工学における利用

電気工学といっても、実際にラプラス変換を多用する分野はたとえば電気回路学とかパルス関係、制御工学など微分方程式を頻繁に取扱わなければならない分野に限定される。

この意味では、他の力学系工学、すなわち機械、土木、建築などの分野でも相当に広い応用面があるといえよう。しかし、本書の目的とか著者の能力から考えて、他の分野について多くの説明をすることは差控えたいが、微分方程式を解くという共通の目的のためには、この電気工学の例を学んでいただくことも決して無駄ではないと考える。

ここでは、まず電気工学の中でも特に有効にラプラス変換が利用される場合の中で、いくつかの例を挙げて、その利用方法とか、特に問題となる点などについて説明をすることにしよう。電気回路についての知識の不足の場合についても、何とか理解していただけるよう専攻者にとってはややくどいと思われる程度のことから話を始めてある。

5-1 電気回路の過渡現象

電気回路学は電気工学の基礎的な部分であって、その内容もきわめて広汎である。最も基本的な直流回路に始まり、正弦波を取扱う交流回路、回路網学、歪波形の問題、パルス回路、制御回路、などその他広い範囲にわたっている。

一般には、まず直流回路から始められる。これは中学の理科でまず取上げられ、高校ではある程度の回路計算も行われるのである。

したがって、電気工学ではこの直流回路についてはきわめて簡単に取扱った上で、交流回路、歪波形などに進んでゆくようである。しかし、相当の学生が、次の過渡現象の部分で消化不良を起こしてしまうように考えられるのである。このことは教育を行う側に責任があると思うが、その大きな原因は微分方程式を解くことの不なれ、これに基づく一種の拒絶反応にあると考えられる。

電気工学という学問は、以前から工学というよりは物理学の色合いが濃く、応用数学の利用も積極的に行ってきたと思われる。しかし、このため逆に工学としての主体性を見失い、工学の学生に理学や応用数学を押しつけて、ことさら内容を難解にしてきたようにも考えられる。

たとえば、ベクトル解析などの十分な理解が必要な電磁理論とか、マトリクス計算の能力がかなり必要な4端子理論などは、電気工学の一部の分野でしか必要ではなく、大部分の学生にとって、それが全体に対する消化不良の原因となるようなものであるにもかかわらず、全部の学生にそれを強要して来たことは十分に再考の余地があると思われるのである。

る。

やや横道にそれたが、ついでにもう一つの問題にも触れておくと、現在の工学部における数学教育は、数学としての立場が強すぎると考えられるということである。このことは、考えようによっては制度上やむを得ないことであるかも知れないのであるが、工学を学ぼうとする学生にとってはプラスにはならないように思われるのである。

限られた時間の中で、たとえそれが、広い範囲の数学という学問の中での工学に関連の深い一部分であるとしても、相当に多数の問題項目を羅列説明するという形式をとることはあまり意味のないことのように考えられるのである。たとえば線形微分方程式については、工学の分野ではきわめて重要な事項であるにもかかわらず、特殊な手段でしか解けないような数多くの微分方程式の中の一項目としてしか取扱われていないと思うが、これも困ったことであると考えるのは思いすごしであろうか。

相当に横道に深入りした。しかし、このことは、上述のように線形微分方程式を解くことに不なれであるために、過渡現象を境として電気回路学などに消化不良を起こす相当数の学生がいるという事実について教育を行う側の責任を省みたものである。このことは、振動の問題を境にして消化不良を起こす力学系工学についても、同じことがいえるのではないかと思う。

前章までで読者はすでにラプラス変換を利用して線形微分方程式を解くことの大要をマスターしたのであるから、もはや過渡現象などの問題で壁につき当るようなことはないはずである。

5-1-1 回路方程式

まずはっきりしておきたいことは、過渡現象を考える場合の回路と、そうでない普通の回路との関係である。結論的にいえば両者の回路は同じものであって、特に区別して考える必要はないということであり、スイッチSとか、これに代る電子素子が入っていたとしてもどうということもない。

回路問題として取扱う場合には、端的に言って、スイッチが on ならばSを短絡した回路を考えればよく、off ならば、そのスイッチを含むブランチ（枝路）を取外して考えればよいのである。

図5-1 を見てほしい。図5-1(a) は一般回路問題の回路であり、(b) はSが入っているということで、過渡現象の問題と考えられようが、問題として考えるときの区別は、

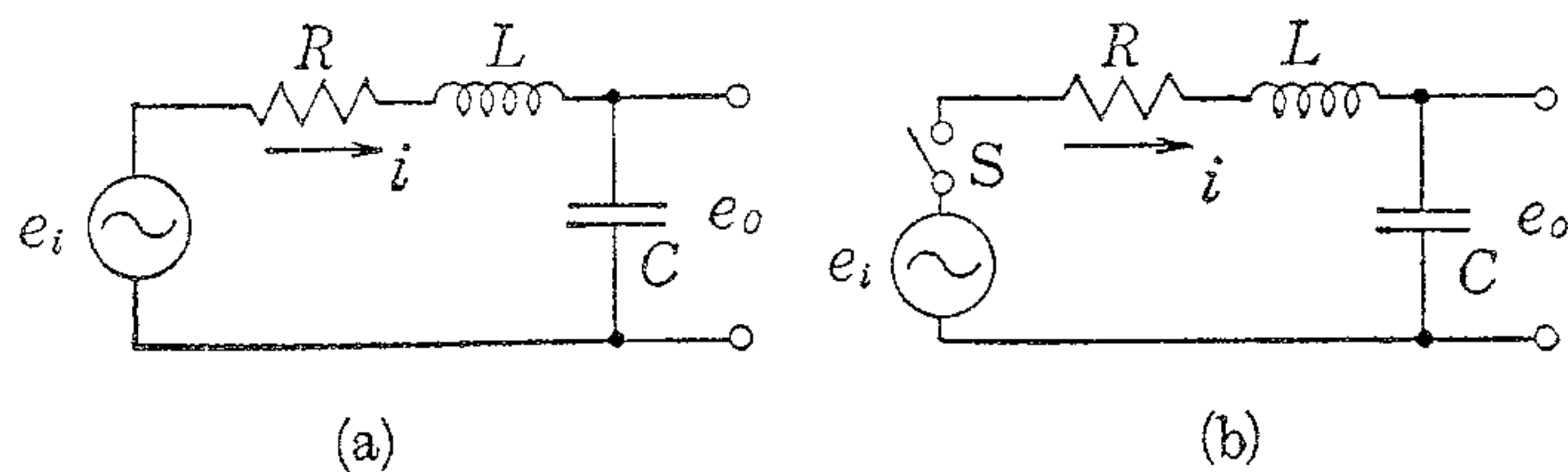


図 5-1

(a)では定常状態になった後の問題を考える場合であるのに対して、(b)は定常状態になる以前の経過を主として考えるのである。したがって、まず(b)においてスイッチSを on にしてしばらくの間は過渡現象であり、相当に時間がたてば(a)と同じことなるということである。

高校までの知識によって、すでに抵抗 R のみの回路における電圧 E と電流 I との関係については、電気工学専攻以外の読者も知っておられることと思う。このことについて、例のオームの法則を思い出してほしい。多分オームの法則として、“電流は電圧に比例する”という形で覚えていることと思う。式としては、

$$E = R I$$

という形であったはずである。そして $R I$ という[オーム×アンペア]≡[Ω×A]が、電圧降下と呼ばれ、ボルト[V]の単位で示されたことを思い出されるであろう。

電気回路の問題を考えるときには、この R と I の積を逆起電力と呼ぶのであるが、これは、回路が定常化した場合、さらには変化中であっても、その一瞬間においては、加えた電圧＝起電力と逆起電力は等しいという、回路の平衡についての考え方に基づく呼び方である。一般に

$$\text{起電力} = \text{逆起電力} \dots\dots\dots (5-1)$$

というのが回路方程式の基本であって、直流の場合のオームの法則、交流回路でのキルヒホッフの法則(第Ⅱ法則)を含むものである。

電磁気学の知識によって、電流の増加は抵抗によっては Ri 、インダクタンス L によっては、 $L di/dt$ 、コンデンサ C によっては $1/C \int idt$ という逆電力によって妨げられることになるので、直流回路が取扱えるならば、 Ri だけの場合の代りに、これら三つをまったく同じように取扱って式を作れば、過渡現象を取扱うことができるのである。

過渡現象より先に交流回路を学ぶのが普通であるために、その場合の逆起電力である $j\omega Li$ とか $i/j\omega C$ とかを優先して考えるという傾向が強いが、これは正弦波の場合の特例にすぎないものであることに注意を要するのである。つまり、

$$i = I_m \sin \omega t$$

とおけば、

$$L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{\omega C} I_m (-\cos \omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$$

ここへ複素表示を導入して $\pm 90^\circ$ に対して $\pm j$ を対応させれば、

$$L \frac{di}{dt} = j\omega Li \quad \frac{1}{C} \int idt = \frac{i}{j\omega C}$$

となることがわかるであろう。以上のような各逆起電力を整理すれば、表5-1 のようになる。

表 5-1 逆 起 電 力

| 区 分 | R | C | L | M |
|-----------|------|------------------------|-------------------|---------------------|
| 直 流 回 路 | Ri | — | — | — |
| 交 流 回 路 | Ri | $i/j\omega C$ | $j\omega Li$ | $j\omega Mi_2$ |
| 過渡現象その他一般 | Ri | $\frac{1}{C} \int idt$ | $L \frac{di}{dt}$ | $M \frac{di_2}{dt}$ |

これらの逆電力は、すべて電流の方向と逆向き（ M の場合を除く）に発生することになる。

したがって、回路方程式を作るに際しては、電流の方向を規定しなければならない。回路が図5-1のように簡単であればまったく問題はないが、複雑な回路の場合には少々面倒である。

電流の方向は自分で好きなように規定してよいのである。一般には一つの閉じた回路、つまりループごとにそのループ電流を定める方法が多く用いられているが、著者の経験からすれば、各枝路、ブランチごとに電流を定めた方が誤りが少ないと考えるので、以下はその方法によって説明を進めることにしよう。この方法だと、キルヒホッフの第1法則（結合点の電流の代数和は0である）を自動的に組入れてゆくことになるので、方程式としては(5-1)式の形のものだけでよいことになる。

たとえば図5-2の回路では、縦のブランチの3つについて、 i_1 、 i_2 、 i_3 を定めれば他のブランチの電流は、キルヒホッフ第1法則によって自動的に定まることを示しているのである。

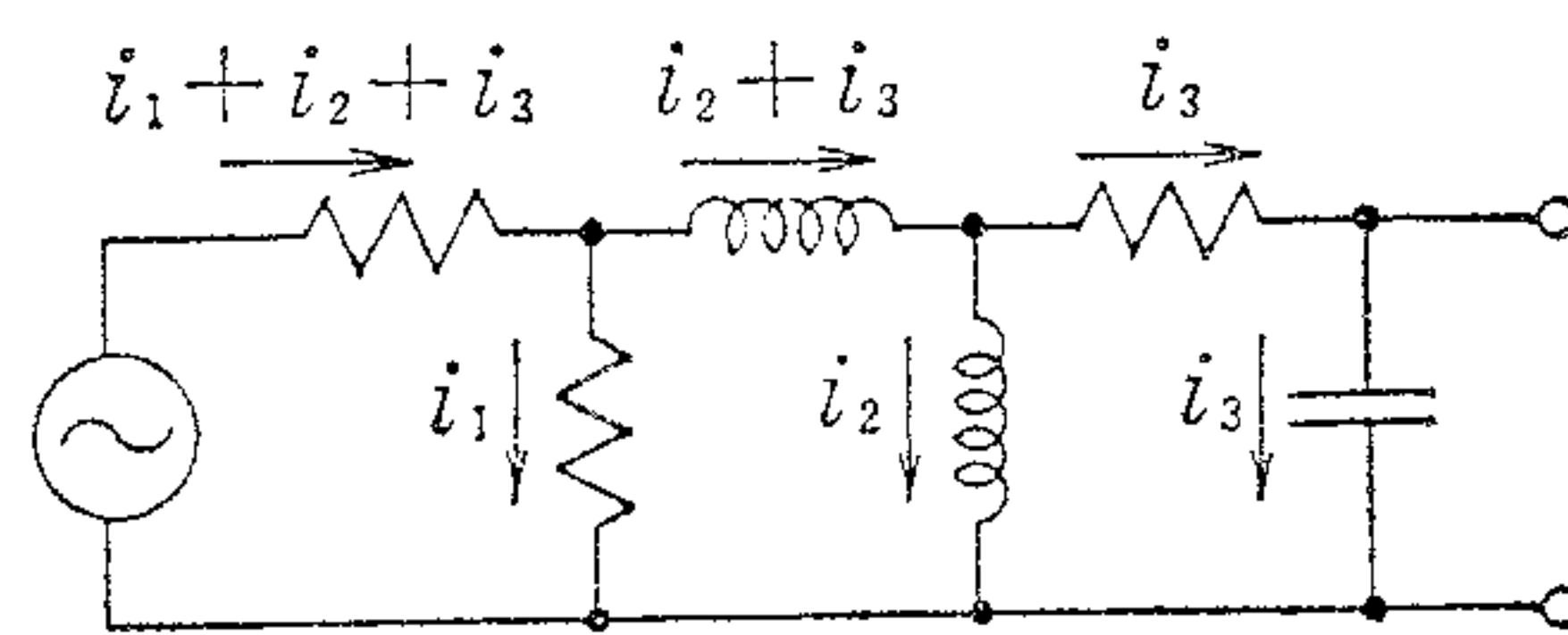


図 5-2

回路の問題を解くのに必要な方程式の数は、以上のようにして定めた必要最少限の電流の数と同じだけあればよいことになる。図5-2の回路では合計6つのループが考えられるが、式は3つあればよいし、また余分に作ったとしても、結果として同じ式ができるだけであって意味はないのである。

方程式を作る要件としては

- i) なるべく複雑なブランチを少なく使って、
- ii) しかし必ず一回はすべてのブランチを使って、
- iii) 電流の数だけの式を作ればよい。

以上のことは、直流、交流、過渡現象などすべての回路に共通のことあって、これらの

ことがマスターされていれば、回路学の初歩でつまづくなどということは考えられない。
過渡現象の本題に戻ろう。

【例題 5-1】

図5-3の回路で、 $t=0$ において、 S を閉じたとき、電流 i 、
出力電圧 e_o を表わす式を求めよ。

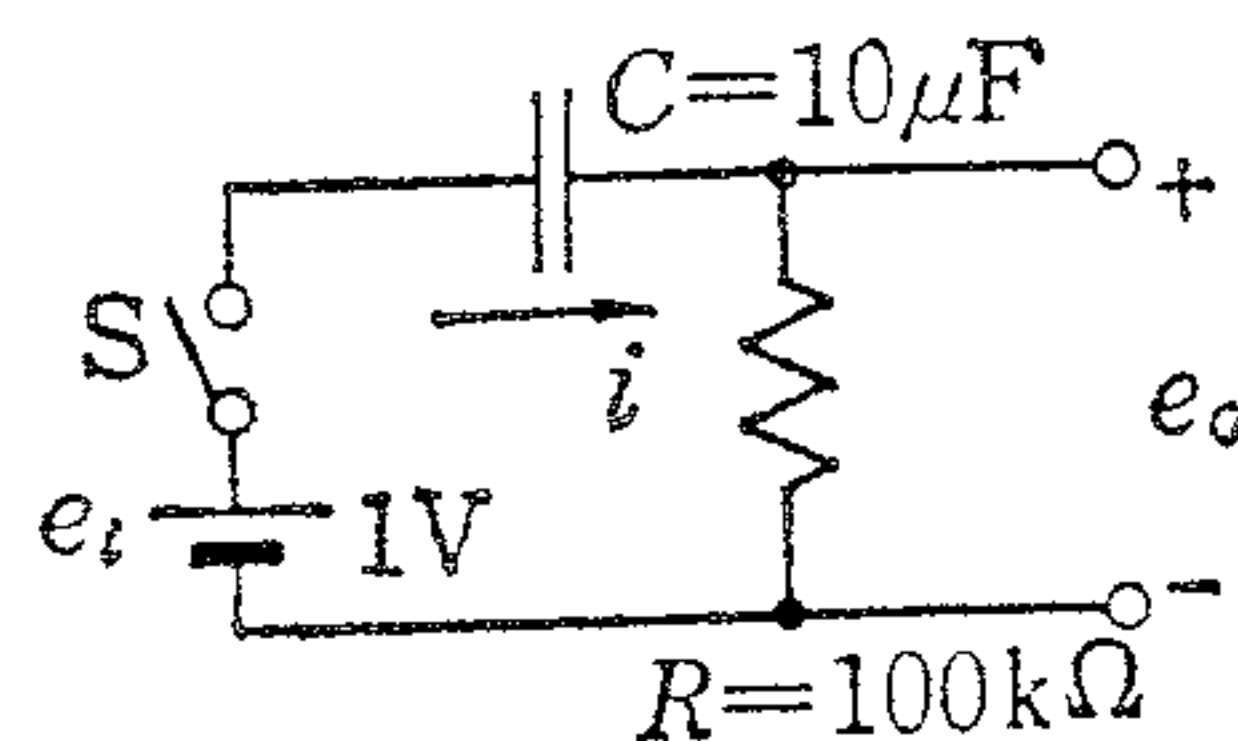


図 5-3

この問題は過渡現象の最初の問題として、広く使われているものである。しかし、大部分の教科書では最初からラプラス変換を利用しないから、本書とは別な方法で解いているようであるが、本書では始めからラプラス変換を使ってゆくことにする。

S が閉じられた回路について、(5-1)式に相当する式を作れば、

$$e_i = \frac{1}{C} \int i dt + Ri$$

$$e_i = 1[\text{V}] \quad e_o = Ri$$

コンデンサに残留電荷がないものとして、ラプラス変換すれば、

$$\frac{1}{s} = \frac{I}{sC} + RI = \frac{1+sCR}{sC} I$$

$$\therefore I = \frac{C}{1+sCR}$$

$$\therefore E_o = RI = \frac{CR}{1+sCR}$$

両者とも、公式 No. 0010 によって

$$i = C \cdot \frac{1}{CR} \varepsilon^{-\frac{t}{CR}}$$

$$e_o = \varepsilon^{-\frac{t}{CR}}$$

$$C = 10 \mu\text{F} = 10^{-5}\text{F} \quad R = 100\text{k}\Omega = 10^5\Omega$$

$$\therefore i = 10^{-5} \varepsilon^{-t} \quad [\text{A}]$$

$$e_o = \varepsilon^{-t} \quad [\text{V}]$$

この例はきわめて簡単なものであるから、 C 、 R 、の数値はどこで代入しても大差はないが、一般には逆変換の前に代入しないと計算がややこしくなることが多い。

本項の目的は方程式の作成であったので、項を改めてやや複雑な場合を考えて見よう。

5-1-2 やや複雑な回路の過渡現象

前項の例題はきわめて簡単な例であったから、特にラプラス変換でなくてもそうたいしたこともなしに解くことができるが、以下に示すような少し複雑な回路になれば、ラプラス変換を使う有利さが明確になってくると思う。

【例題 5-2】

図5-4の回路で、 $t=0$ においてSを開じたとき e_o の式を求めよ。

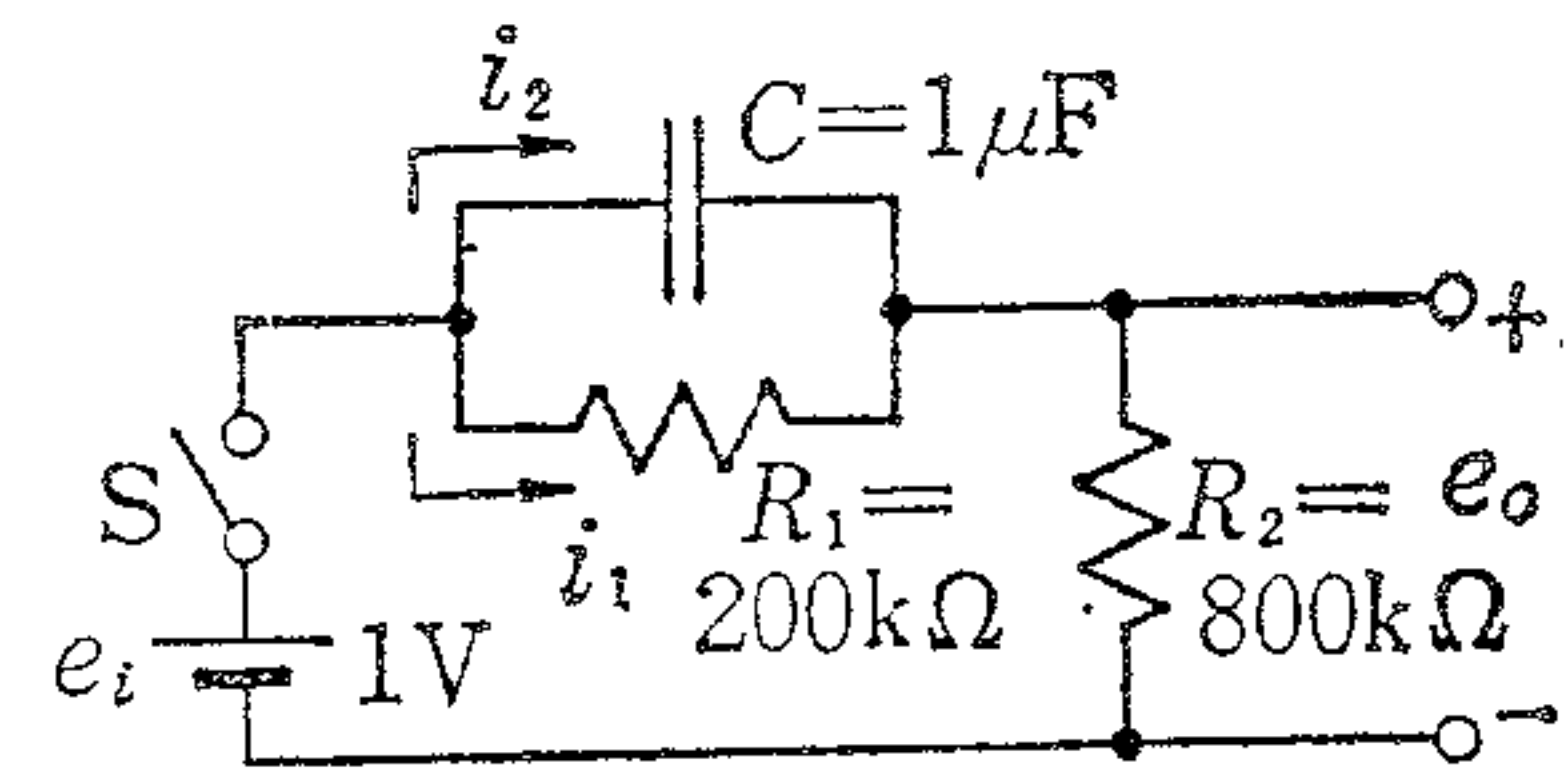


図 5-4

この回路は、前例の回路のコンデンサに並列抵抗が加えられただけである。しかしその重要な意味は、式が二つ必要になり、連立方程式となることである。

i_1 と i_2 を図のように定めると、 R_2 を流れる電流は当然下向きに (i_1+i_2) である。

$$\begin{cases} e_i = R_1 i_1 + R_2 (i_1 + i_2) \\ R_1 i_1 = \frac{1}{C} \int i_2 dt \end{cases}$$

このような、並列抵抗を含むコンデンサの初期電荷は普通0としてよい。ラプラス変換を行うと、

$$\begin{cases} \frac{E}{s} = R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_2) = (R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_2 \\ R_1 I_1 = \frac{I_2}{sC} \quad \therefore I_2 = sCR_1 I_1 \end{cases}$$

代入して、

$$\frac{E}{s} = [(R_1 + R_2) + sCR_1 R_2] I_1$$

$$\therefore I_1 = \frac{E}{s(R_1 + R_2 + sCR_1 R_2)}$$

ところが

$$e_o = e_i - R_1 i_1$$

だから、

$$E_o = \frac{E}{s} - R_1 I_1 = \frac{R_2 + sCR_1 R_2}{s(R_1 + R_2 + sCR_1 R_2)} E$$

ここで、 $E=1$ $R_1=0.2 \times 10^6$ $R_2=0.8 \times 10^6$ $C=10^{-6}$ を代入すれば、

$$E_o = \frac{0.8(1+0.2s)}{s(1+0.16s)}$$

公式 1011 において,

$$a=0.2 \quad T=0.16 \quad \text{とおけば.}$$

$$\frac{e_o}{0.8} = 1 + \frac{0.2-0.16}{0.16} \varepsilon^{-\frac{t}{0.16}} = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^{-6.25t}$$

$$\therefore e_o = 0.8 + 0.2 \varepsilon^{-6.25t}$$

となる。この解を見れば、大してむずかしいことではないと感じたことと思う。もう一題解いて見よう。

【例題 5-3】

図5-5の回路で、 $t=0$ でSを閉じたときの e_o の式を求めよ。ただし $e_{c0}=0$ とする。

回路の形は前例の場合とほぼ同じであるが、この場合には L が含まれるので式の形は少し複雑になってくる。

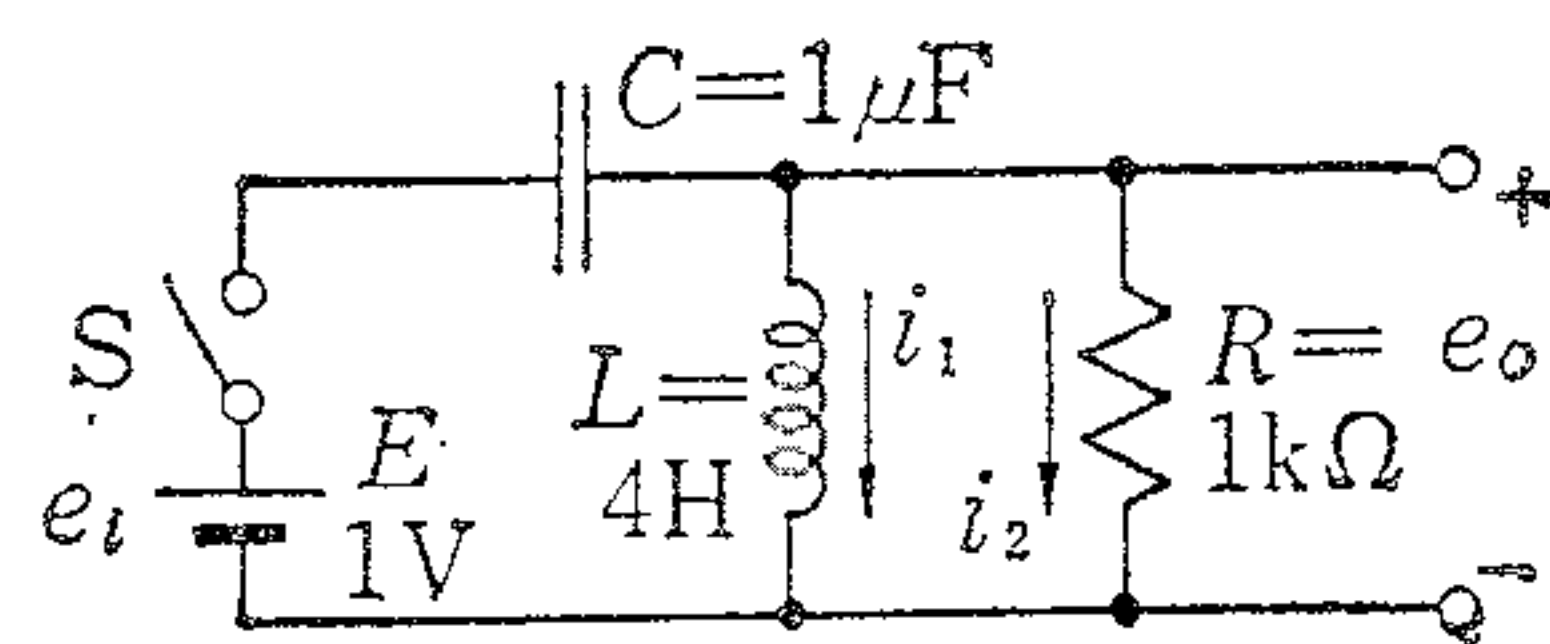


図 5-5

$$\begin{cases} e_i = \frac{1}{C} \int (i_1 + i_2) dt + Ri_2 \\ L \frac{di_1}{dt} = Ri_2 \quad e_o = Ri_2 \end{cases}$$

$e_{c0}=0$ だから、ラプラス変換して、

$$\begin{cases} \frac{E}{s} = \frac{I_1 + I_2}{sC} + RI_2 \\ sLI_1 = RI_2 \end{cases}$$

変形して、

$$\begin{cases} CE = I_1 + (1 + sCR)I_2 \\ I_1 = \frac{R}{sL}I_2 \end{cases}$$

代入して、

$$CE = \left(\frac{R}{sL} + 1 + sCR \right) I_2$$

$$\therefore I_2 = \frac{sLCE}{R + sL + s^2LCR}$$

$$\therefore E_o = RI_2 = \frac{sLCE}{1 + sL/R + s^2LC} \quad \text{ここで,}$$

$E=1$ $R=10^3$ $L=4$ $C=10^{-6}$ を代入すれば,

$$E_o = 4 \times 10^{-6} \times \frac{s}{1 + 4s/10^3 + 4s^2/10^6}$$

$$= 4 \times 10^{-6} \times \frac{s}{(1 + 2s/10^3)^2}$$

この式は、公式-0021Bに相当する。いま公式で、 $T=2/10^3$ とけば、

$$\frac{e_o}{4 \times 10^{-6}} = \left(\frac{10^3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{10^3} - t\right) \varepsilon^{-\frac{10^3}{2}t}$$

$$= \frac{10^9}{8} \left(\frac{2}{10^3} - t\right) \varepsilon^{-500t}$$

$$\therefore e_o = 500 \left(\frac{1}{500} - t\right) \varepsilon^{-500t}$$

$$= (1 - 500t) \varepsilon^{-500t}$$

となる。この例は回路定数があまり複雑にならないように選ばれているが、一般にはもっとややこしい数字となるし、この例のように分母が等根の形となることはまれであり、二実根のときは-0021A、虚根のときは-0101Aで逆変換しなければならないことになる。

もう少し複雑になる例を考えて見よう。

【例題 5-4】

右の回路で、 $t=0$ でSを閉じたときの e_o の式を求めよ。

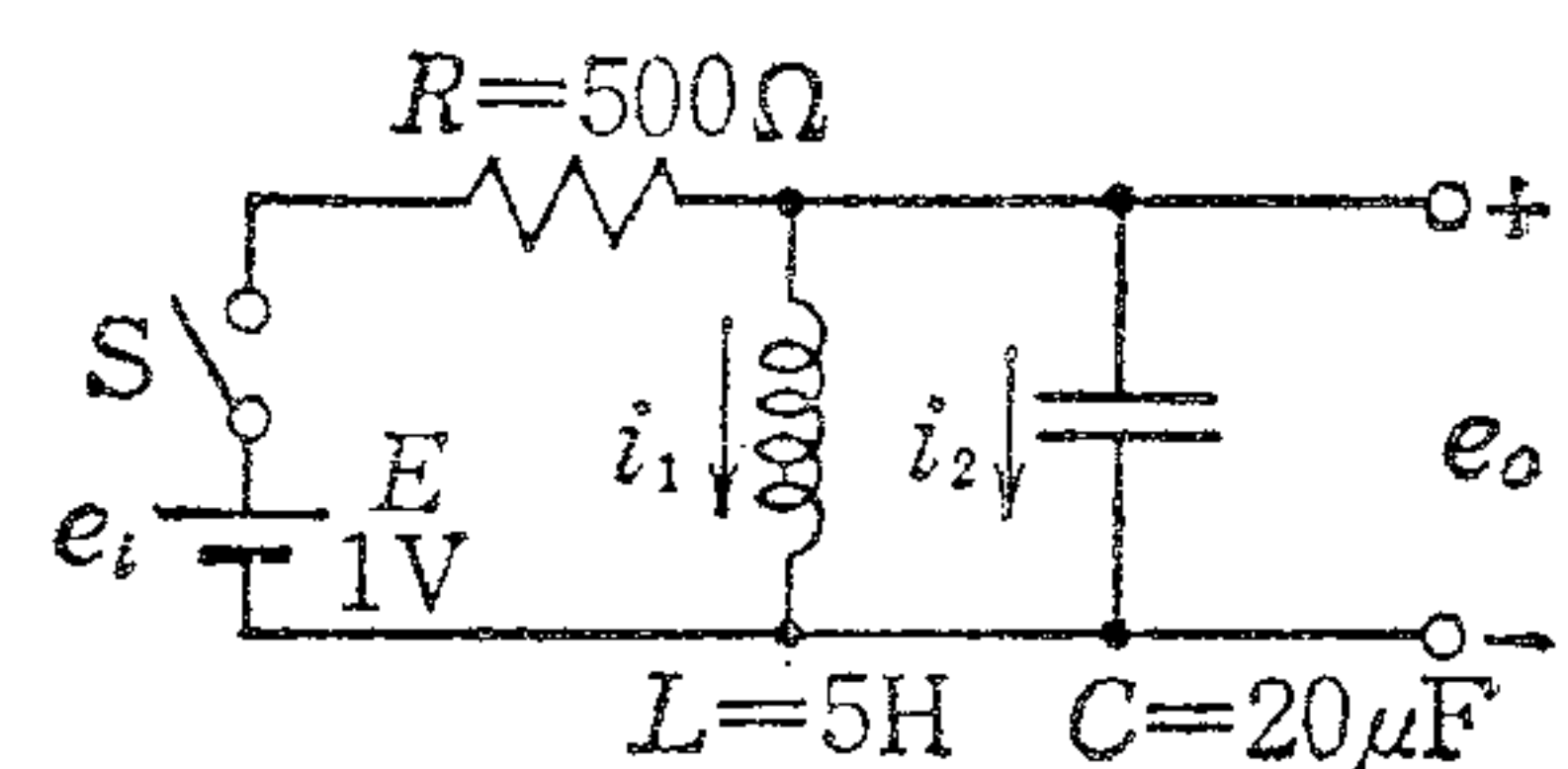


図 5-6

これも前例の組合わせの変更にすぎない。

$$\begin{cases} e_i = R(i_1 + i_2) + L \frac{di_1}{dt} \\ L \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{C} \int i_2 dt = e_o \end{cases}$$

この場合も $e_{C_0} = 0$ としてラプラス変換すれば

$$\begin{cases} \frac{E}{s} = R(I_1 + I_2) + sLI_1 \\ sLI_1 = \frac{I_2}{sC} = E_o \end{cases}$$

変形して、

$$\frac{E}{s} = (R + sL)I_1 + RI_2$$

$$I_2 = s^2 L C I_1$$

代入して,

$$\frac{E}{s} = (R + sL + s^2 LCR) I_1$$

$$\therefore I_1 = \frac{E}{s(R + sL + s^2 LCR)}$$

$$E_o = sL I_1 = \frac{LE}{R + sL + s^2 LCR}$$

$$= \frac{LE}{R} \cdot \frac{1}{1 + sL/R + s^2 LC}$$

ここで, $E=1$ $R=500$ $L=5$ $C=2 \times 10^{-5}$ を代入して見ると,

$$E_o = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 + s/100 + s^2/10^4}$$

公式 0100 A に該当するから, 公式において, $\omega_1=100$ $d=1/2$ を見出せば,

$$100e_o = \frac{100}{\sqrt{3}/2} \varepsilon^{-50t} \sin 50 \sqrt{3} t$$

$$\therefore e_o = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon^{-50t} \sin 50 \sqrt{3} t$$

5-1-3 初期値を含む回路の場合

初期値を含む場合は, ラプラス変換の効果が特に発揮されるものであるが, この場合初期値の代入方法が大切であり, 十分に注意をする必要がある。

早速例題によって考えて見よう。

【例題 5-5】

右の回路において, $t=0$ で S を開いたときの e_o の式を求めよ。ただし, $I_o=10\text{mA}$ $E_{co}=2\text{V}$ とする。

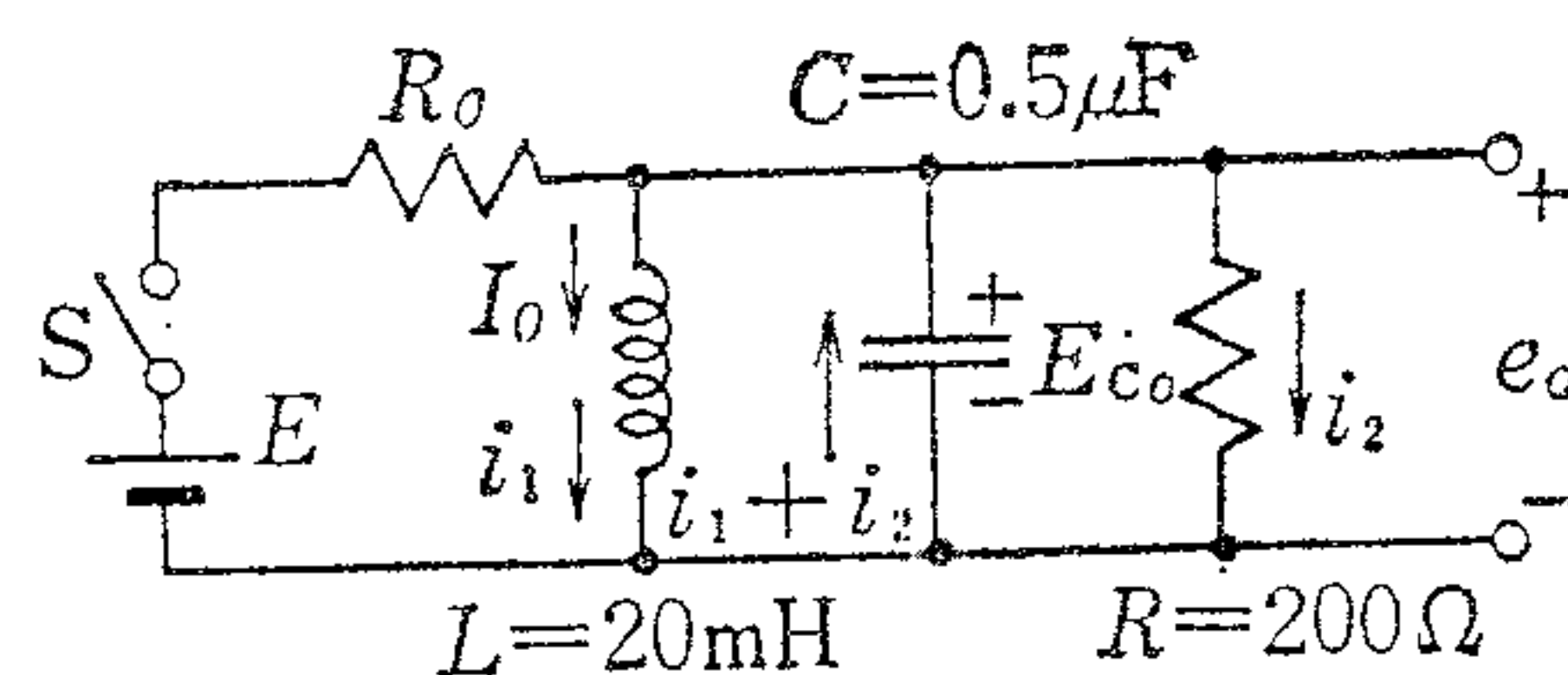


図 5-7

いままでの例では, S を閉じる場合についてだけ考えてきたが, S 開いたときは, 前述したように S を含むブランチを除外して式を作ればよいので, 別に変ったことはない。しかしここでは, L に対する初期電流 I_o , C の初期電圧 E_{co} をどう取扱うかが問題である。

いま, この回路で S が開かれたとすれば, 電源を含む左端のブランチは考える必要がないから, 図に定めた i_1 と i_2 について, 二つの式が得られればよいことになる。中央のブ

ランチの電流 i_1+i_2 の向きに注意して、

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} = Ri_2 = e_0 \\ \frac{1}{C} \int (i_1+i_2) dt + Ri_2 = 0 \end{cases}$$

この式をラプラス変換する場合には、基本公式 VII-a, VIII-a によって初期値を入れることになるが、ここでその方法について少しだけ説明を加えておこう。

L の初期電流 I_0 については、公式 VII-a によって L を定数とすれば、

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = sLI_1 - LI_0 \dots\dots\dots (5-2)$$

となるので、これは比較的理解しやすい。ただし i_1 は任意に方向が決められるので、もしも i_1 と I_0 の向を逆に定めたりすれば、 I_0 を負として取扱わなければならないのである。

C の初期電圧 E_{C_0} については少し問題がある。公式 VIII-a によれば、

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

これに対し、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int i dt\right] &= \frac{1}{C} \left[\frac{I}{s} + \frac{(s \int i dt)_{t=0}}{s} \right] \\ &= \frac{I}{sC} + \frac{Q_0}{sC} \dots\dots\dots (5-3) \end{aligned}$$

ということになるが、ここでは一般に

$$Q_0 = \left[\int i dt \right]_{t=0}$$

という初期値は与えられておらず、与えられているのは大部分の場合電圧である。コンデンサの電圧は、ご承知のとおり

$$e_C = \frac{Q}{C} \dots\dots\dots (5-4)$$

であるので、初期電圧を代入するときには C をも含めて置きかえなければならないのである。

そしてこの場合にも、電流 (i_1+i_2) の方向と電圧の向きによって、 Q_0 の正負を考えなければならない。 Q_0 はそれを充電するための電流の方向 (この例では下向き) と i_1+i_2 の向きが反対であれば、(この例の場合に相当) Q_0 したがって E_{C_0} は負で代入しなければならないのである。したがってこの例では、

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int (i_1+i_2) dt\right] = \frac{I_1+I_2}{sC} - \frac{E_{C_0}}{s} \dots\dots\dots (5-5)$$

でなければならないのである。

本題に戻って、(5-2) 式と (5-5) 式によってラプラス変換をして見よう。

$$\begin{cases} sLI_1 - LI_0 = RI_2 = E_0 \\ \frac{I_1 + I_2}{sC} - \frac{E_{C_0}}{s} + RI_2 = 0 \end{cases}$$

変形して、

$$\begin{cases} I_1 = \frac{RI_2 + LI_0}{sL} \\ CE_{C_0} = I_1 + (1 + sCR)I_2 \end{cases}$$

代入して、

$$\begin{aligned} CE_{C_0} &= \frac{RI_2 + LI_0}{sL} + (1 + sCR)I_2 \\ &= \frac{(R + sL + s^2LCR)I_2 + LI_0}{sL} \end{aligned}$$

$$\therefore I_2 = \frac{sLCE_{C_0} - LI_0}{R(1 + sL/R + s^2LC)}$$

$$\therefore E_0 = RI_2 = -LI_0 \cdot \frac{1 - sCE_{C_0}/I_0}{1 + sL/R + s^2LC}$$

ここで、 $E_{C_0} = 2$ $I_0 = 10^{-2}$ $R = 200$ $L = 2 \times 10^{-2}$ $C = 5 \times 10^{-7}$ を代入すると、

$$E_0 = -2 \times 10^{-4} \left(\frac{1 - 10^{-4}s}{1 + s/10^4 + s^2/10^8} \right)$$

これは、公式 1100 A に相当する。公式において、 $a = -10^{-4}$ $\omega_1 = 10^4$ $d = 1/2$

$$D = \sqrt{3}/2 \quad d\omega_1 = 5000 \quad \omega_1 D = 5000\sqrt{3} \quad Q = 1 - ad\omega_1 = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$

$$R = 1 - 2ad\omega_1 + a^2\omega_1^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_1 D}{Q} = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}/2}{3/2} = \tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ$$

$$\therefore \frac{e_0}{-2 \times 10^{-4}} = 10^4 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \varepsilon^{-5000t} \sin(5000\sqrt{3}t - 30^\circ)$$

$$\therefore e_0 = -4\varepsilon^{-5000t} \sin(5000\sqrt{3}t - 30^\circ)$$

ということになるのである。

5-1-4 特殊な入力を加える場合

以上の例では、Sによって開閉する起電力はすべて直流電源であった。(大部分1Vの電池であったが、大きさには関係はない)

しかし、入力は常に直流であるとは限らないし、また直流でない場合についても、解を求めることができなければならないはずである。

理論的にはきわめて多様な入力考えられるが、ここではその一、二の例について説明することにしたい。入力の中には、正弦波とかその他の振動入力も考えられる。一般の家庭用などの電気器具についても、きわめて頻りにスイッチの開閉が行われているが、詳細に見ればそのたびに過渡現象が起こっているはずであるが、実際にはほとんど問題にされることはなく、定常的な回路計算だけが行われているにすぎない。このことは、交流を取扱う大部分の場合に過渡現象を厳密に計算する必要がないということと、また一方で、三角関数を含む入力の場合の位相角の取扱いが大層厄介であり、計算がしにくかったということもあると考えられる。

まず別な入力の例として、図5-8のような斜向電圧を加える場合を考えて見よう。

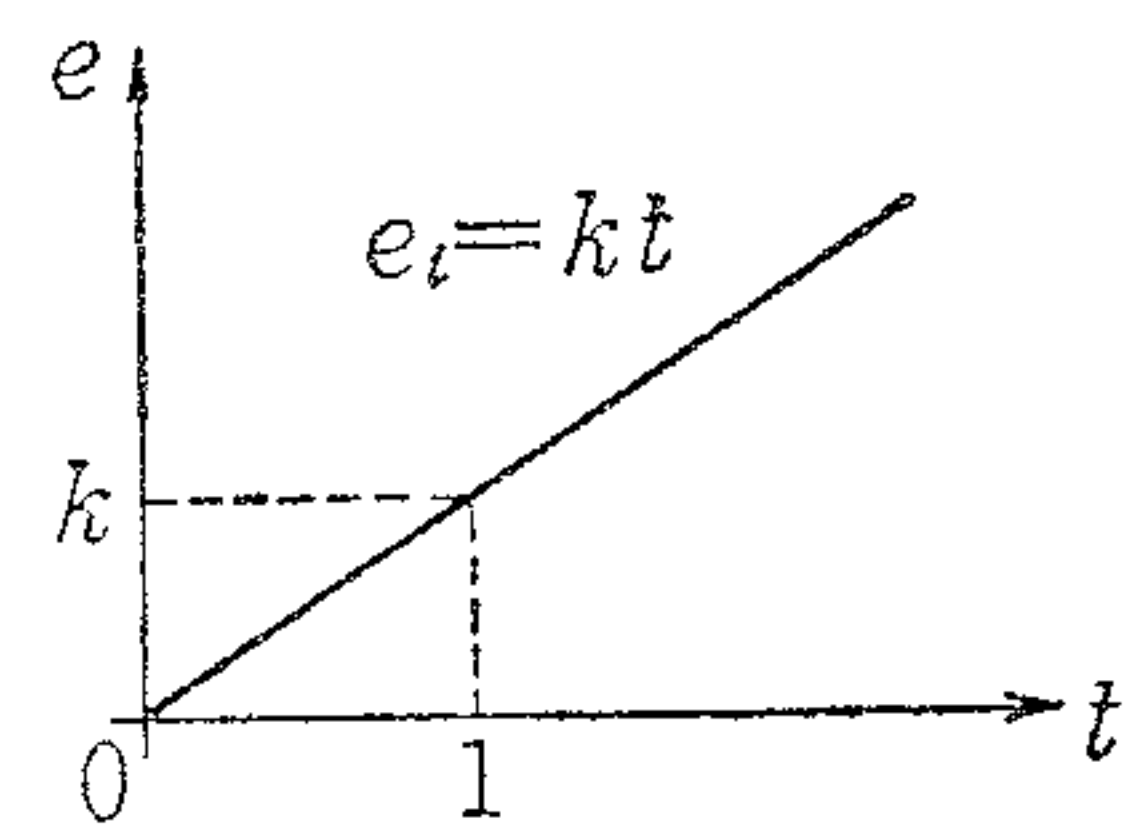


図 5-8

$$e_i = kt$$

$$\mathcal{L}[e_i] = E_i = \frac{k}{s^2} \dots\dots\dots (5-6)$$

これを入力とする例題を解いて見よう。

【例題 5-6】

右の回路で、 $t=0$ でSを閉じたとき、 $e_i = kt$ として e_o の式を求めよ。

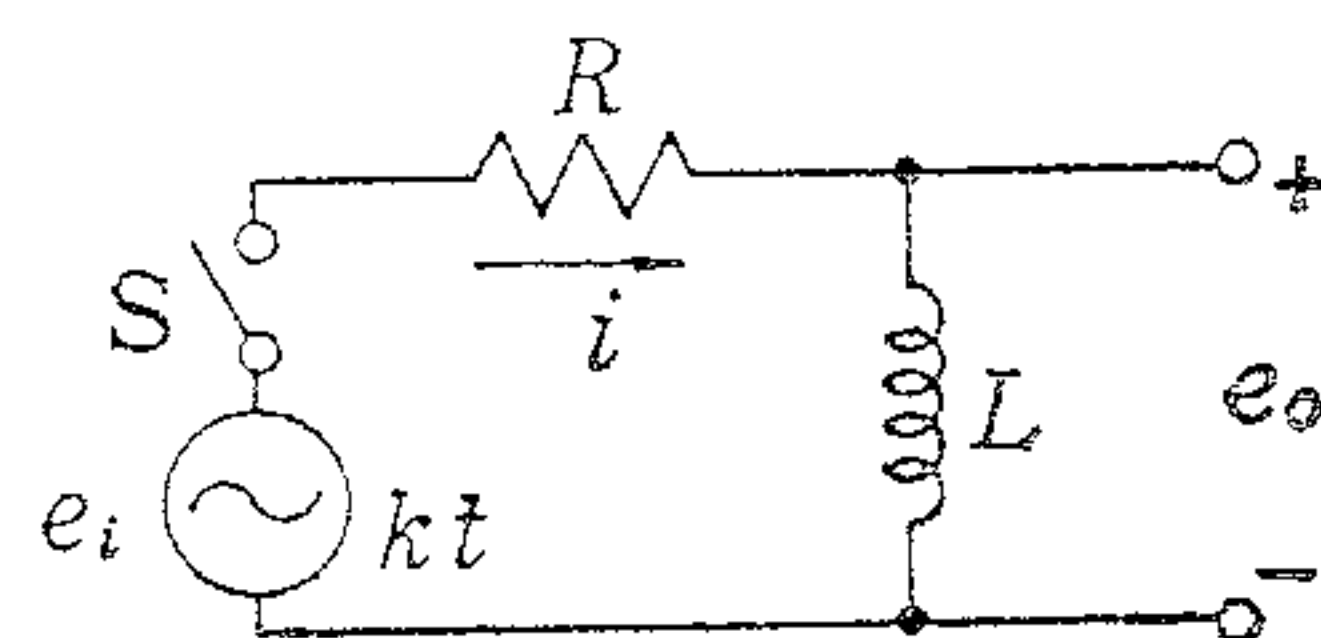


図 5-9

式の作り方や処理の仕方は前の例と同じことであるから、

$$e_i = Ri + L \frac{di}{dt} \quad e_o = L \frac{di}{dt}$$

$$E_i = RI + sLI \quad E_o = sLI$$

ここで少し変わった取扱いをして見ることにしよう。上の両式を両辺割り算すると、

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{sLI}{RI + sLI} = \frac{sL}{R + sL}$$

この式は、一般に伝達関数と称される形の式であって、入力に対する出力の比だから、入力の如何には関係ないこの回路特有の関数であって、この式に入力 E_i を代入すれば、常にその入力に対応する出力を求めることができるものである。この伝達関数については次節で改めて取上げることにする。

この式で、入力として (5-6) 式の関数を代入して見ると、

$$E_o = \frac{k}{s^2} \cdot \frac{sL}{R + sL} = \frac{kL}{Rs(1 + sL/R)}$$

公式 0011 において、 $T = L/R$ とおけば、

$$\frac{R}{kL}e_o = 1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\therefore e_o = \frac{kL}{R} (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t})$$

となり、別に大したことはないことがわかっていただけたと思う。

次に指数関数入力の場合を考えて見よう。指数関数の中には上昇飽和形のものと下降減衰形のものと二通りあって、何れの形の入力も考えられるが、ここでは前者の場合の例を考えて見ることにしよう。

【例題 5-7】

例題 5-6 において、入力を図5-10のようなものとしたときはどうか。

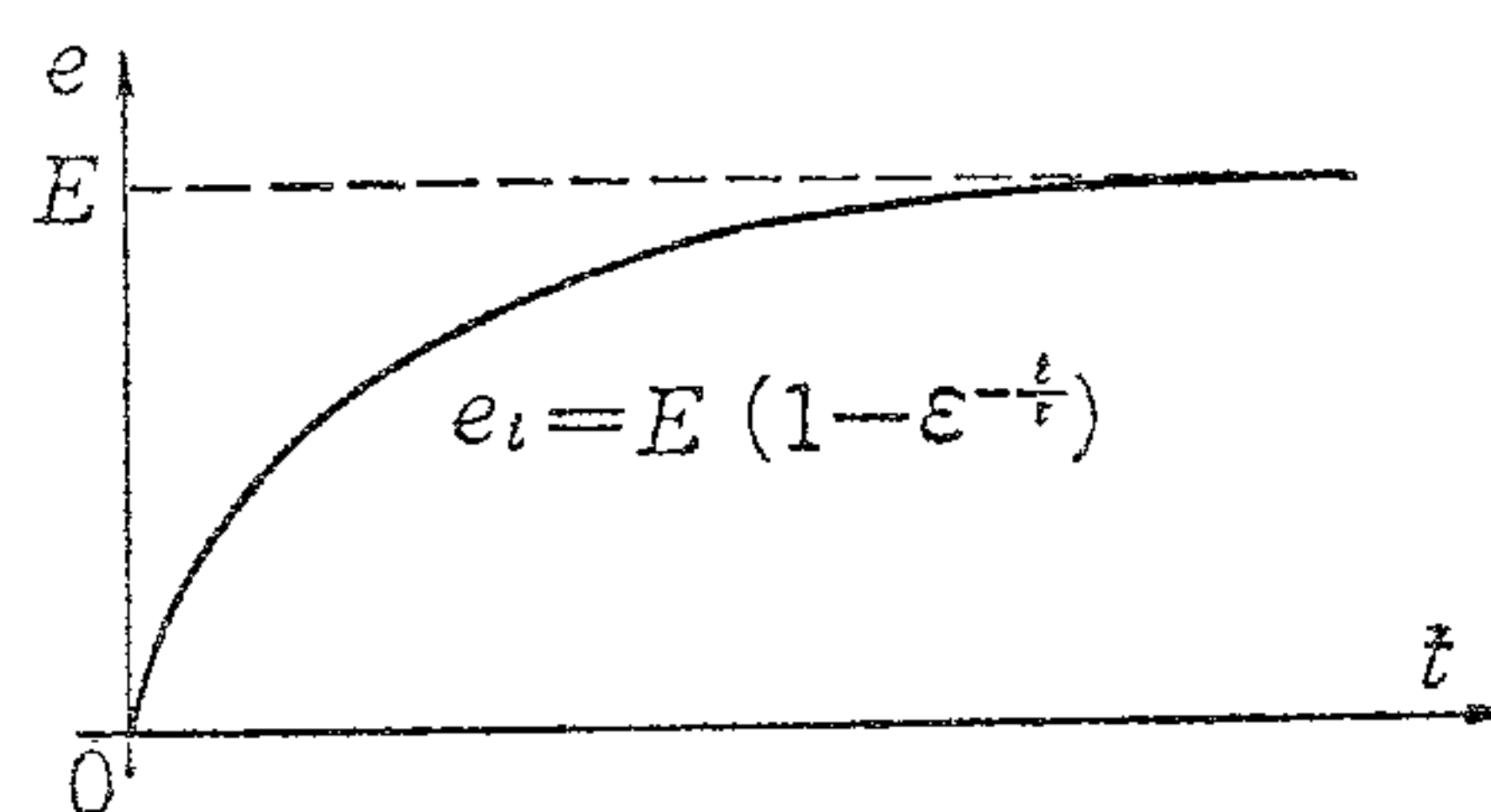


図 5-10

まず入力関数をラプラス変換して見よう。

$$e_i = E(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}})$$

は、公式 0011 を用いて、

$$E_1 = \frac{E}{s(1 + \tau s)}$$

となる。上記の伝達関数の式にこの入力を代入すれば、

$$E_o = \frac{LE}{R} \cdot \frac{1}{(1 + \tau s)(1 + sL/R)}$$

公式 0020A において、

$$T_1 = \tau, \quad T_2 = L/R \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{R}{LE}e_o = \frac{1}{\tau - L/R} (\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\therefore e_o = \frac{LE}{\tau R - L} (\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t})$$

これらの例題では、数値例を示さなかったが、その必要はないであろう。

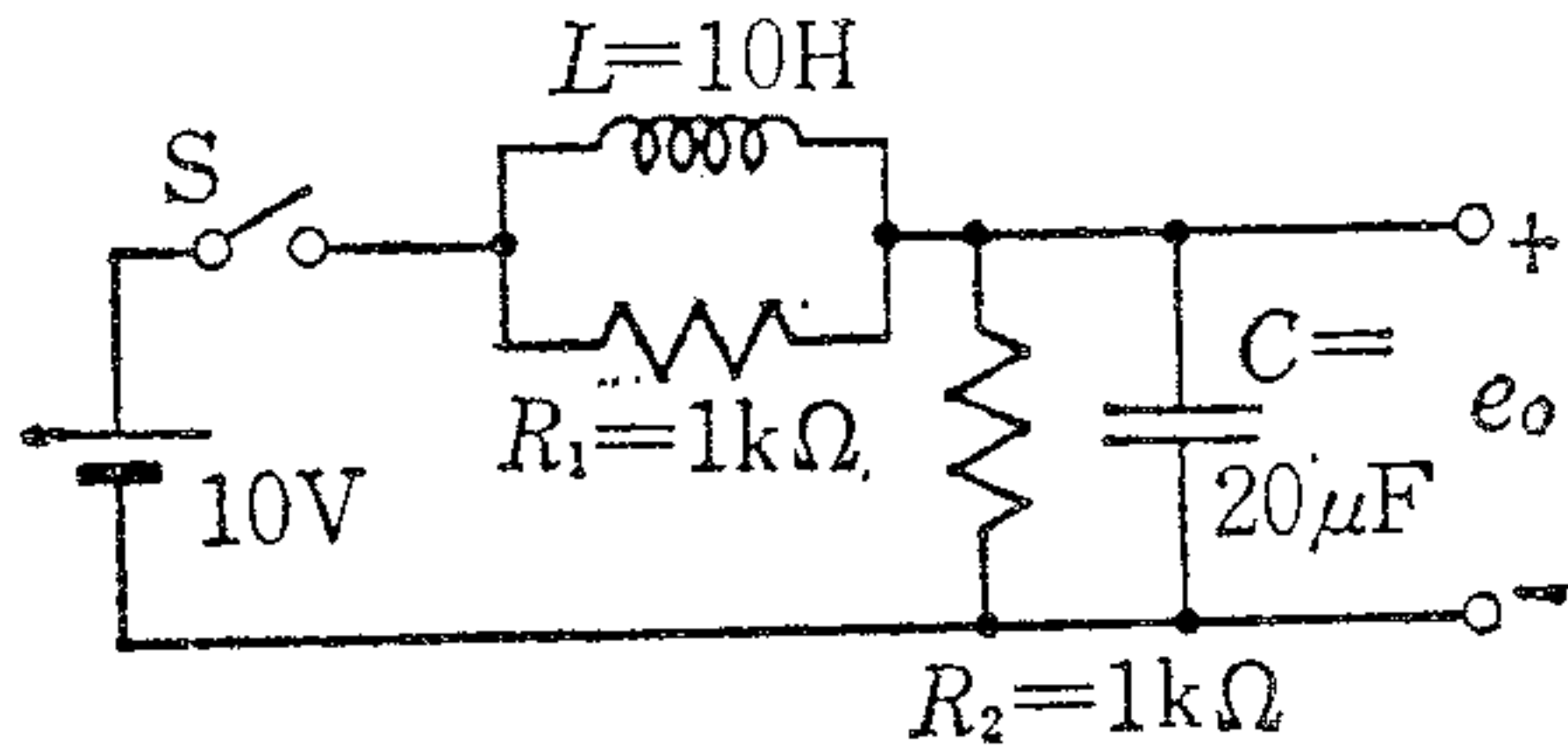
正弦波入力については改めて取上げるつもりである。

いずれにせよ、伝達関数に対して入力関数を掛ければ、常に出力が求められるということである。

【問題 5-1】

次の各回路について、付記した条件によって、出力電圧の式を求めよ。

1)



$t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

$e_{C_0} = 0$

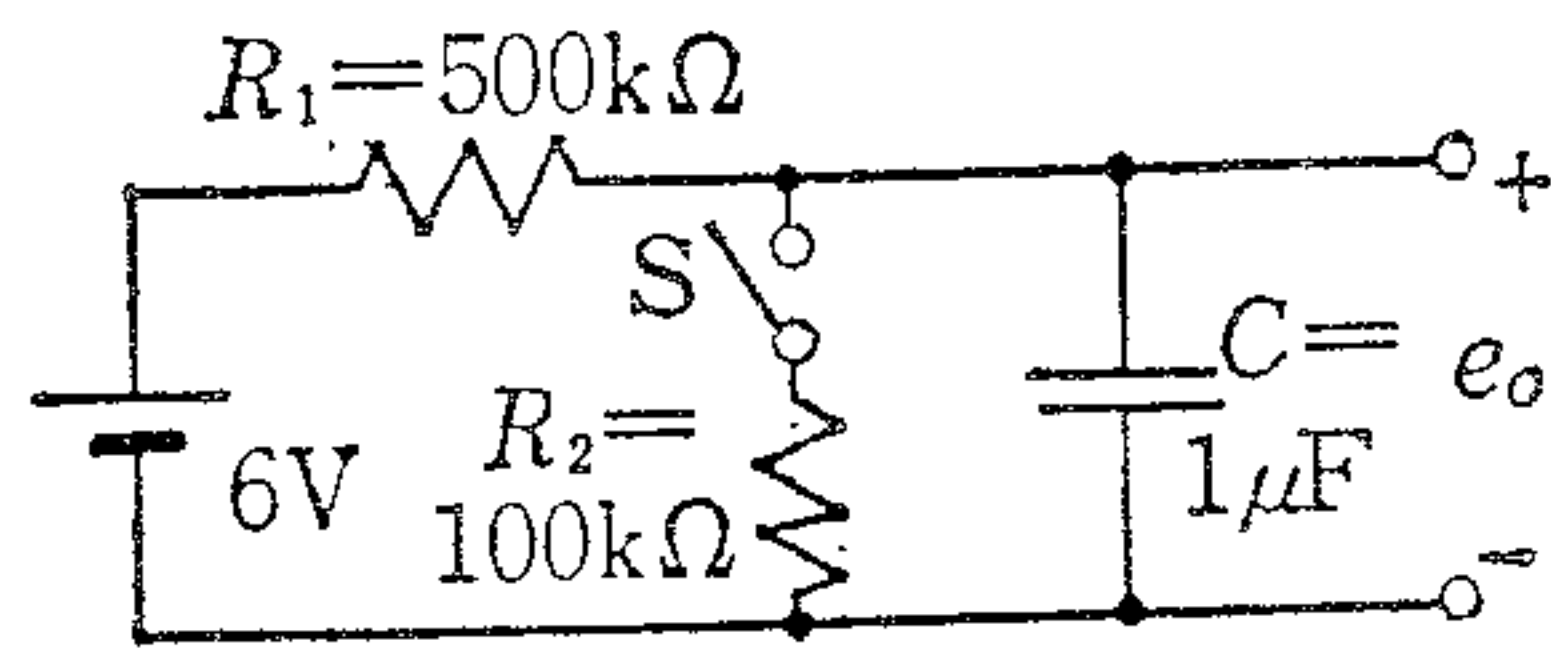
れる。

という

それ

にまず

2)



(i) $t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

(ii) $t=0$ で $S \rightarrow \text{off}$

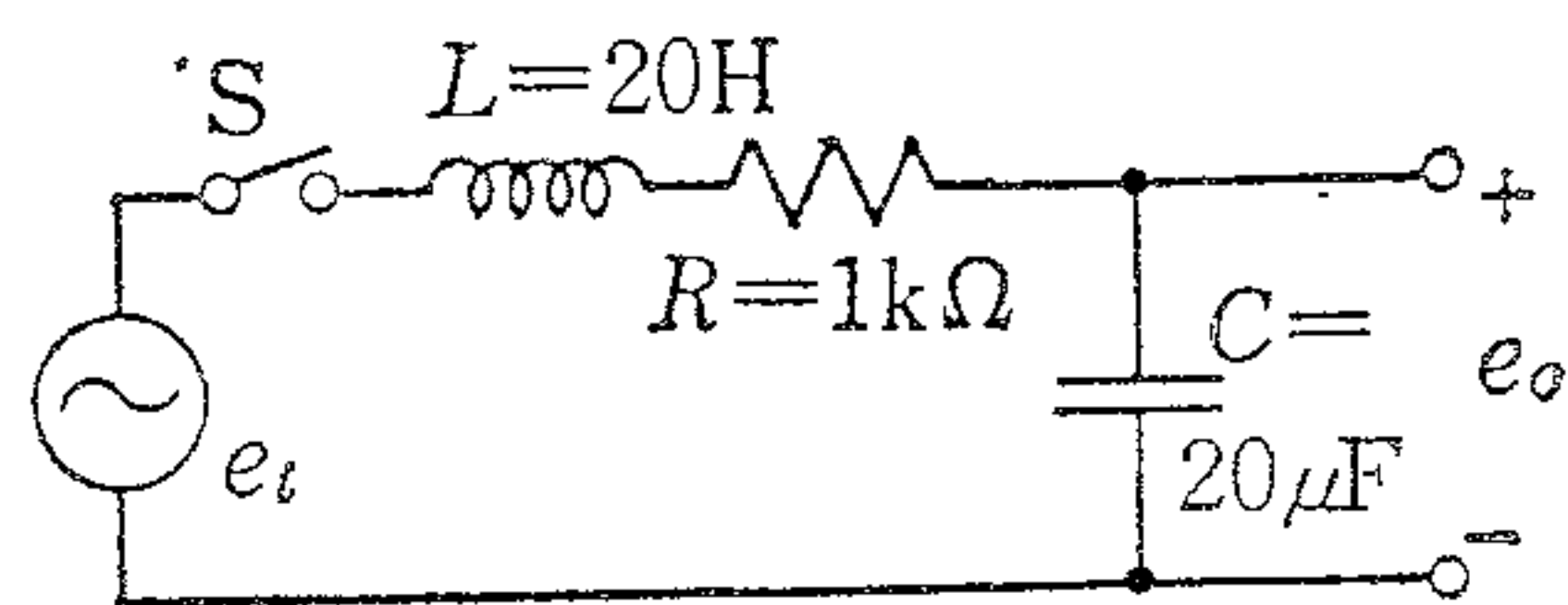
5-2-

上記

わめて

基本

3)



$t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

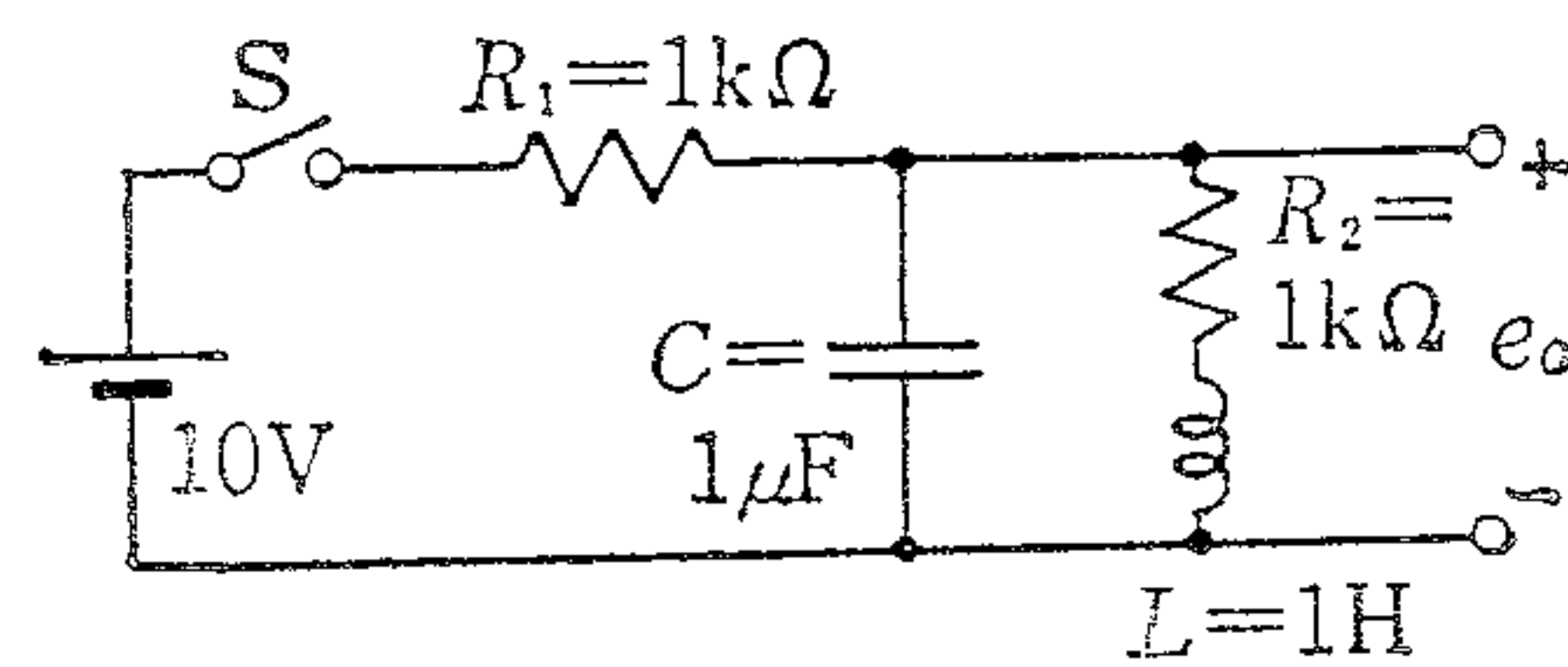
$e_i = 5e^{-t}$

$e_{C_0} = 0$

値の取

0でま

4)



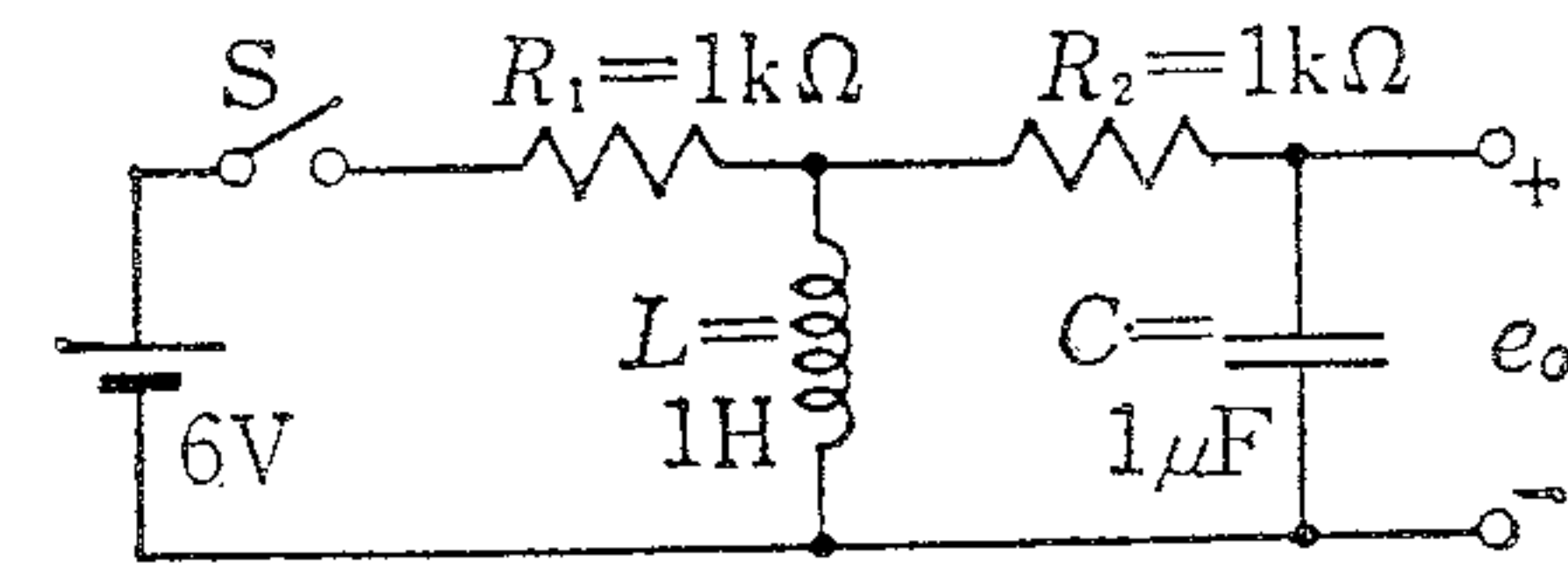
(i) $t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

$e_{C_0} = 0$

(ii) $t=0$ で $S \rightarrow \text{off}$

とい

5)



(i) $t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

$e_{C_0} = 0$

(ii) $t=0$ で $S \rightarrow \text{off}$

など

を使

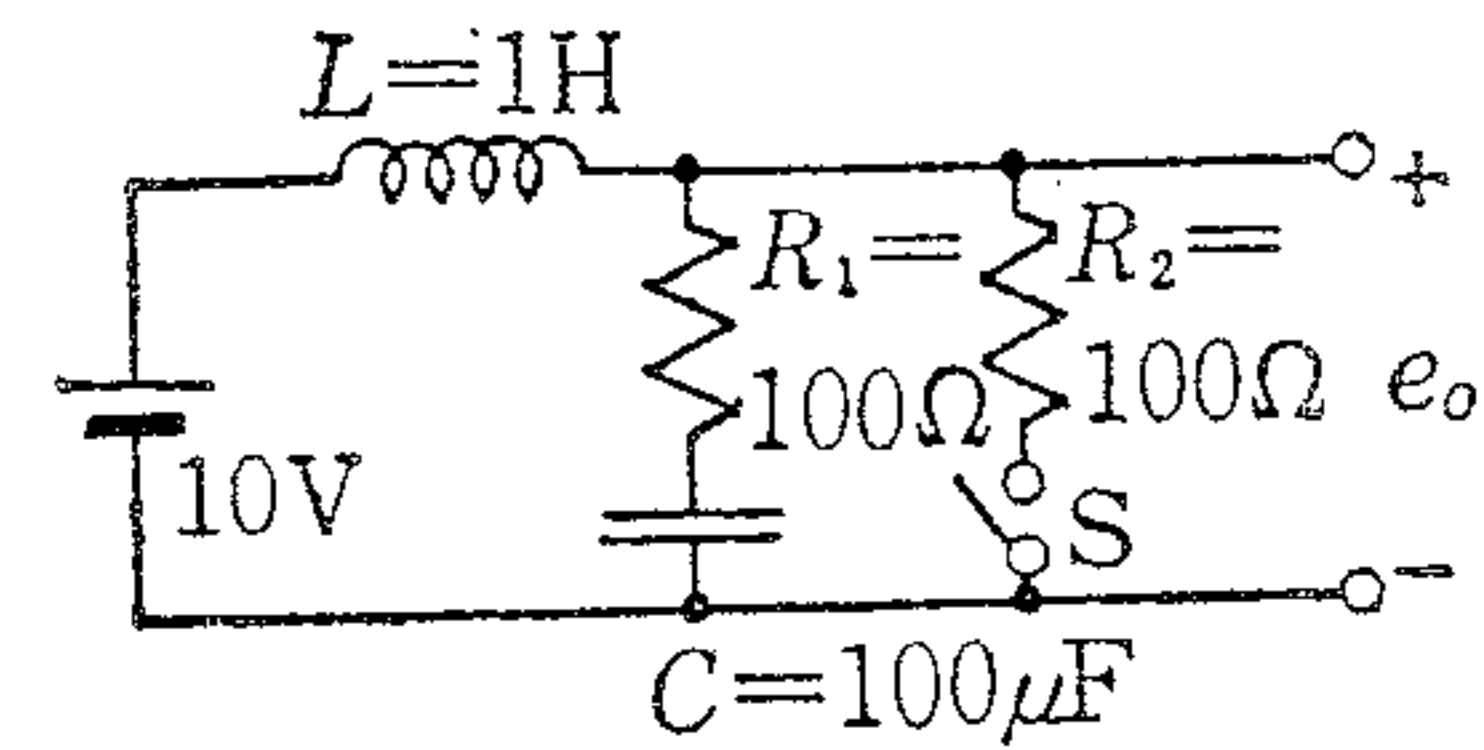
L,

考え

し

でき

6)



(i) $t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

(ii) $t=0$ で $S \rightarrow \text{off}$

5-2 伝達関数

例題 5-6で説明したように、過渡現象の問題とかその他自動制御系の解析あるいはる波器などを取扱う場合には、この伝達関数という考え方がよく用いられる。この用語に対する一般的な定義としては、

“入力に対する出力の比を、すべての初期値を 0 としてラプラス変換した関数”と考えら

れる。一般に

$$F_T = \frac{E_o}{E_i} \dots \dots \dots (5-7)$$

という形で示されるものである。

それぞれの使用目的によって、この関数の処理の方法が多少異なるが、ここでは基本的にまず伝達関数の導き方から考えて行こう。

5-2-1 回路要素の変換

上記の伝達関数の定義の中の“すべての初期値を0として”ということは、ここではきわめて重要な意味をもつことになる。

基本公式VII, VIIIなどを使って、 $L \frac{di}{dt}$ とか $\frac{1}{C} \int i dt$ をラプラス変換する場合に、初期値の取扱いが重要であることは、すでに前節で説明したとおりである。しかし、初期値が0であるとすれば、

$$\mathcal{L}\left[L \frac{di}{dt}\right] = sLI$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int i dt\right] = \frac{I}{sC}$$

ということなるから、いままで取扱ってきた回路の逆起電力

$$L \frac{di}{dt}, \quad \frac{1}{C} \int i dt$$

などの代りに

$$sLI, \quad \frac{I}{sC}$$

を使い、入力を e_i の代りに E_i とすれば同じことになるので、回路を考えるに際して、 L, C の代りに、 $sL, 1/sC$ という表示をして、始めからラプラス領域で回路方程式を考えてもよいことがわかっていただけると思う (M も同様)。

したがって、伝達関数を作る目的のためには、(過渡現象のときでも、初期値0が確認できるときは) 図5-11(a)の代りに同図(b)のように表示をしてもよいことになる。

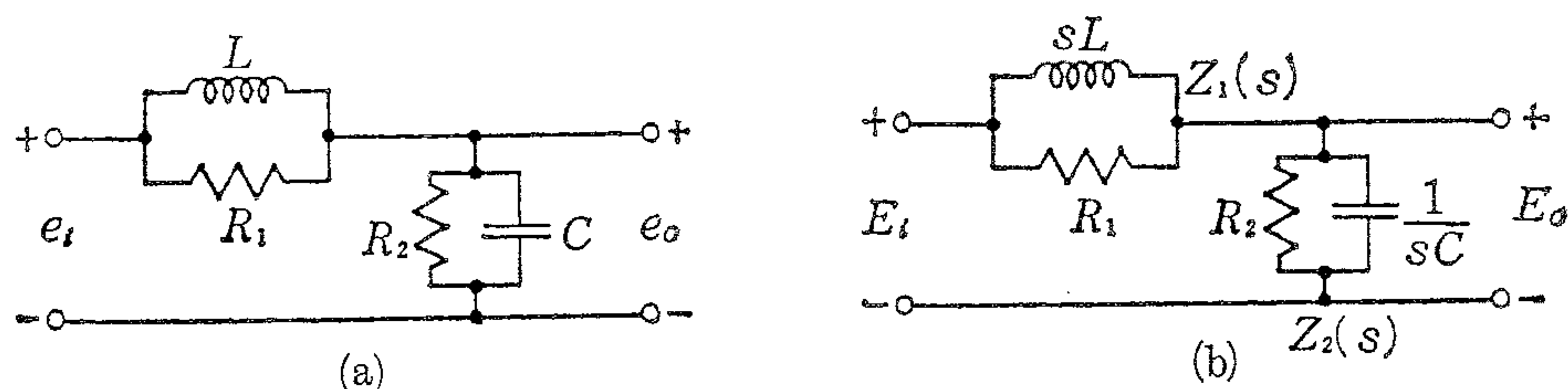


図 5-11

読者はすでに直流回路の学習から交流回路へ移行したときに、 $j\omega L, 1/j\omega C$ というリ

アクタンスについて、直流回路における R の合成計算がそのまま成立することを知り、すでにそのことになれていることと思うが、そのことはこの場合にも成立するのである。ここでは、 $j\omega L$ の代わりに sL を、 $1/j\omega C$ の代わりに $1/sC$ を使うことによって、直流回路において行った R の合成計算がそのまま成立するのである。つまり、 $j\omega$ の代わりに s と書くだけのことである。

図5-11(b)について考えて見ることにしよう。まず sL と R_1 の並列部分の合成インピーダンス $Z_1(s)$ は、

$$Z_1(s) = \frac{sLR_1}{R_1 + sL}$$

同様に $1/sC$ と R_2 の並列部分について $Z_2(s)$ は、

$$Z_2(s) = \frac{R_2/sC}{R_2 + 1/sC} = \frac{R_2}{1 + sCR_2}$$

ということになって、この $Z_1(s)$ と $Z_2(s)$ とによる回路は図5-12のようになる。この場合は、抵抗 R による分圧回路を思い出してもらえば、直ちに、

$$E_o = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} E_i$$

$$\therefore F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{\frac{sLR_1}{R_1 + sL} + \frac{R_2}{1 + sCR_2}}$$

$$F_T = \frac{R_2(R_1 + sL)}{R_1R_2 + sL(R_1 + R_2) + s^2LCR_1R_2}$$

ということになるのである。

要するに、直流回路において、抵抗 R について成立した回路の取扱い方法は、 s 領域において、 R 、 sL 、 $1/sC$ についても成立するということであるが、このことはあくまでも初期値を含まない場合の問題であることを忘れてはならない。

同時に、もしもこの伝達関数 $F_T(s)$ において s の代わりに $j\omega$ を使えば、つまり $f_T(j\omega)$ とすれば、正弦波入力に対する回路の伝達関係を示す式になることも明らかで、このことは、たとえば自動制御工学では、この $s \rightarrow j\omega$ 、または $j\omega \rightarrow s$ の変換によって、過渡応答の式と周波数応答の式の変換を盛んに行っているのである。

5-2-2 電気回路の伝達関数

自動制御工学では、その制御系に使用されるすべての要素、たとえば回転機、ギヤ機構、流体機器、温度機器、電子機器などのすべてについて、その一つ一つにおいて入力と

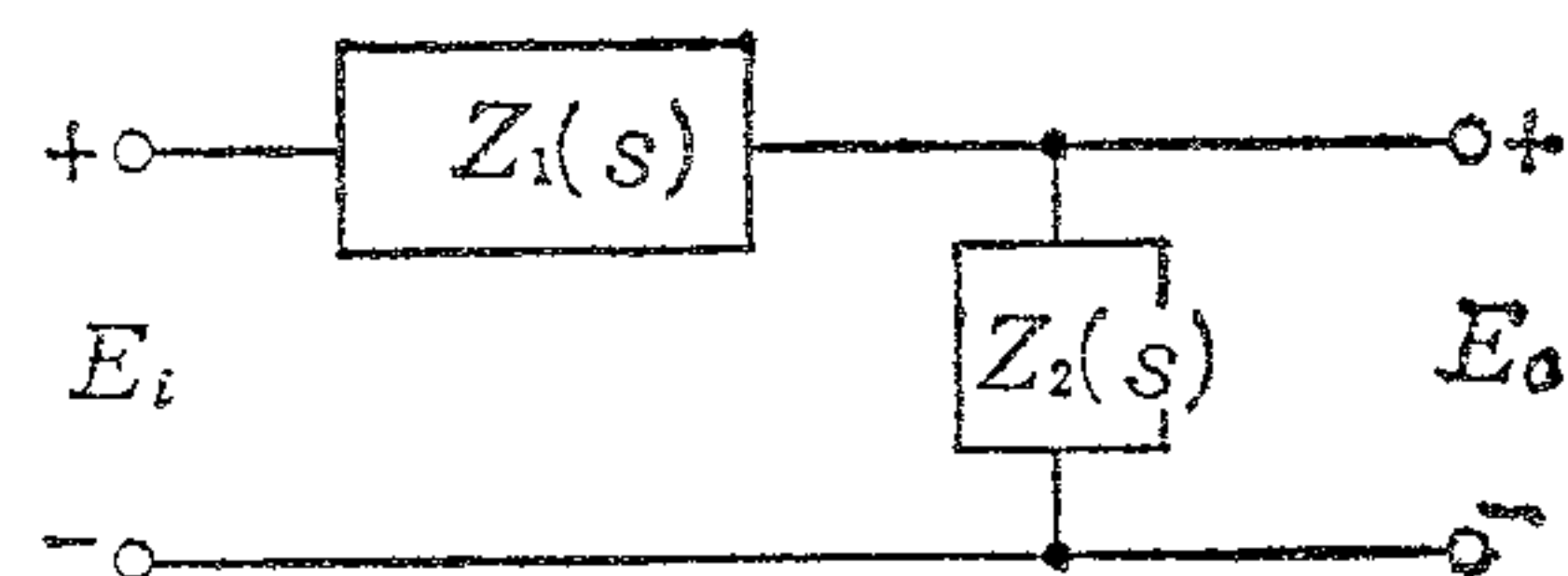


図 5-12

出力の関係，すなわち伝達関数を求め，これらを系統的に合成して，全体としての伝達関数を求めて，系の特性を解析したり補正したりするのである。

それぞれの要素の入力と出力の間には，当然電気回路と同様，微分方程式が成立し（もちろん単なる比例関係の場合もある），これをラプラス変換した結果として伝達関数が求められるのである。これらの場合には，入力と出力がまったく異質なものであることも多いが，これらはラプラス領域において統一的に取扱うことができるのは，大きな利点である。

たとえば直流機では，フィールド抵抗の位置（または角度）を入力とし，その出力が回転数であっても，またタコメータの場合に，入力回転数であってその出力が電圧であったとしても，いずれの場合もその伝達関数は s の式となつて，統一的に取扱うことができるのである。

われわれがいま取扱っている電気回路も，そういう要素の一例であるにすぎないといえるが，この場合には，たまたま入力と出力が同質のものであるにすぎないのである。

ここでは電気回路について集中的に考えて見ることにしよう。まず二，三の例題を示すことにしよう。

【例題 5-8】

図5-13の回路の伝達関数を求めよ。

まず交流回路として考えて見よう。

$$e_i = Ri + \frac{i}{j\omega C} \quad e_o = \frac{i}{j\omega C}$$

$$\therefore \frac{e_o}{e_i} = \frac{\frac{i}{j\omega C}}{Ri + \frac{i}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = f_T(j\omega)$$

ここで $j\omega \rightarrow s$ の変換を行うと

$$F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{1 + sCR}$$

もちろん，回路において C の代りに $1/sC$ と考えて前項の例に同様に分圧の式を考えても，同じ結果となることは明らかであろう。

【例題 5-9】

図5-14の回路の伝達関数を求めよ。

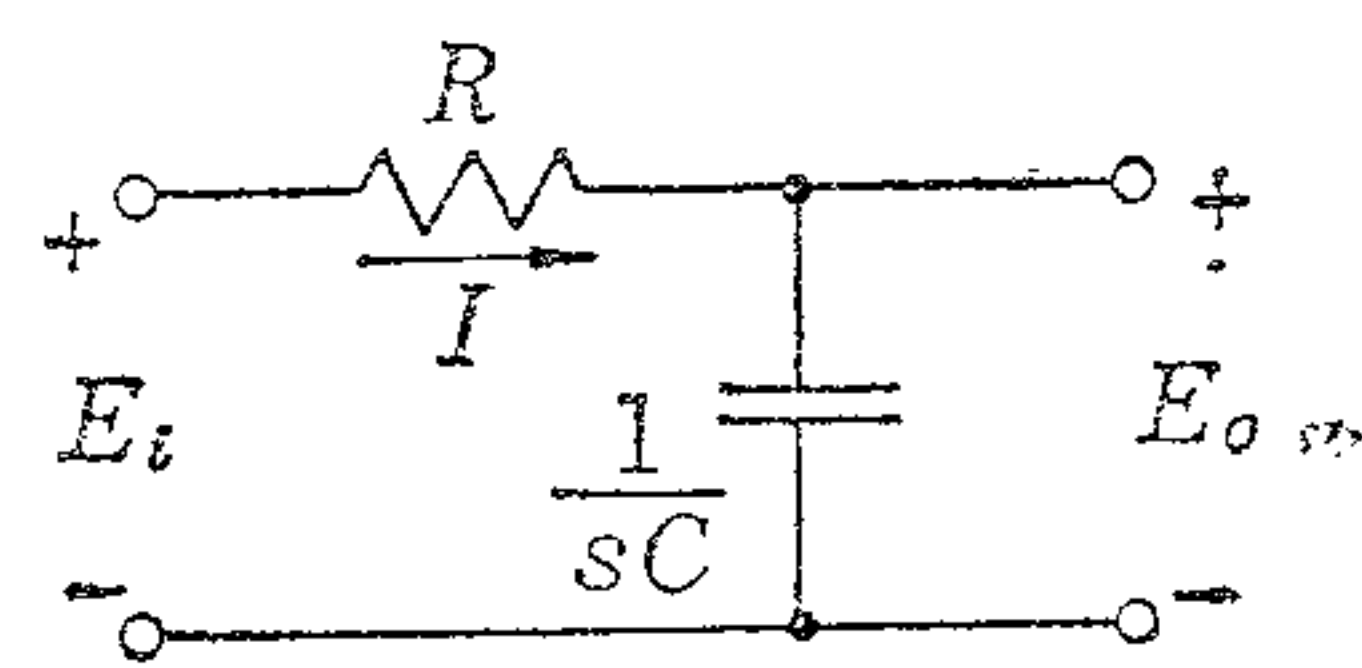


図 5-13

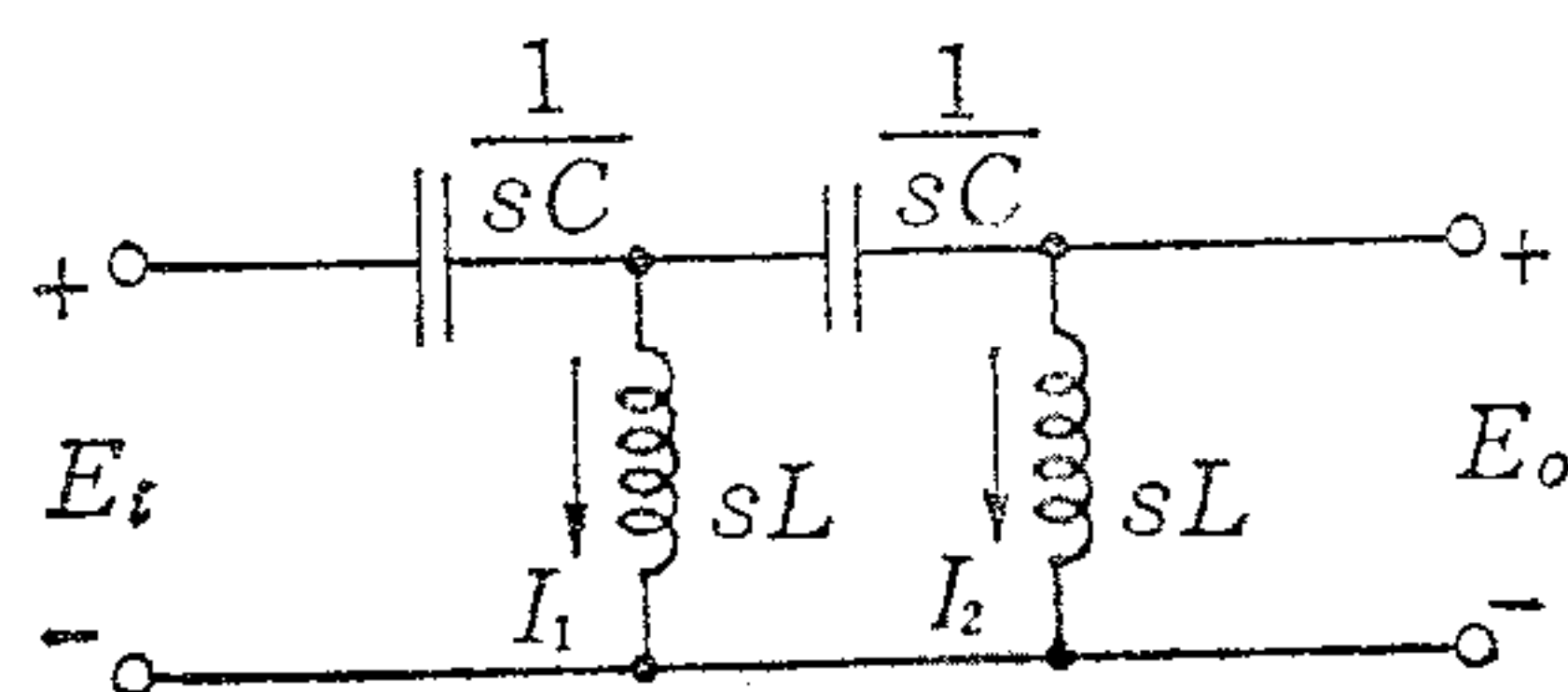


図 5-14

L , C の代わりに, sL , $1/sC$ を使用し, 電流を図のように I_1 , I_2 と定めると,

$$\begin{cases} E_i = \frac{I_1 + I_2}{sC} + sLI_1 & E_o = sLI_2 \\ sLI_1 = \frac{I_2}{sC} + sLI_2 \end{cases}$$

変形して

$$\begin{cases} sCE_i = (1 + s^2LC)I_1 + I_2 \\ s^2LCI_1 = (1 + s^2LC)I_2 \end{cases}$$

代入して

$$\begin{aligned} sCE_i &= \left[\frac{(1 + s^2LC)^2}{s^2LC} + 1 \right] \cdot I_2 \\ &= \frac{1 + 3s^2LC + (s^2LC)^2}{s^2LC} \cdot \frac{E_o}{sL} \end{aligned}$$

$$\therefore F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{(s^2LC)^2}{1 + 3s^2LC + (s^2LC)^2}$$

【例題 5-10】

図5-15の回路の伝達関数を求めよ。

この回路は, 少々特別な意味をもつ回路であるが, このことはあとで説明しよう。

前題と同様に I_1 , I_2 , I_3 を定める。3つの式が必要であることは, すでに述べたとおりである。

$$\begin{cases} E_i = RI_3 + \frac{1}{sC}(I_1 + I_2 + I_3) \\ RI_3 = RI_2 + \frac{1}{sC}(I_1 + I_2) \\ RI_2 = RI_1 + \frac{I_1}{sC} \end{cases}$$

変形して

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + (1 + sCR)I_3 &= sCE_i \\ I_1 + (1 + sCR)I_2 - sCRI_3 &= 0 \\ (1 + sCR)I_1 - sCRI_2 &= 0 \end{aligned}$$

式が3つ以上になった場合には, 行列式を利用すると便利であることはすでに知っていることと思う。またこの式では sCR という組合わせが多いので $M = sCR$ とおくと, 主行列式 A は

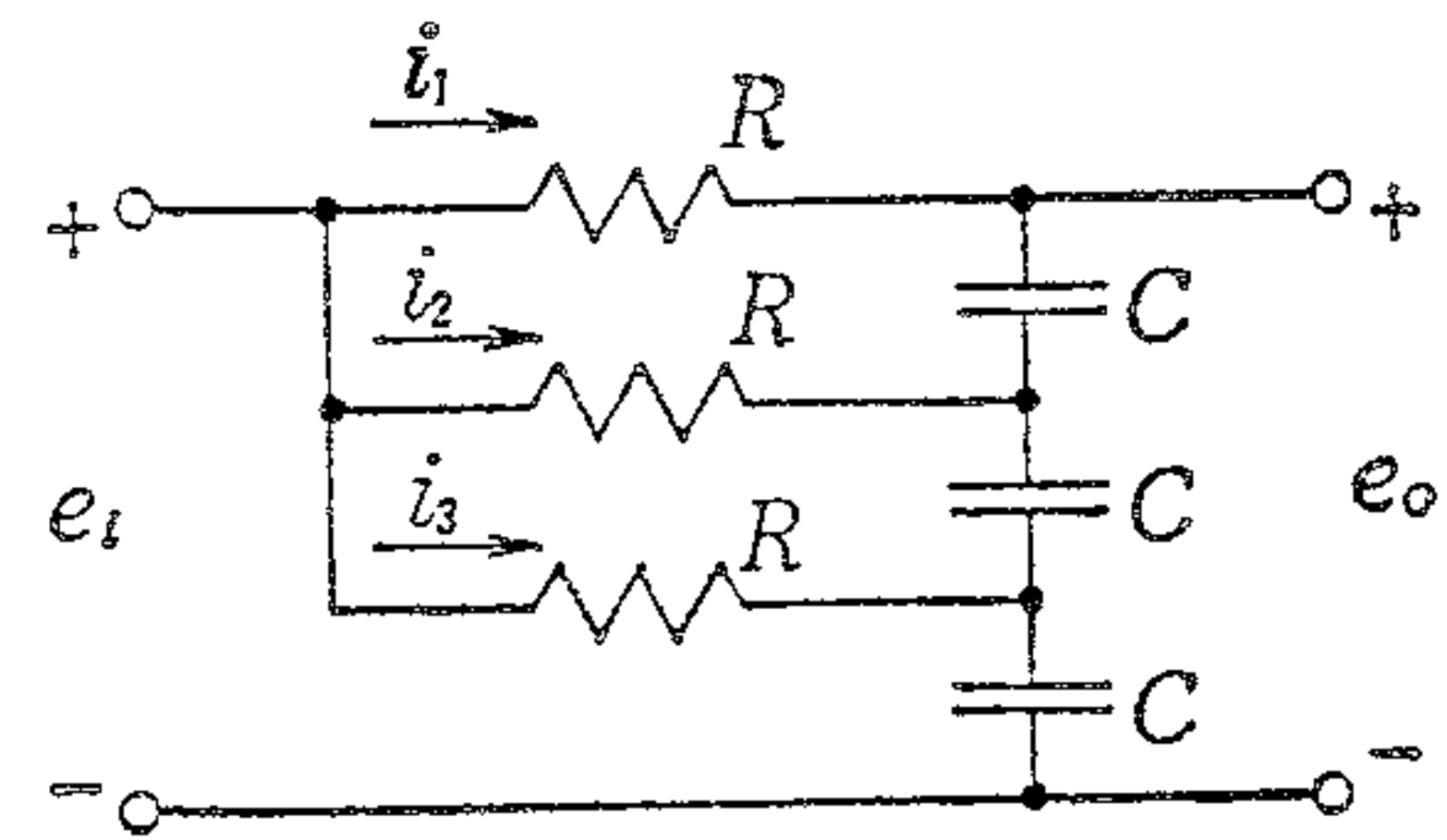


図 5-15

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+M \\ 1 & 1+M & -M \\ 1+M & -M & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2M(1+M) - (1+M)^3 - M^2 \\ &= -(1+5M+6M^2+M^3) \end{aligned}$$

ところが、 $E_o = E_i - RI_1$ であることから I_1 が求められればよいことになるから、 I_1 について、 Δ_1 を求めると

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} sCE_i & 1 & 1+M \\ 0 & 1+M & -M \\ 0 & -M & 0 \end{vmatrix} \\ &= -M^2 sCE_i \\ \therefore I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{M^2 sCE_i}{1+5M+6M^2+M^3} \\ \therefore E_o &= E_i \left(1 - \frac{M^3}{1+5M+6M^2+M^3} \right) \\ \therefore F_T &= \frac{E_o}{E_i} = \frac{1+5M+6M^2}{1+5M+6M^2+M^3} \\ &= \frac{1+5sCR+6(sCR)^2}{1+5sCR+6(sCR)^2+(sCR)^3} \end{aligned}$$

問題に対する解は、ここまででよいのであるが、ここでこの回路の特別な意味について、少し触れておこうと思う。

いま $s \rightarrow j\omega$ として、 $F_T(s)$ を $f_T(j\omega)$ にかえて見ると、

$$\begin{aligned} f_T(j\omega) &= \frac{1+j5\omega CR-6\omega^2 C^2 R^2}{1+j5\omega CR-6\omega^2 C^2 R^2-j\omega^3 C^3 R^3} \\ &= \frac{1-6\omega^2 C^2 R^2+j5\omega CR}{(1-6\omega^2 C^2 R^2)+j(5\omega CR-\omega^3 C^3 R^3)} \end{aligned}$$

いまこの式の実数部分を 0 とおくと

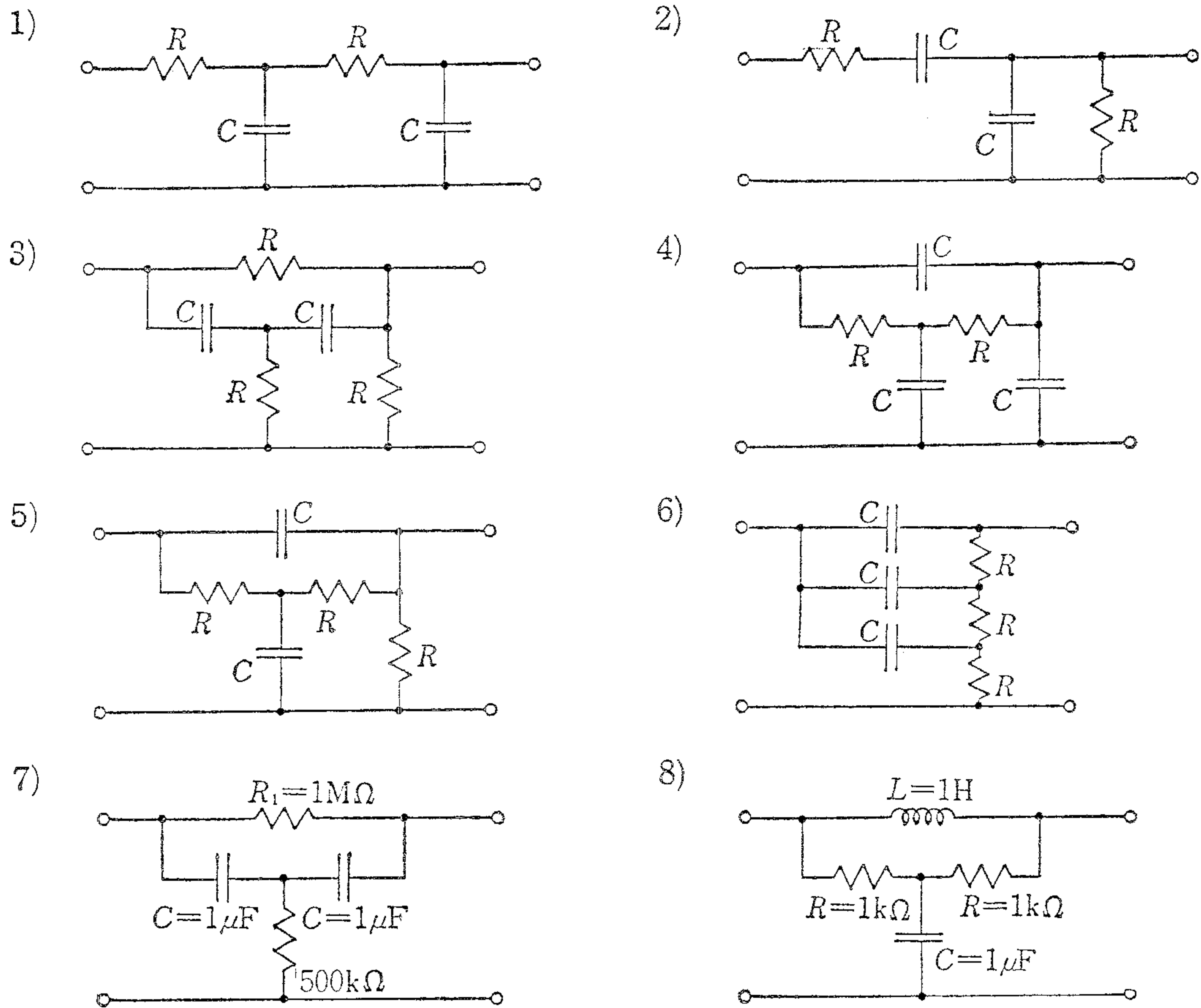
$$\begin{aligned} 6\omega^2 C^2 R^2 &= 1 \quad \therefore \omega^2 C^2 R^2 = 1/6 \\ f_T(j\omega) &= \frac{5\omega CR}{5\omega CR - \omega^3 C^3 R^3} = \frac{5}{5 - \omega^2 C^2 R^2} \\ &= \frac{5}{5 - 1/6} = \frac{30}{29} \doteq 1.03448 \dots \end{aligned}$$

ということになって、この結果は、 ω が $1/\sqrt{6}CR$ に等しいとき、この回路の出力は入力と同じ位相で、振幅が約 1.034 倍というようにわずかながら増幅が行われることを示しているのである。 LC の共振現象を除いては、 CR 、または LR の回路では振幅が増大することはないというある種の錯覚に対して、興味のある結果を示していると考えられる。次の練

習問題の中に類似の例を掲げてあるので確認してほしいと思う。

【問題 5-2】

次の各回路について、伝達関数を求めよ。



5-3 増幅器を含む回路の伝達関数

これまで取扱った伝達関数は、すべて LCR だけのいわゆる受動回路について考えてきた。しかし現実の回路の中には、電子素子を含む非線形要素とか増幅器などを含む回路も多いのである。

非線形要素が含まれる場合には、一般的な方法として、不連続点で区分して別な式を作

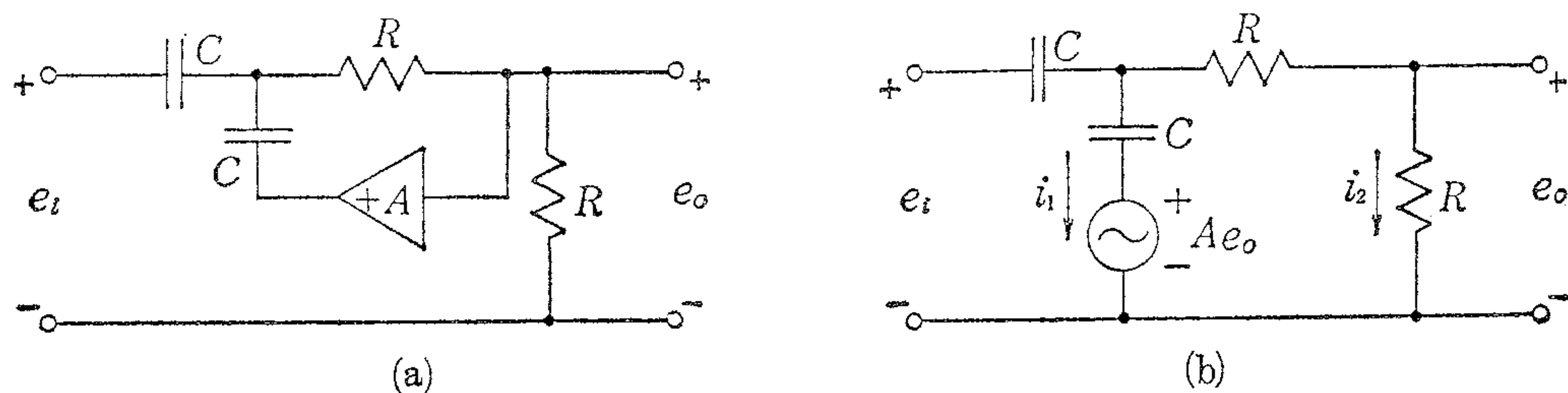


図 5-16

るというのも多く用いられる方法である。

ここでは増幅器を含む場合について説明することにしよう。図5-16は特殊な微分回路として知られている回路である。

この中で $\triangleleft +A$ という表示は、信号が右から左へ伝達され、その増幅利得が $+A$ であることを示すものである。さらにこのような場合は、回路の問題として考えるときに、 L や C がそうであるように理想的な増幅器と考え、入力インピーダンスは ∞ 、出力インピーダンスは 0 であると考えられるものであることを忘れてはならない。

このような場合、増幅器の入力が明らかであることが多いが、そのときには、その出力は A 倍することによって直ちに求められるから、この例の場合には、図5-16(b)のような等価回路を書くことができる。

5-1 節では、2 電源以上の過渡現象については触れていないが、ここでは、入力の外に、上記のような内部電源がある回路として考えなければならないことになったが、下記のとおり、大した困難なことではないことがわかっていただけと思う。

電源が2つ以上あったとしても、起電力=逆起電力という回路方程式を作ることはまったく変りはない。図5-16(b)において、

$$\begin{cases} E_i = \frac{I_1 + I_2}{sC} + \frac{I_1}{sC} + AE_o \\ \frac{I_1}{sC} + AE_o = 2RI_2 & E_o = RI_2 \end{cases}$$

変形して、

$$\begin{cases} sCE_i = 2I_1 + I_2 + AsCE_o \\ I_1 = 2sCRI_2 - AsCE_o \end{cases}$$

代入して、

$$\begin{aligned} sCE_i &= 4sCRI_2 - 2AsCE_o + I_2 + AsCE_o \\ &= (1 + 4sCR) \frac{E_o}{R} - AsCE_o \end{aligned}$$

$$\therefore sCRE_i = [1 + (4 - A)sCR]E_o$$

$$\therefore F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{sCR}{1 + (4 - A)sCR}$$

いま $A=4$ であるとすれば、

$$F_T = sCR$$

となって、この回路は、完全な微分動作を行うことになるのである。

まったく同様に図5-17の回路は

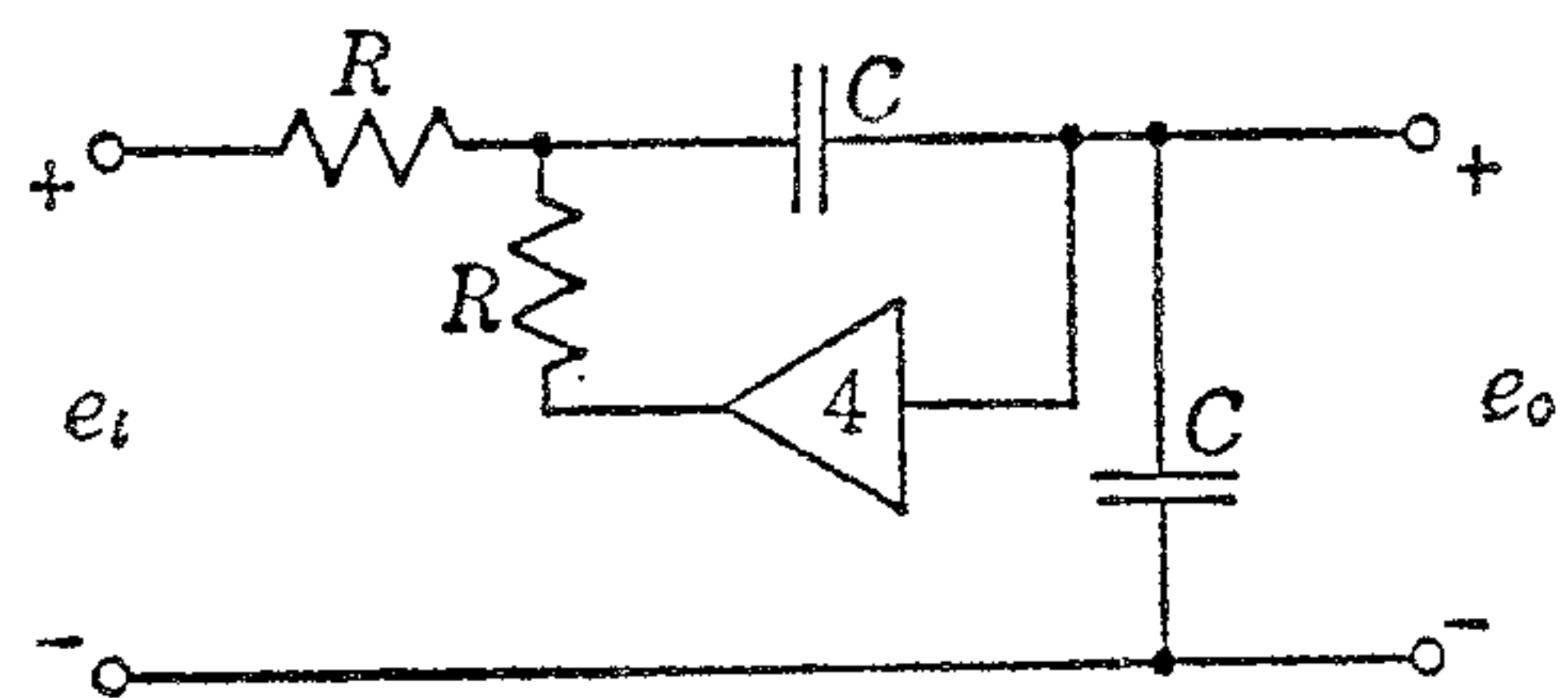


図 5-17

$$F_T = -\frac{1}{sCR}$$

となって、完全な積分動作を行うのである。

【例題 5-11】

図5-18の回路の伝達関数を求めよ。

この場合も増幅器の入力は e_o であるから、比較的簡単であって、図5-19のような等価回路を描くことができる。この回路方程式を作れば、

$$\begin{cases} E_i = R(I_1 + I_2) + \frac{I_1}{sC} + 2E_o \\ \frac{I_1}{sC} + 2E_o = \frac{I_2}{sC} + RI_2 \end{cases}$$

変形して、

$$sCE_i = (1 + sCR)I_1 + sCRI_2 + 2sCE_o$$

$$I_1 = (1 + sCR)I_2 - 2sCE_o$$

代入して、

$$sCE_i = (1 + sCR)^2 I_2 - 2sC(1 + sCR)E_o + sCRI_2 + 2sCE_o$$

しかるに $E_o = RI_2$ だから $I_2 = E_o/R$

$$\therefore sCRE_i = (1 + 3sCR - s^2C^2R^2)E_o$$

$$\therefore F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{sCR}{1 + 3sCR - s^2C^2R^2}$$

【例題 5-12】

右の回路の伝達関数を求め、その上で入力として、 $t=0$ で 1V D.C. を加えたときの出力の式を求めよ。ただし、 $R=1\text{M}\Omega$ 、 $C=1\mu\text{F}$ 、 $t=0$ で、 e_o は 0 とする。

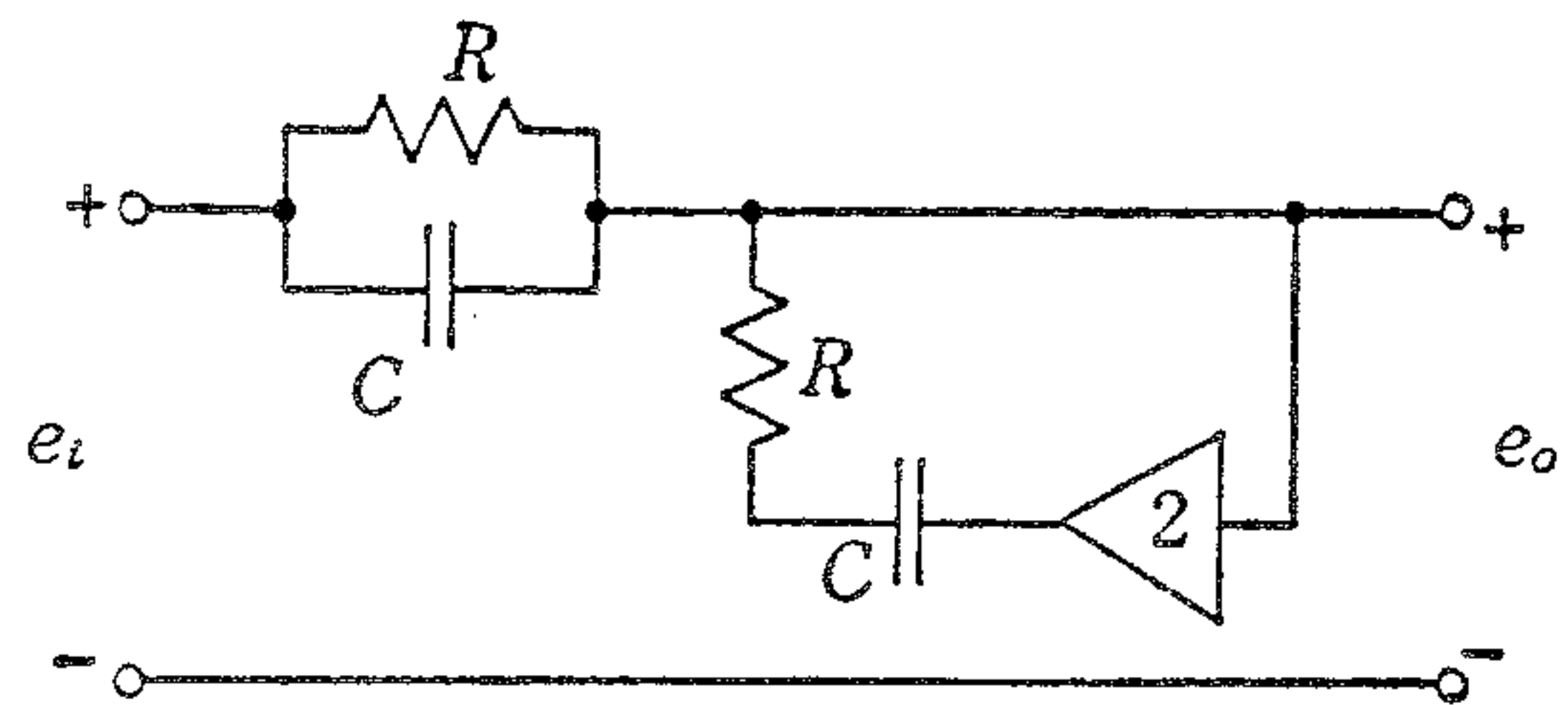


図 5-20

この例は、増幅器を含む回路の入力と出力とが短絡されていて、その回路は何の意味もないように考えられるかも知れない。そしてもしもその増幅素子を含む回路を無視してしまふことができるとすれば、この回路は単なる RC の並列インピーダンスにすぎないことになってしまうであろう。この場合には負荷を切り離しては伝達関数を考えることができないことになるであろう。実はそうではないから、このような例題が成立するのである。

まず前例と同様に考えて等価回路を描くと図5-21のようになるであろう。

図示のように $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ 定めると,

$$Z_1(s) = \frac{R/sC}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+sCR}$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC} + R = \frac{1+sCR}{sC}$$

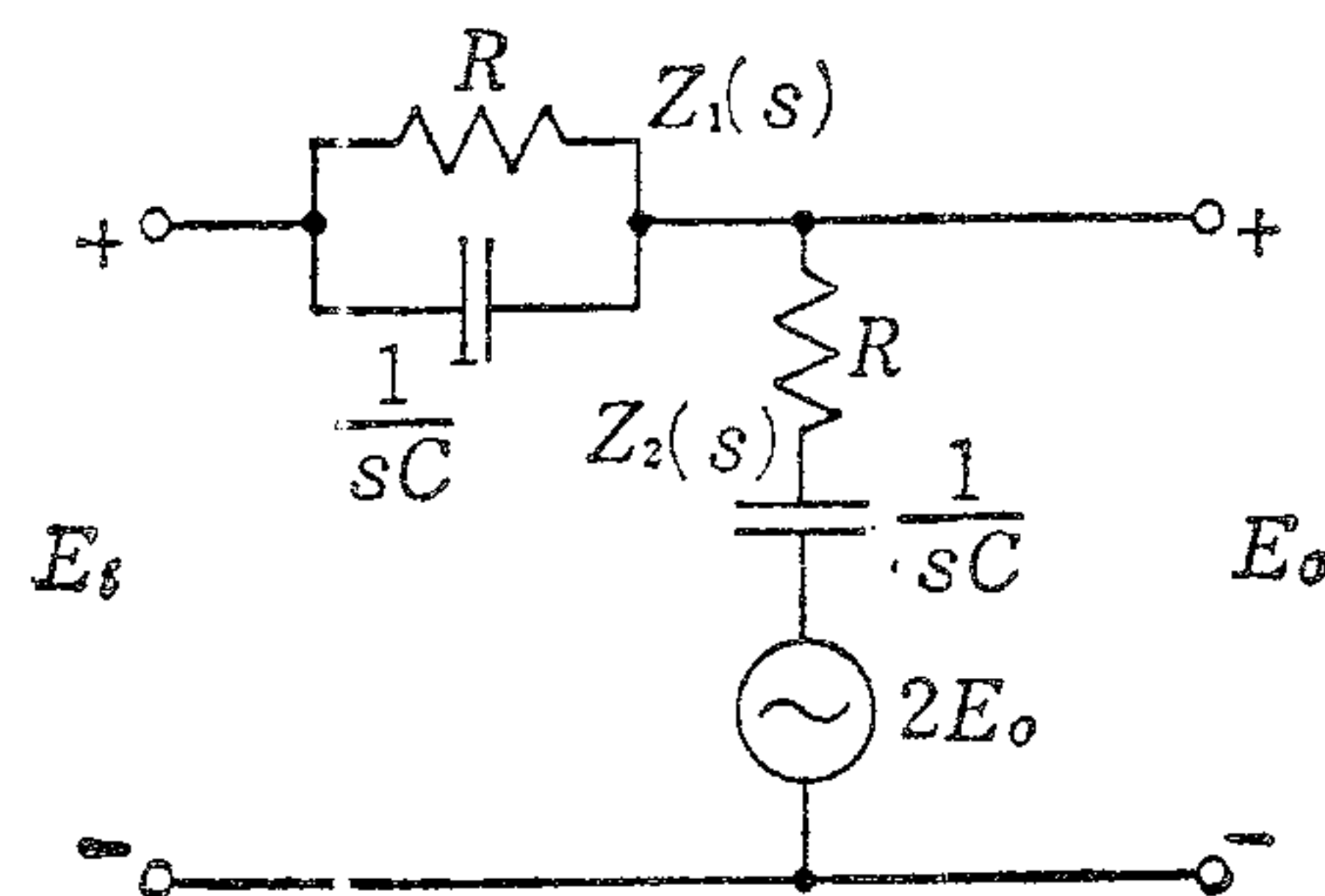


図 5-21

そこで

$$\begin{cases} E_i = (Z_1 + Z_2)I + 2E_o \\ E_o = E_i - Z_1 I \end{cases} \quad I = \frac{E_i - E_o}{Z_1}$$

$$\therefore E_i = \frac{(E_i - E_o)(Z_1 + Z_2)}{Z_1} + 2E_o$$

$$\therefore F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

この式に, Z_1 , Z_2 の式を代入して整理すると,

$$F_T = \frac{1 + 2sCR + (sCR)^2}{1 + sCR + (sCR)^2} = 1 + \frac{sCR}{1 + sCR + (sCR)^2}$$

となる。次に入力を $e_i = 1$ つまり $E_i = 1/s$ とおけば,

$$E_o = E_i F_T = \frac{1}{s} + \frac{CR}{1 + sCR + (sCR)^2}$$

$CR=1$ であるから,

$$E_o = \frac{1}{s} + \frac{1}{1 + s + s^2}$$

となるので, 第一項は問題はないが, 第二項は, 公式 0100 A において,

$$\omega_1 = 1 \quad d = 1/2 \quad \therefore D = \sqrt{3}/2 \quad d\omega_1 = 1/2 \quad \omega_1 D = \sqrt{3}/2$$

であるから,

$$e_o = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

このことは, 1V の電池をつなぐたびに増幅器が帰還発振を起こすことを示しているのである。

F_T の式に戻って考えて見よう。この F_T は増幅度が 2 であるときの結果であった。もしも A が未知であれば, 2 の代りに A とおいて式を導けばよいが, このときは,

$$F_T = \frac{1 + 2sCR + (sCR)^2}{1 + (3-A)sCR + (sCR)^2}$$

となる。もしも $A=3$ であるとすれば,

もしもとき。

$$F_T = \frac{1 + 2sCR + (sCR)^2}{1 + (sCR)^2} = 1 + \frac{2sCR}{1 + (sCR)^2}$$

このとき $CR=1$ であるとすれば, $e_i=1$ のとき,

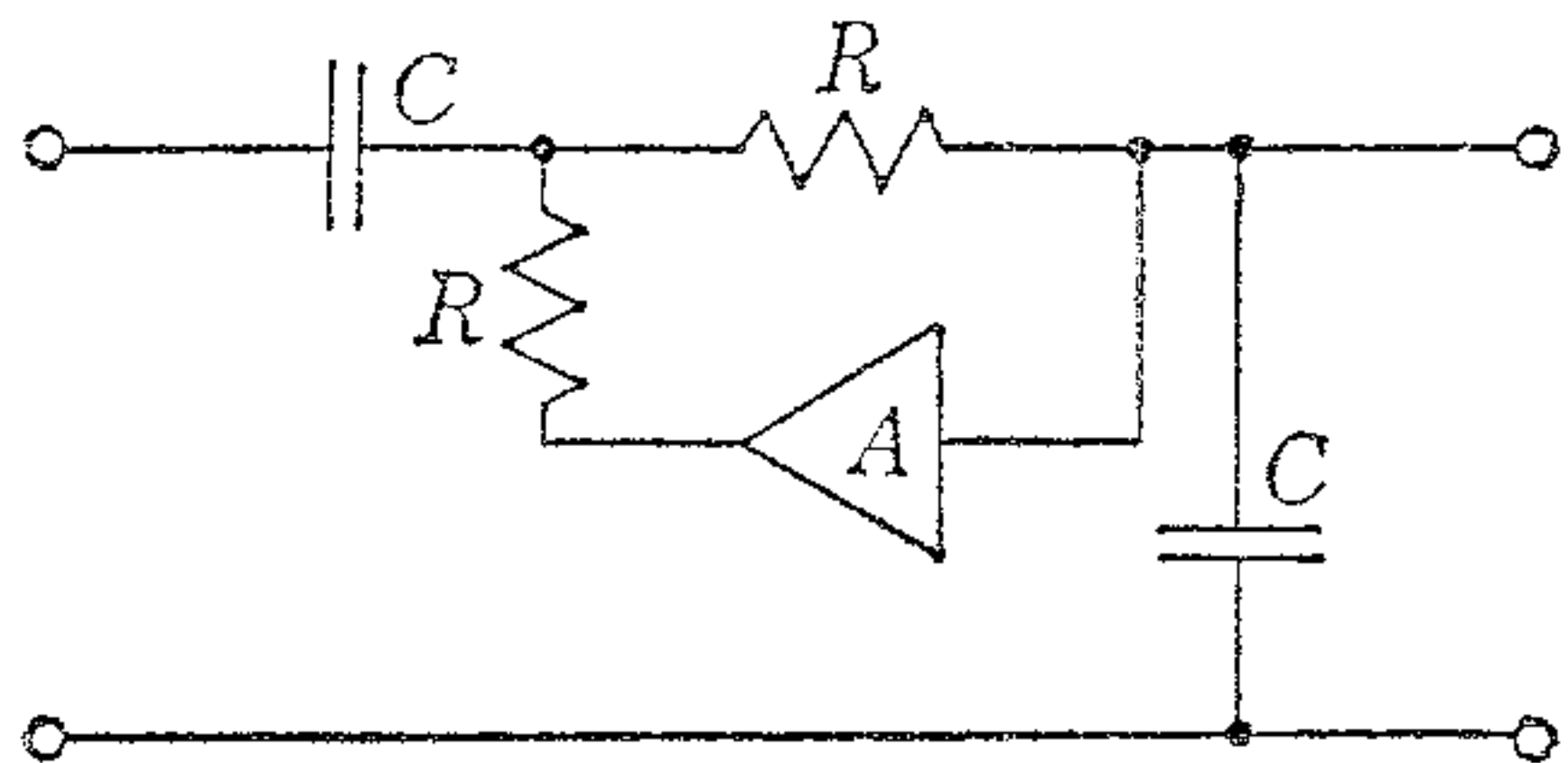
$$e_o = 1 + 2 \sin t$$

ということになって, 完全な発振器となることを示しているのである。この回路では前述のように入力インピーダンスを ∞ , つまり増幅器の負荷効果を見捨てているので, 実際の回路とは多少異なっているが, もしも入力インピーダンスのきわめて大きな, そして出力インピーダンスがきわめて小さい増幅器を利用できるとすれば, この回路は直流入力に対して, その電圧の2倍の振幅をもった正弦波の発振器ということになるのである。

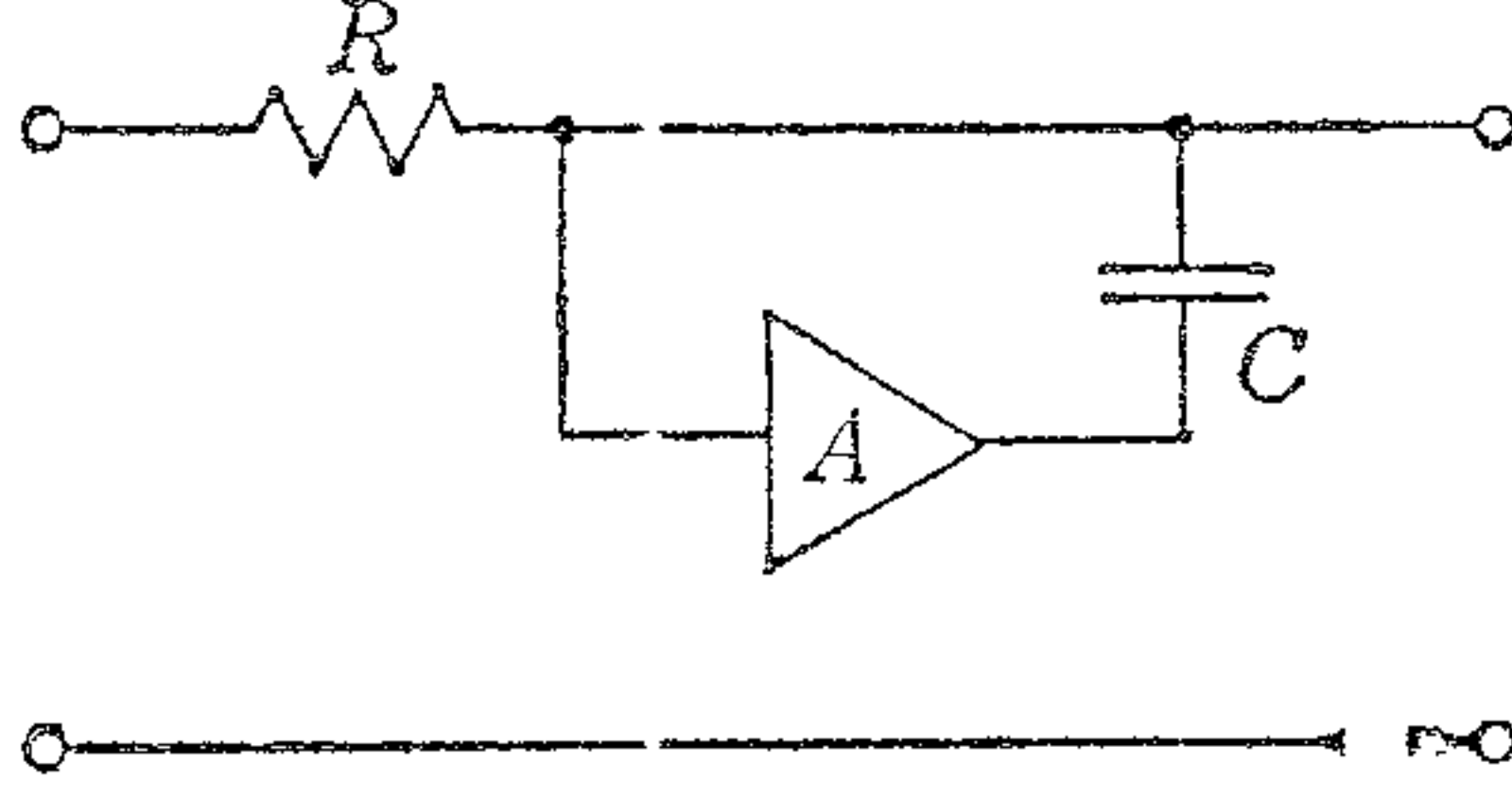
【問題 5-3】

次の各回路の伝達関数を求めよ。

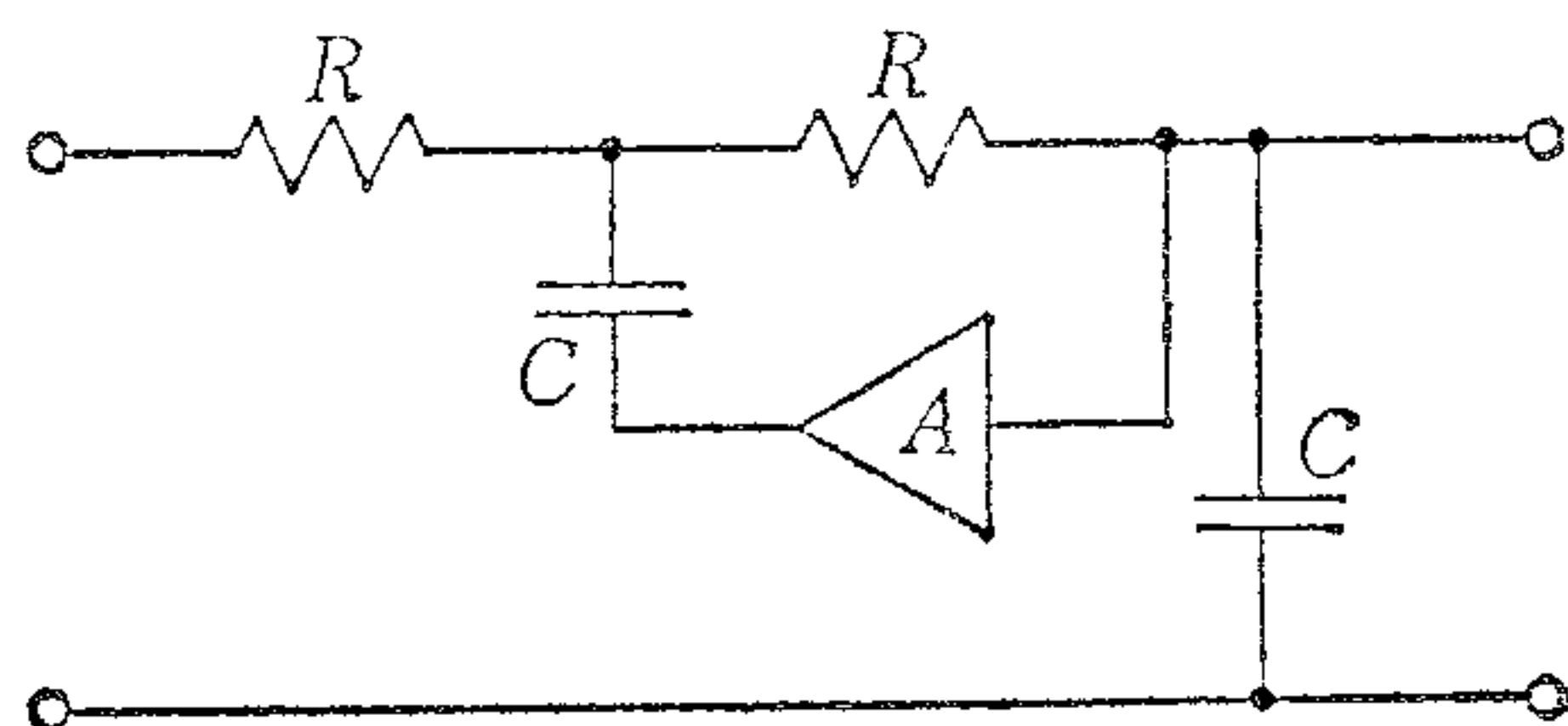
1)



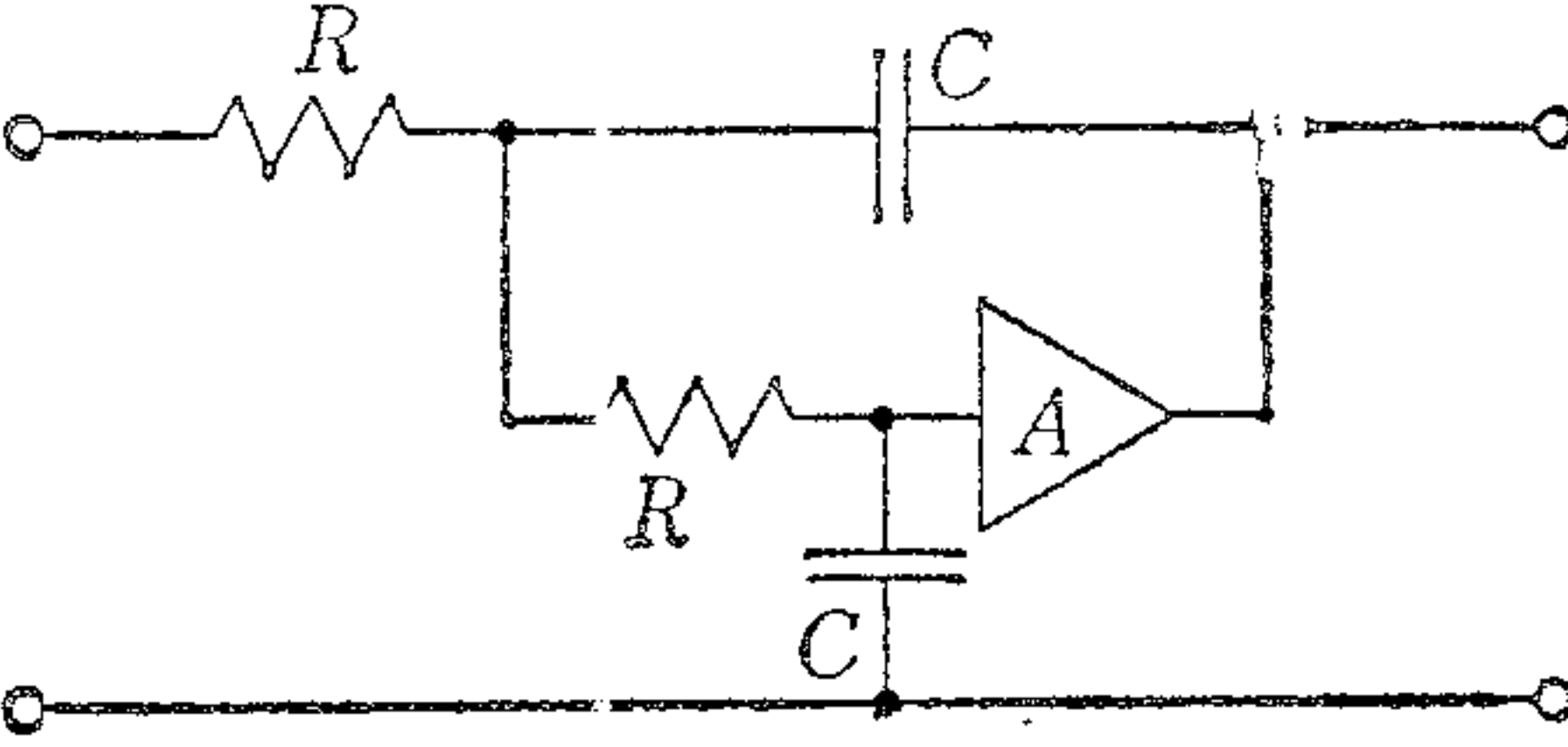
2)



3)



4)



5-4 正弦波入力の過渡現象

すでに5-1節で, 一般的な入力について過渡現象の問題を取上げたのであるが, 普通過渡現象の問題のうち, やや複雑なものとして扱われる正弦波入力の場合について, ここで考えて見ることにしよう。従来は一般に過渡現象を考える方法として, ヘビサイド法とか, 数学的に微分方程式を解くような方法がとられてきたが, このときは, Sを開閉する瞬間, つまり $t=0$ のときの位相角の取扱いが, 回路が特に簡単なものでない限り少々ややこしいことになる。ラプラス変換を使ったとしても, そう極端に簡単になるというわけではないが, しかし従来の方法よりははるかに簡単になるといえよう。

まず最も簡単な例から始めることにしよう。いま, 図5-22のような回路に入力として,

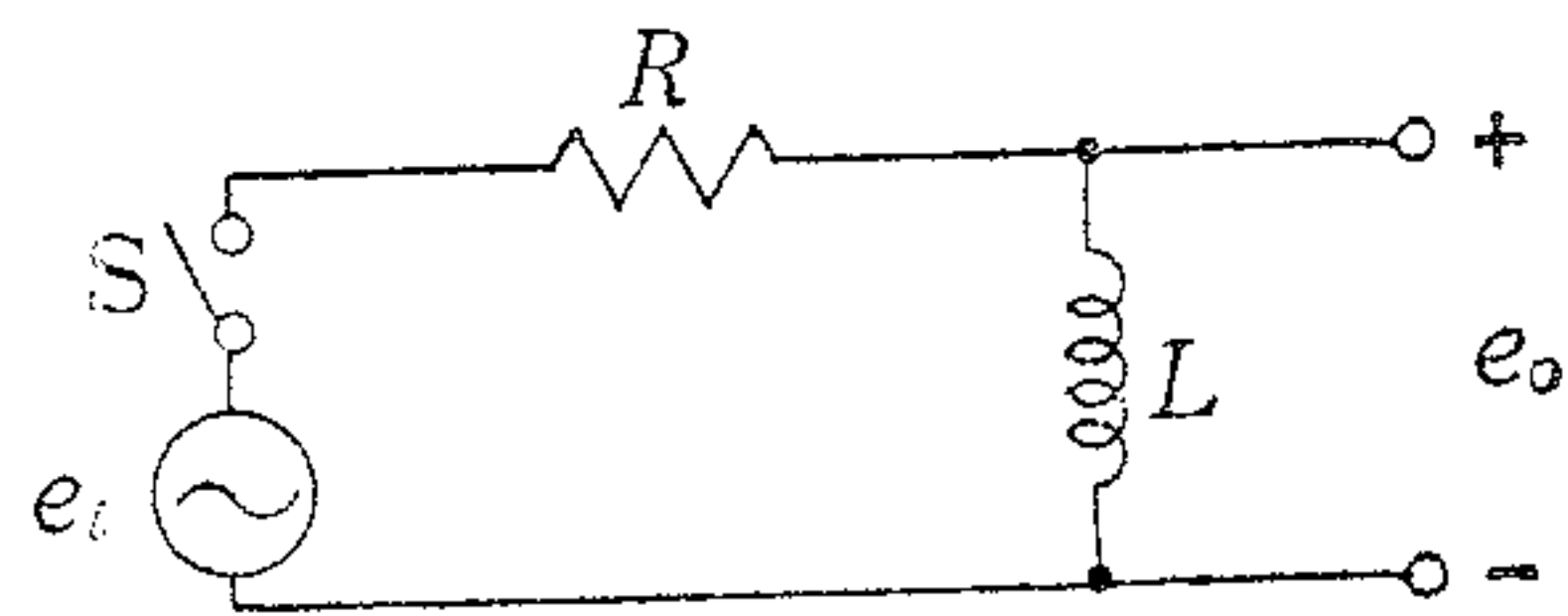


図 5-22

$$e_i = E \sin(\omega t + \theta) \dots\dots\dots (5-8)$$

という電圧を、 $t=0$ の瞬間にSを閉じて加える場合を考えて見よう。もしも e_o を求めることを目的とする問題であるとすれば、この回路の伝達関数は

$$F_T = \frac{sL}{R+sL} = \frac{sL/R}{1+sL/R}$$

であるから、入力 E_i が確認できればよいわけである。

(5-8)式の入力の θ の処理が問題なのであるが、実はこの θ は特に固有のものではなく、 $t=0$ をどこにとるかによって定まるものである。すなわち $(\omega t + \theta)$ が $2n\pi$ に等しいときには、 $\theta=0$ と考えてよいことになり、単に ωt と書いてよいのであって、その場合には基本公式 V を使うことになるのである。ここでの問題は、 $t=0$ つまりスイッチを閉じる瞬間に入力の位相がどこにあるかが鍵なのであるが、正しくは、むしろ基本公式 V が使える場合の方が例外であって、一般には正弦波の場合には常に θ を考えなくてはならないといえよう。

しかし、 θ を考えたとしても、そうたいしたことではなくほんの少しだけ繁雑なだけである。(5-8) 式をラプラス変換して見よう。

$$\mathcal{L}[E \sin(\omega t + \theta)] = E \mathcal{L}[\sin \omega t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega t]$$

ここで、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ は定数であることに注目すればよいのである。 θ は $t=0$ のときの位相角であるから、問題としては当然 θ の大きさが条件として与えられていなければならないからである。

基本公式 V, VIによって、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E \sin(\omega t + \theta)] &= E \cos \theta \mathcal{L}[\sin \omega t] + E \sin \theta \mathcal{L}[\cos \omega t] \\ &= \frac{E \cos \theta}{\omega} \cdot \frac{1}{1+s^2/\omega^2} + \frac{E \sin \theta}{\omega} \cdot \frac{s/\omega}{1+s^2/\omega^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[E \sin(\omega t + \theta)] = \frac{E}{\omega^2} \cdot \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{1+s^2/\omega^2} \dots\dots\dots (5-9)$$

ということになる。この式を E_i として、前記の伝達関数に掛ければよいのである。したがって E_o の式は、

$$\begin{aligned} E_o &= \frac{EsL}{\omega^2 R} \cdot \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{(1+sL/R)(1+s^2/\omega^2)} \\ &= \frac{EL \cos \theta \cdot s(1+s \tan \theta/\omega)}{\omega R(1+sL/R)(1+s^2/\omega^2)} \end{aligned}$$

ということになり、公式の No. をつけると-1111 ということになる。巻末公式集にはないが、分割をすれば逆変換は可能である。

【例題 5-13】

図5-23において、 $t=0$ でSを閉じたときの出力 e_o の式を求めよ。ただし、 $e_{c0}=0$ および $e_i=2 \sin(2t+45^\circ)$ とする。

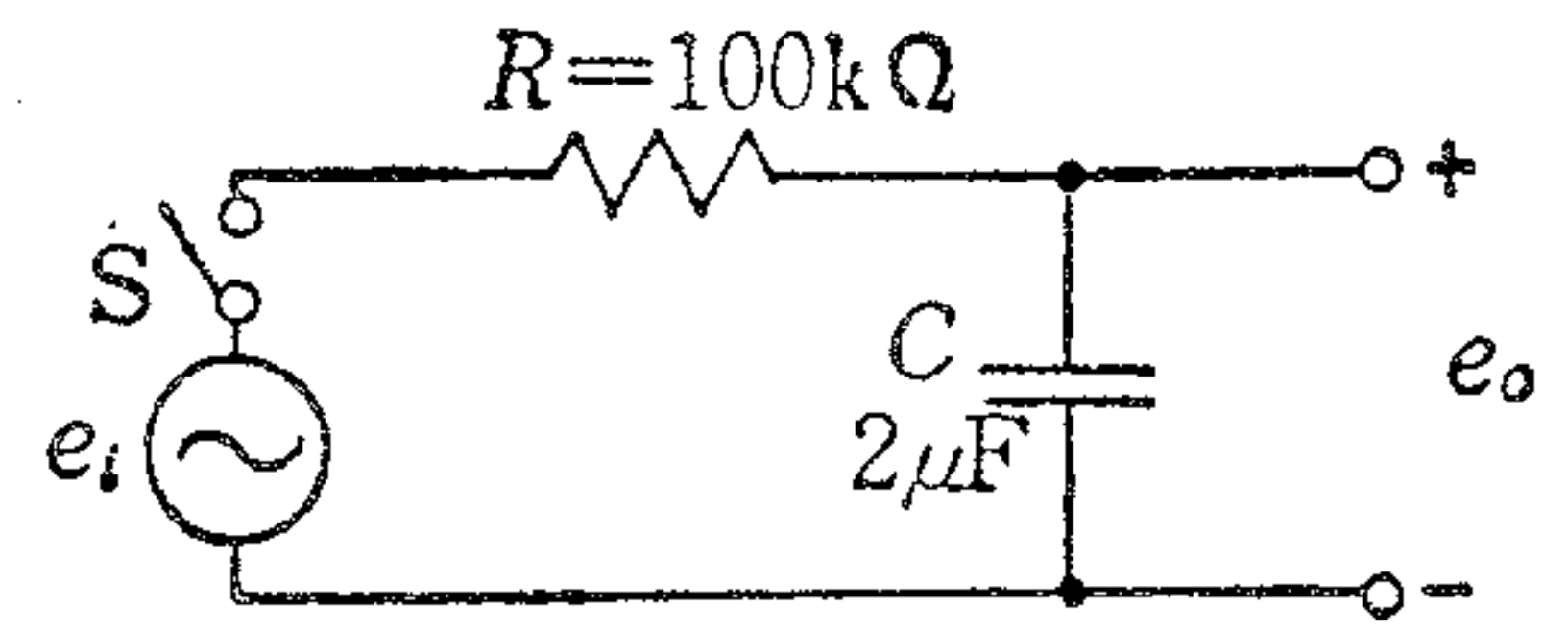


図 5-23

(5-9)式によって E_i を求めると、

$E=2$, $\omega=2$, $\theta=45^\circ$ であるから、

$$\cos \theta = 1/\sqrt{2} \quad \sin \theta = 1/\sqrt{2}$$

これらを代入して、

$$E_i = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1/\sqrt{2} + s \cdot 1/\sqrt{2}}{1 + s^2/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + s/2}{1 + s^2/4}$$

回路の伝達関数はきわめて簡単で

$$F_T = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + sCR} = \frac{1}{1 + 0.2s}$$

$$\therefore E_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + 0.5s}{(1 + 0.2s)(1 + s^2/4)}$$

この式は公式1110Bに該当する。公式において、

$$a=0.5 \quad T=0.2 \quad \omega_1=2$$

$$T-a=-0.3 \quad T\omega_1=0.4 \quad a\omega_1=1$$

$$B=1+T^2\omega_1^2=1.16 \quad P=1+a^2\omega_1^2=2$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} a\omega_1 = 45^\circ$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} T\omega_1 = \tan^{-1} 0.4 \doteq 21.8^\circ$$

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \doteq 23.2^\circ$$

$$\therefore \sqrt{2} e_o = \frac{-1.2}{1.16} \varepsilon^{-5t} + 2 \left(\frac{2}{1.16} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(2t + 23.2^\circ)$$

$$\therefore e_o \doteq -0.7315 \varepsilon^{-5t} + 1.8570 \sin(2t + 23.2^\circ)$$

【例題 5-14】

図5-24の回路で、 $t=0$ でSを閉じたときの e_o の式を求めよ。ただし $e_{c0}=0$ および、 $e_i=10 \sin(10t+60^\circ)$ とする。

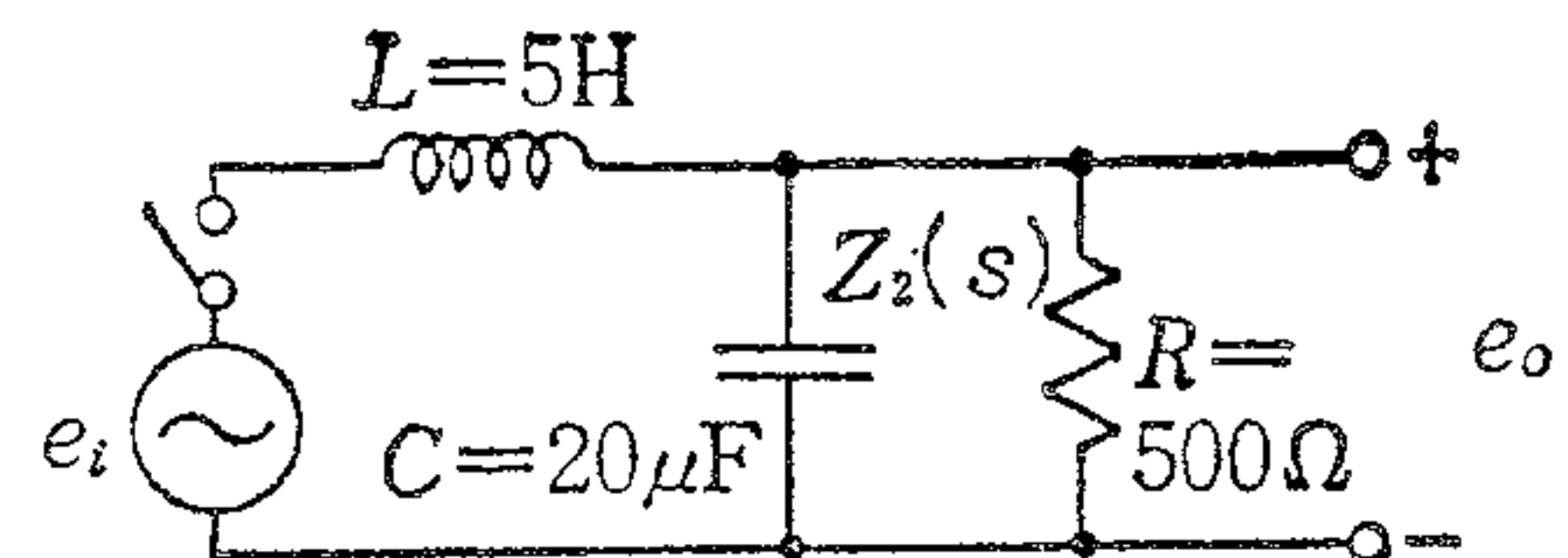


図 5-24

この場合は、まず伝達関数から求めて見ることにしよう。図に示した並列部分のインピーダンス $Z_2(s)$ は

$$Z_2(s) = \frac{R/sC}{R+1/sC} = \frac{R}{1+sCR}$$

$$\begin{aligned} \therefore F_T &= \frac{Z_2(s)}{sL+Z_2(s)} = \frac{\frac{R}{1+sCR}}{sL+\frac{R}{1+sCR}} \\ &= \frac{R}{R+sL+s^2LCR} = \frac{1}{1+sL/R+s^2LC} \end{aligned}$$

回路定数を代入して

$$F_T = \frac{1}{1+s/10^2+s^2/10^4}$$

次に E_i を求める。(5-9)式において,

$E=10$, $\omega=10$, $\theta=60^\circ$ であるから,

$$\cos 60^\circ = 1/2, \quad \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\therefore E_i = \frac{1}{10} \cdot \frac{10 \times 1/2 + \sqrt{3}/2 \cdot s}{1+s^2/10^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}s/10}{1+s^2/10^2}$$

したがって出力 E_o は

$$E_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}s/10}{(1+s^2/10^2)(1+s/10^2+s^2/10^4)}$$

公式 1200C において,

$$a = \sqrt{3}/10 \quad \omega_1 = 10 \quad \omega_2 = 100 \quad d = 1/2 \quad D = \sqrt{3}/2$$

$$a\omega_1 = \sqrt{3} \quad a\omega_2 = 10\sqrt{3} \quad \omega_1\omega_2 = 1000$$

$$J^2 = 4d^2\omega_1^2\omega_2^2 = 10^6 \quad P_1 = 1 + a^2\omega_1^2 = 4 \quad G = -9900$$

$$R_2 = 1 - 2ad\omega_2 + a^2\omega_2^2 = 1 - 10\sqrt{3} + 300 = 301 - 10\sqrt{3}$$

$$d\omega_2 = 50 \quad \omega_2 D = 50\sqrt{3} \quad ad\omega_2 = 5\sqrt{3} \quad Q_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} a\omega_1 - \tan^{-1} \frac{J}{-G} = \tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} \frac{1000}{9900} \doteq 54.23^\circ$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{a\omega_2 D}{Q_2} - \tan^{-1} \frac{-2d\omega_2^2 D}{G + 2d^2\omega_2^2} = \tan^{-1} \frac{15}{1 - 5\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{-5000\sqrt{3}}{-4900}$$

$$\doteq -123.45^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore 2e_o &= \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{G^2+J^2}} \left[\omega_2 \sqrt{P_1} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{\omega_1}{D} \sqrt{R_2} \varepsilon^{-d\omega_2 t} \sin(\omega_2 D t + \phi_2) \right] \\ &= \frac{1000}{9950.38} \left[200 \sin(10t + \phi_1) + \frac{20}{\sqrt{3}} \sqrt{301 - 10\sqrt{3}} \varepsilon^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t + \phi_2) \right] \end{aligned}$$

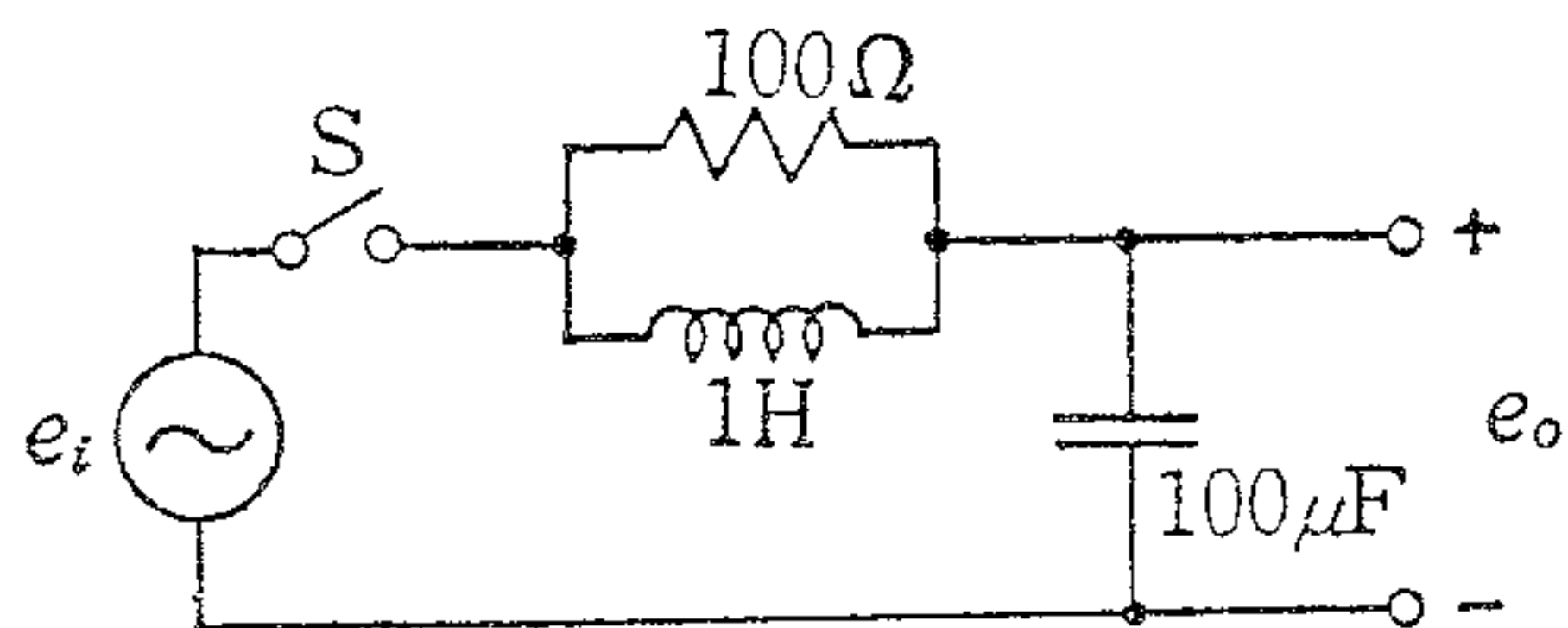
$$\therefore e_o = 10.05 \sin(10t + 54.23^\circ) + 9.77 \varepsilon^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t - 123.45^\circ)$$

以上のように、多少厄介ではあるが解を求めることは可能である。このことを次の問題を実際に解いて見て、確かめてほしいと考える。

【問題 5-4】

下記の回路について、付記した条件によって出力電圧 e_o の式を求めよ。

1)

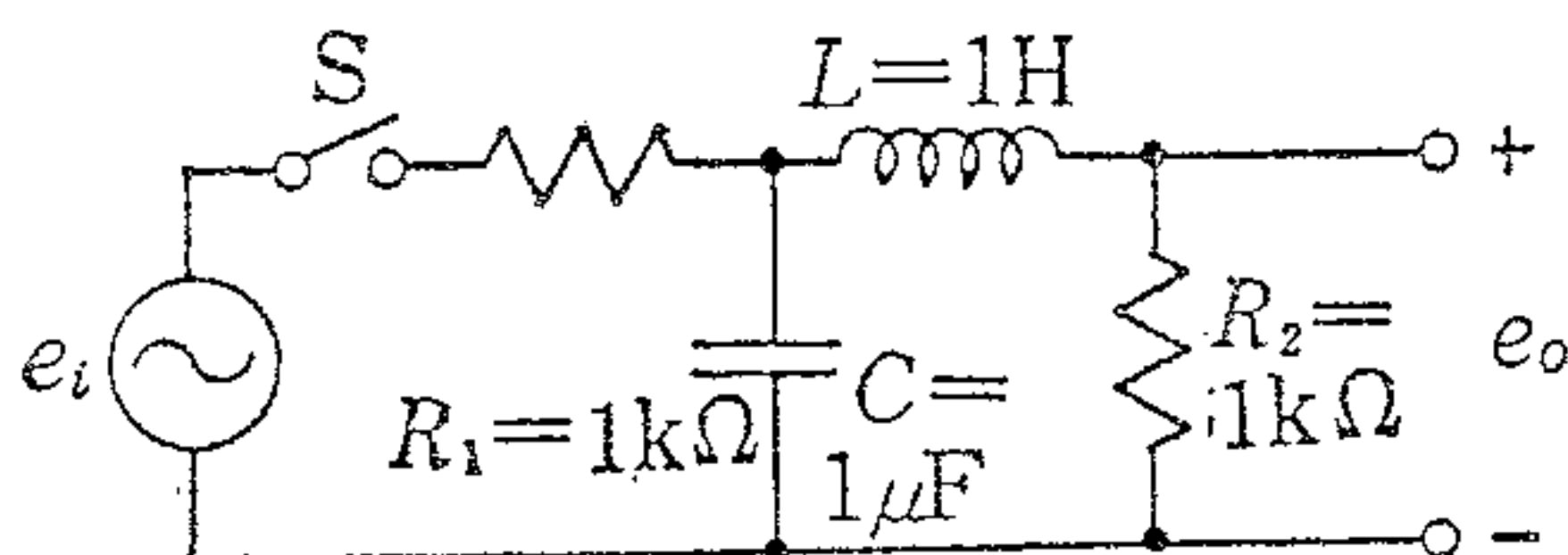


$t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

$$e_i = 10 \sin(10t + 90^\circ)$$

$$e_{C_0} = 0$$

2)



$t=0$ で $S \rightarrow \text{on}$

$$e_i = 2 \sin(1000t + 45^\circ)$$

$$e_{C_0} = 0$$

5-5 その他の伝達関数の例

電気関係といってもきわめて範囲が広く、多くの例をあげることは不可能であるから、ここでは考え方を知ってもらうために二、三の例について伝達関数を取上げて見よう。

5-5-1 増幅器

すでに、5-3 節で増幅器を含む場合について取扱ってきている。しかしあの場合には、入力インピーダンスが ∞ で出力インピーダンス 0 というような、きわめて特別な取扱いをしてきた。もちろん回路の条件によっては近似的にそのような取扱いが可能であるから、あのような考え方ができるのであるが、現実には一体どうなのであろうか。

増幅器については、真空管、トランジスタなどの電子素子と、その前後の入出力回路が含まれる。さらに増幅器として働かせるためのエネルギー源としての直流電源回路も含まれているのであるが、信号の流れとして入力と出力の関係だけについて考える場合には、電源回路については考えなくてもよいが、入力回路と出力回路を無視することは、現実には相当むずかしいことである。

たとえば、5-3 節で取扱った増幅度 A は

$$A = \left| \frac{e_o}{e_i} \right|$$

という形で定義されるが、この絶対値のみでは位相の関係もわからないし、取扱う信号の波形との関係もわからないのである。

増幅器の入出力回路は CR 回路になっていることが多いし、特に CR 微分回路の場合が

多いから、信号の変化の速さ (ω の大小) によって、 A の大きさも位相のずれの大きさも変化するはずである。

5-3 節では、むしろ数学的に理想増幅を考えたのであるが、現実には、自動制御回路などでも、このような形の増幅器を考えることが多いのである。これらの場合には、

$$F_T = A, (\text{または } -A) \dots\dots\dots (5-10)$$

として考えているが、本来はこのようなことが可能な周波数 (変化速度) の幅はきわめて小さいのである。

数学的にはあまり許されないことではあるが、工学の分野ではきわめてしばしば利用される近似の問題なのである。信号の変化が入出力回路によって影響を受ける程度が少ないときに限って (5-10) 式が成立するものであることを注意しておきたいのである。

信号の変化の範囲が大きいときには、到底 (5-10) 式とか、5-3 節のような取扱いは不可能であって、入出力回路を含めた等価回路を作って、正確に伝達関数を求めなければならない。

5-5-2 可動線輪形計器

話が少し飛ぶようであるが、一つの例として、メータの入力電流と指針角度間の伝達関数を考えて見ることにしよう。この例はモータなど回転機の伝達関数を考える場合にも有効なものであると考えられる。

図5-25を見てほしい。

いま

磁束密度を B [W/m²]

coil の幅を a [m]

coil の縦長を b [m]

巻数を n [回]

電流を i [A]

とすれば、これによって生ずる電磁力 F は

$$F = B i b n \quad [\text{N}]$$

したがって、駆動トルク t は

$$t = 2 \times \frac{a}{2} \times F = a b n B i = K i \quad [\text{N-m}]$$

一方、コイルには慣性モーメント J と、さらに摩擦など回転速度に比例する抵抗と、回転角 θ に比例する抗力をもつばねの支持がある。

ここでも回路の基本式 (5-1) 式と同様に 回転力 = 逆回転力 という関係を考えることができるはずだから

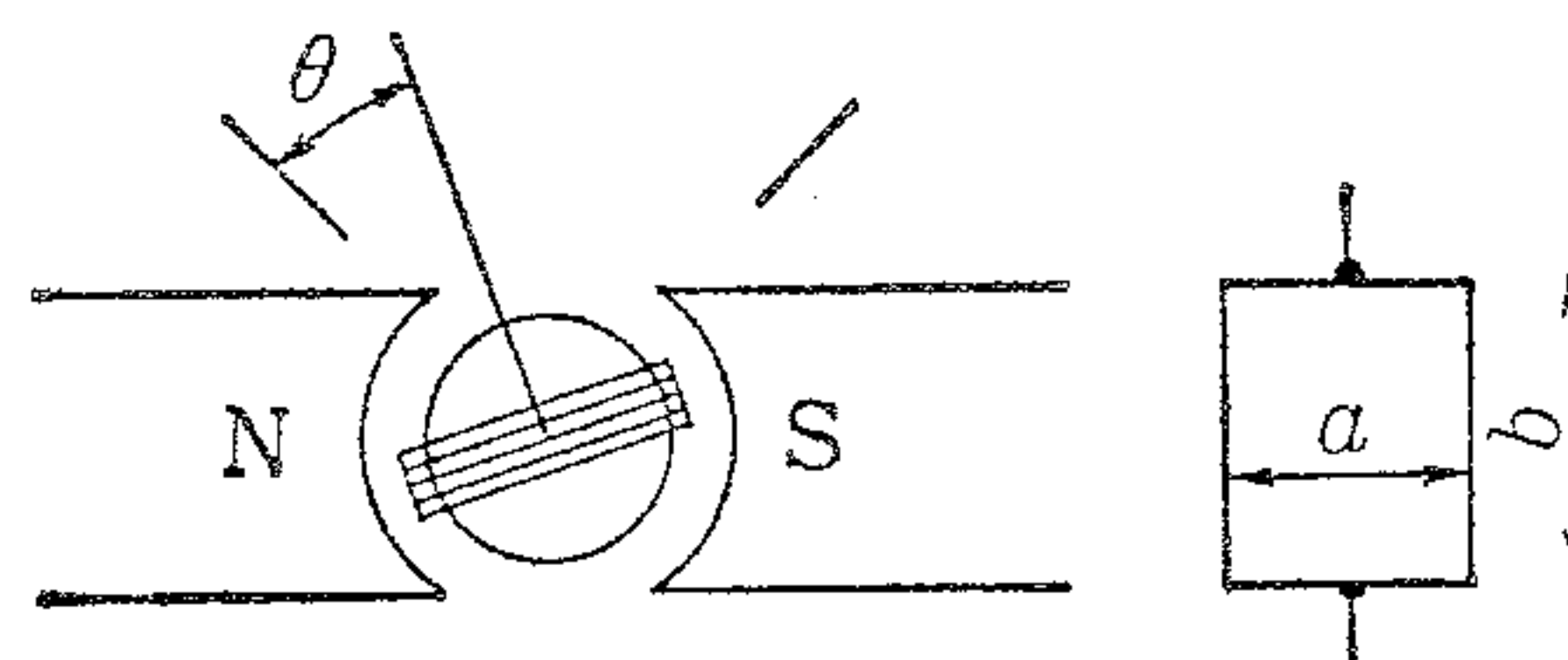


図 5-25

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + A\theta = t = Ki$$

という微分方程式ができることになる。この式をラプラス変換して(初期値0として),

$$Js^2\theta + Bs\theta + A\theta = T = KI$$

$$\therefore F_T = \frac{\theta(s)}{I} = \frac{K}{A + Bs + Js^2} \dots\dots\dots (5-11)$$

ただし, A はばねの係数, B は摩擦とか風損の係数。

この微分方程式は, トルクの部分を変え, ばねを取り去れば, モータについても成立するが, そのときには出力は θ ではなく回転速度または回転数となる。

5-5-3 他励発電機

図5-26のような他励発電機が, 他の回転機によって一定速度で回転しているとすれば, その出力電圧 e_o は, 入力 e_i によって流される界磁電流 i に比例すると考えられる(正しくは一定の範囲で)。

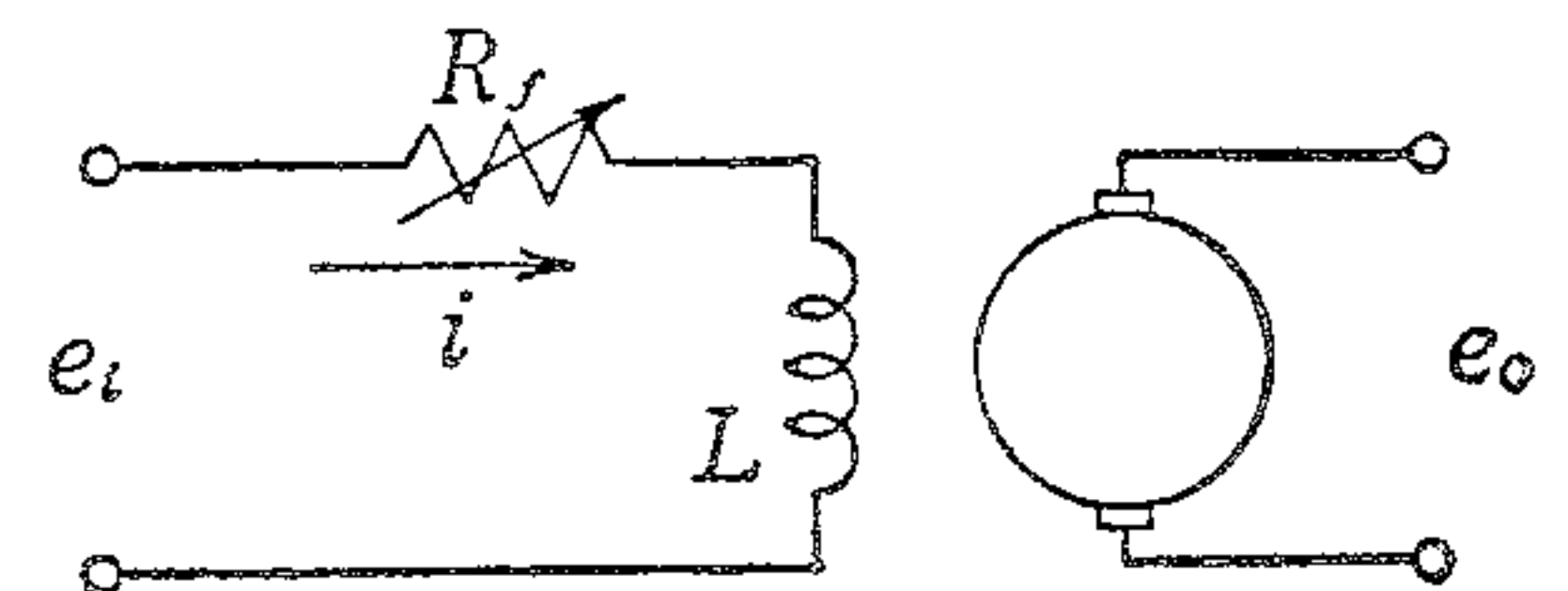


図 5-26

いま, 発電機の回転子と界磁との間の相互作用などを無視すれば

$$\begin{cases} e_i = L \frac{di}{dt} + Ri \\ e_o = ki \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} E_i = sLI + RI \\ E_o = kI \end{cases}$$

したがって,

$$F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{k}{R + sL} = \frac{k}{R} \cdot \frac{1}{1 + sL/R} \dots\dots\dots (5-12)$$

その他にも多くの場合があろうが, いずれの場合にも, その使用目的によってかなり大幅な近似とか条件づけによって伝達関数を求めることが多いのである。したがって, これらの近似条件などを常に考慮しておかなければならないであろう。

本節を足がかりとして, 力学系の場合について少しだけ説明を加えて見ようと思う。

§ 6. 力学系での応用

第5章の最初に述べたように、ラプラス変換の利用は、電気工学に限らず微分方程式を取扱う他の力学系工学においても同様にきわめて有効である。中でも特に自動制御工学などは、まさに共通の問題として相互に利用し合っているし、また振動を取扱う機械、土木、建築などの分野でも全く同様なことがいえるであろう。

ここでは、電気工学を専攻する読者にも参考となる配慮の下に、力学系の問題についてのラプラス変換の利用を扱って見よう。もちろん著者の能力の範囲内でのことで、ほんの入口のことにすぎないが、このことは容認していただきたいと思う。

6-1 基本要素の伝達関数

力学的な要素の中には、電気回路の要素と比べてその動作が非常によく似ているものが多いのであるが、ここでは、伝達関数がまったく同じような形になるものについて、対比しながら説明を加えて見ることにしよう。

6-1-1 シリンダ機構

図6-1は、油とか水や空気などによってピストンを左右に動かすシリンダ機構であって、鉄道車両のブレーキ操作機構などとして多く使用されているものである。

いま、流体をaから流入させ、ピストンを右に動かす場合について考えよう。

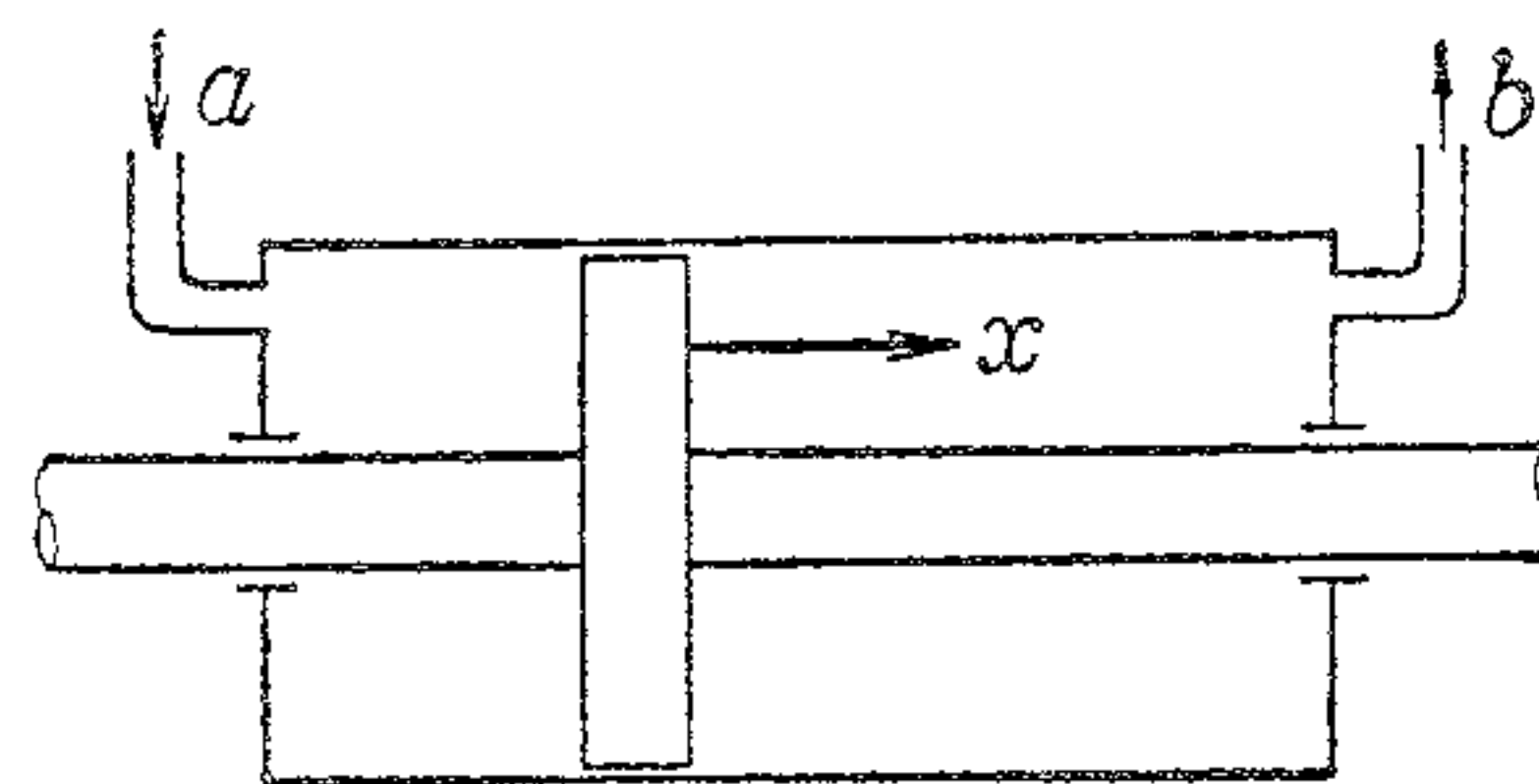


図 6-1

aから流入する流体の量が毎秒 $q \text{ m}^3$ であるときに、ピストンが右へ $x \text{ m}$ 移動するものとすれば、

$$x = \frac{1}{A} \int q dt \dots\dots\dots (6-1)$$

ただし A はシリンダの断面積 $[\text{m}^2]$ である。いま、この式で $t=0$ のときのピストンの位置を基点と考え、 $\int q dt = 0$ とすれば、

$$X = \frac{1}{A} \cdot \frac{Q}{s}$$

ここで、流入量 Q と変位 X の間の伝達関数を求めると

$$F_T = \frac{X}{Q} = \frac{1}{sA} \dots\dots\dots (6-2)$$

すでに読者は (6-1) 式がコンデンサ C の逆起電力の式

$$e_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

とまったく同じ形であることに気づいておられることと思う。この場合には、

| | | |
|---------|---|----------|
| 流量 q | と | 電流 i |
| 断面積 A | と | 静電容量 C |
| 変位 x | と | 電圧 e |

が対比される。コンデンサの場合と同様に、このシリンダ機構は流量 q に対して積分要素として動作するものである。

6-1-2 ダッシュポット

ダッシュポットは図6-2のような形でピストンに孔を開け、ポットの中の流体の粘性によってピストンの移動速度に比例した抵抗力を生じさせる機構で、ドアが急に閉じるのを防ぐ装置などとして広く利用されている。

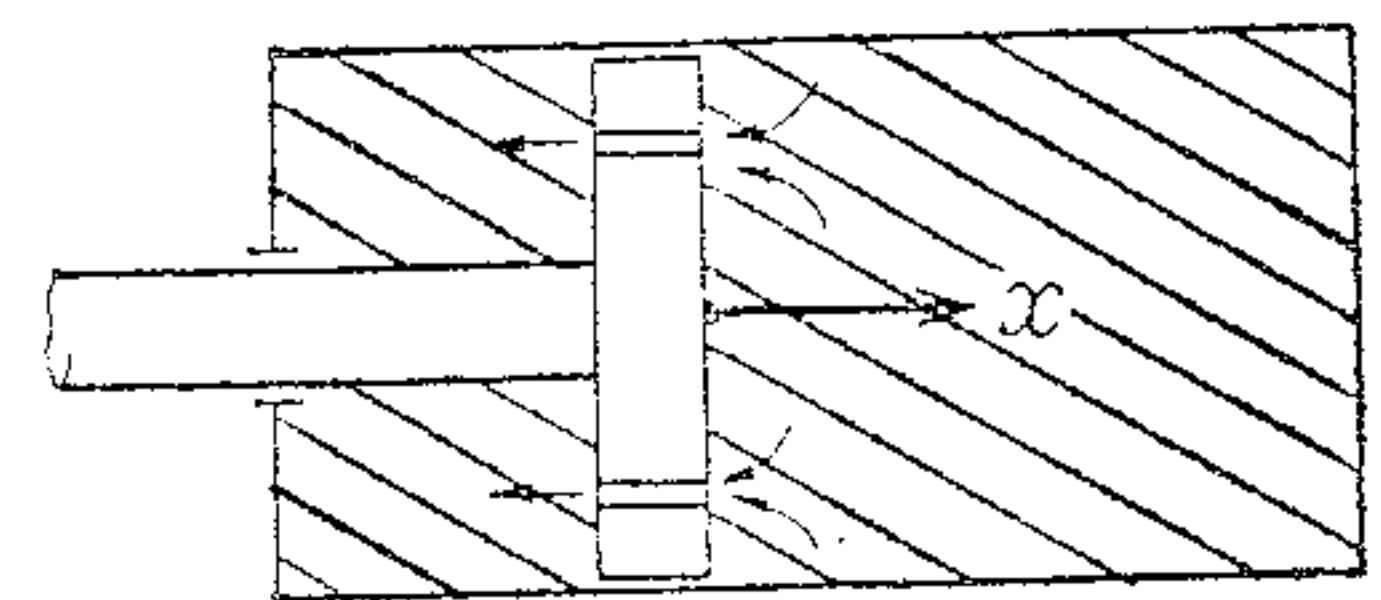


図 6-2

ピストンの変位 x 、抵抗力 r の間の伝達関数を求めると、
まず

$$r = \rho \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (6-3)$$

ただし ρ は粘性による抵抗係数とする。したがって

$$R = \rho s X$$

$$\therefore F_T = \frac{R}{X} = s\rho \dots \dots \dots (6-4)$$

ここでも、(6-3)式は L の逆起電力の式

$$e_L = L \frac{di}{dt}$$

と同じ形であることは明らかで、ダッシュポットは変位 x に対して、微分要素として働く抵抗力機構であることがわかっていただけただけのことと思う。

6-1-3 ばね

図6-3のようなつる巻きばねを考えるとしよう。このようなばねは、周知のように変位 x に比例した復元力または抵抗力 f_r を生ずる。

$$f_r = Kx \dots \dots \dots (6-5)$$

$$\therefore F_T = \frac{F_r}{X} = K \dots \dots \dots (6-6)$$

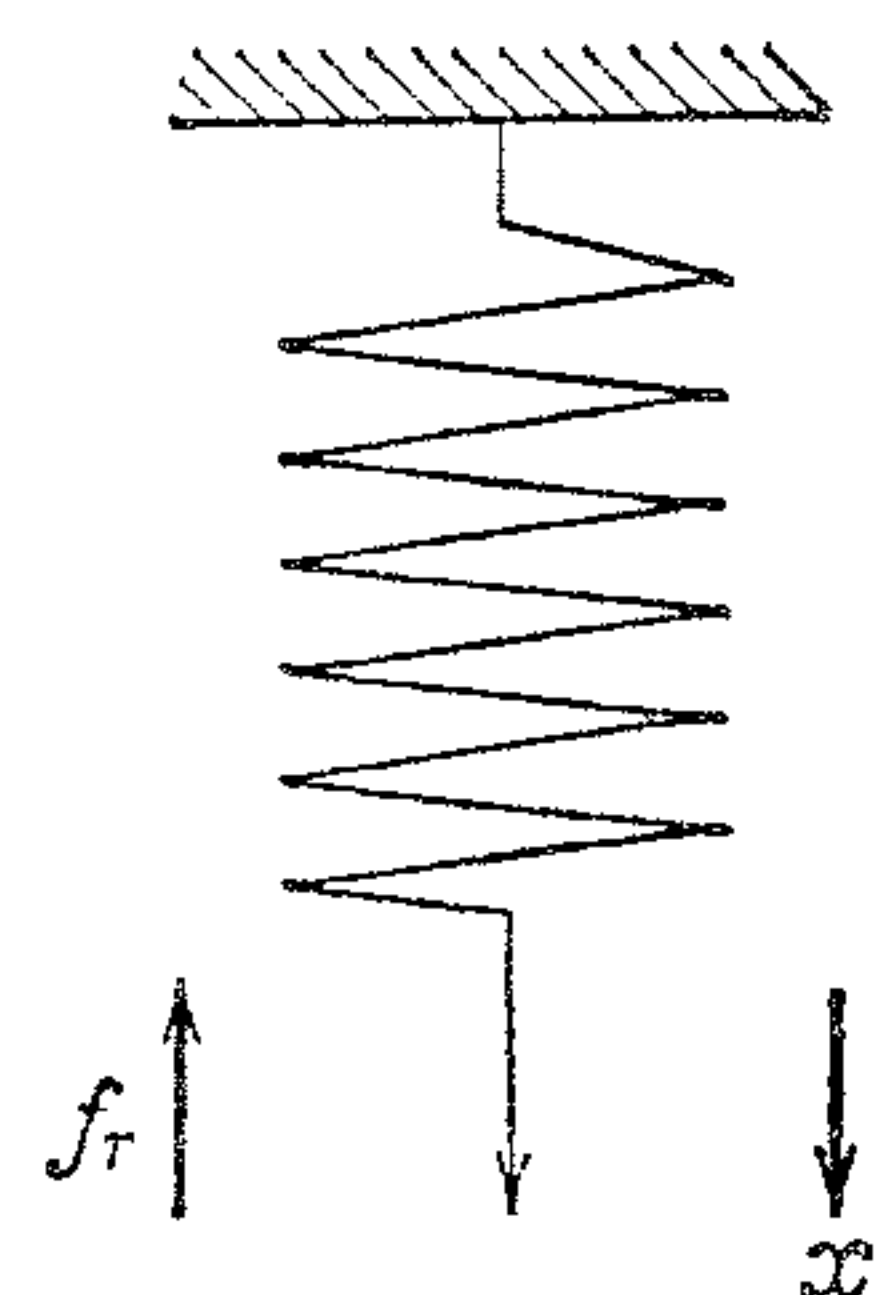


図 6-3

という形となって $e_R = Ri$ の形に対応するものであることがおわかりいただけたと思う。

以上のような単一の要素は、それだけでは伝達関数を考える意味も小さいし、利用範囲も狭い。実際にはこれらの組み合わせが問題なのである。

以上の外にも多くの要素があるがここでは扱わない。ただちに組合わせた場合について考えて見ることにしたい。

6-2 簡単な組合わせの伝達関数

6-2-1 ダッシュポットとばね

いま、この両者を図 6-4 のように組合わせ、図のようにピストンを動かした場合、ダッシュポットはどう動くかという問題を考えることにしよう。

いま、ピストンの変位を x とすると、これに対してまずダッシュポットの抵抗力 r が働くと共に、その変位 y に対してばねの抵抗力 f_r が働くことになるのである。

まず、ピストンとダッシュポットの相対変位は $(x-y)$ であるから、ダッシュポット内の粘性による抵抗係数を ρ とすれば、その抵抗力 r は、

$$r = \rho \frac{d}{dt}(x-y)$$

であると共に、その反動として同じ力がばねに加えられているはずである。しかるに、ばねの変位は y であるから、 $r = f_r$ の式は

$$\rho \frac{d}{dt}(x-y) = Ky \dots \dots \dots (6-7)$$

となり、この式を初期値を 0 としてラプラス変換すれば、

$$\rho(sX - sY) = KY$$

$$\therefore F_T = \frac{Y}{X} = \frac{\rho s}{K + \rho s} \dots \dots \dots (6-8)$$

となり、ピストンとダッシュポットの変位間の伝達関数が求められる。

この式は、電気回路における CR または RL 微分回路の伝達関数である

$$F_T = \frac{sCR}{1+sCR} \text{ or } F_T = \frac{sL}{R+sL}$$

と同じ形であり、同様に微分動作をするものであることがわかる。

ちなみに x の大きさをダッシュポットおよびばねの有効範囲内で D とすれば、ダッシュポットの動きは図 6-5

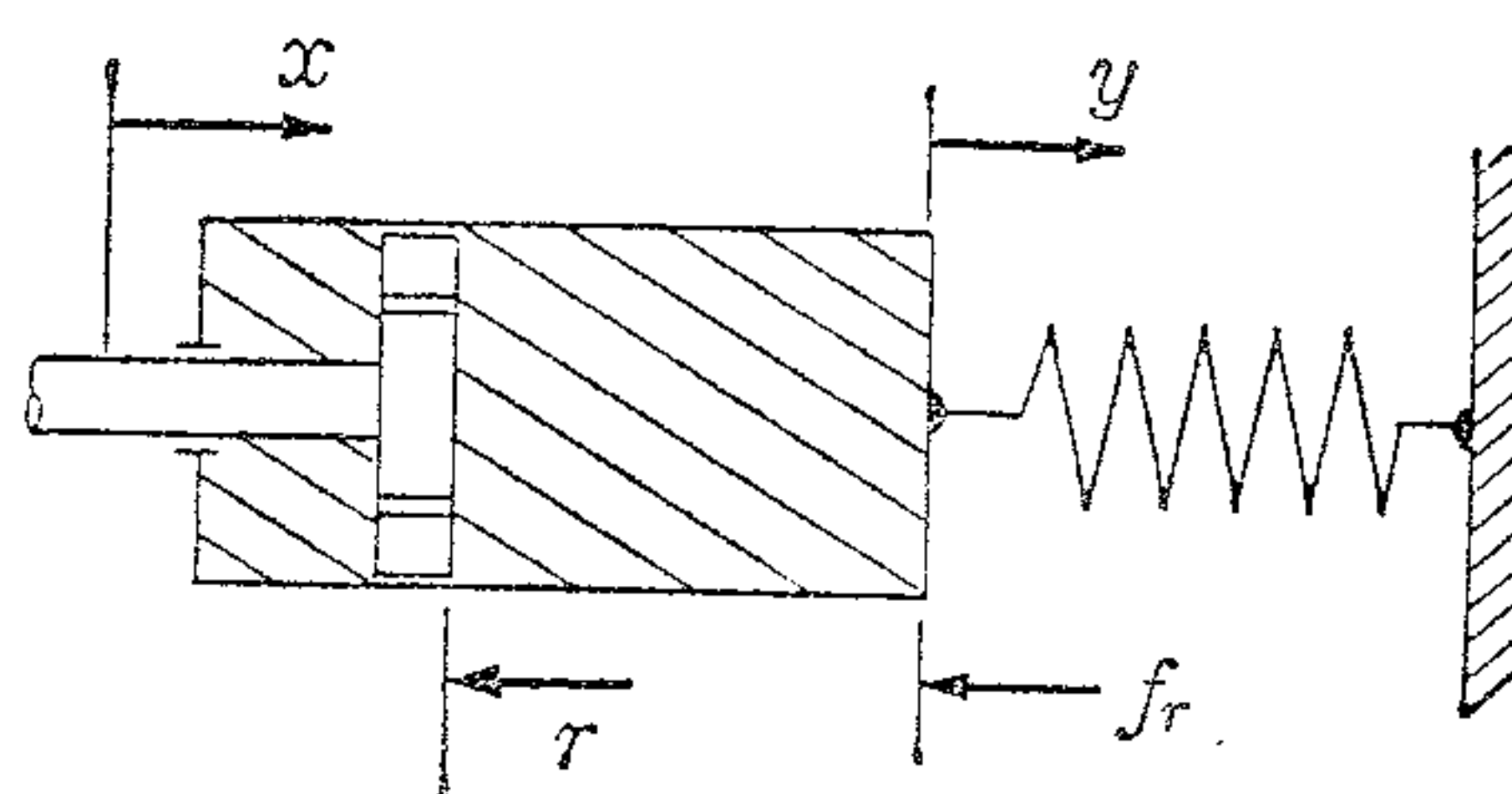


図 6-4

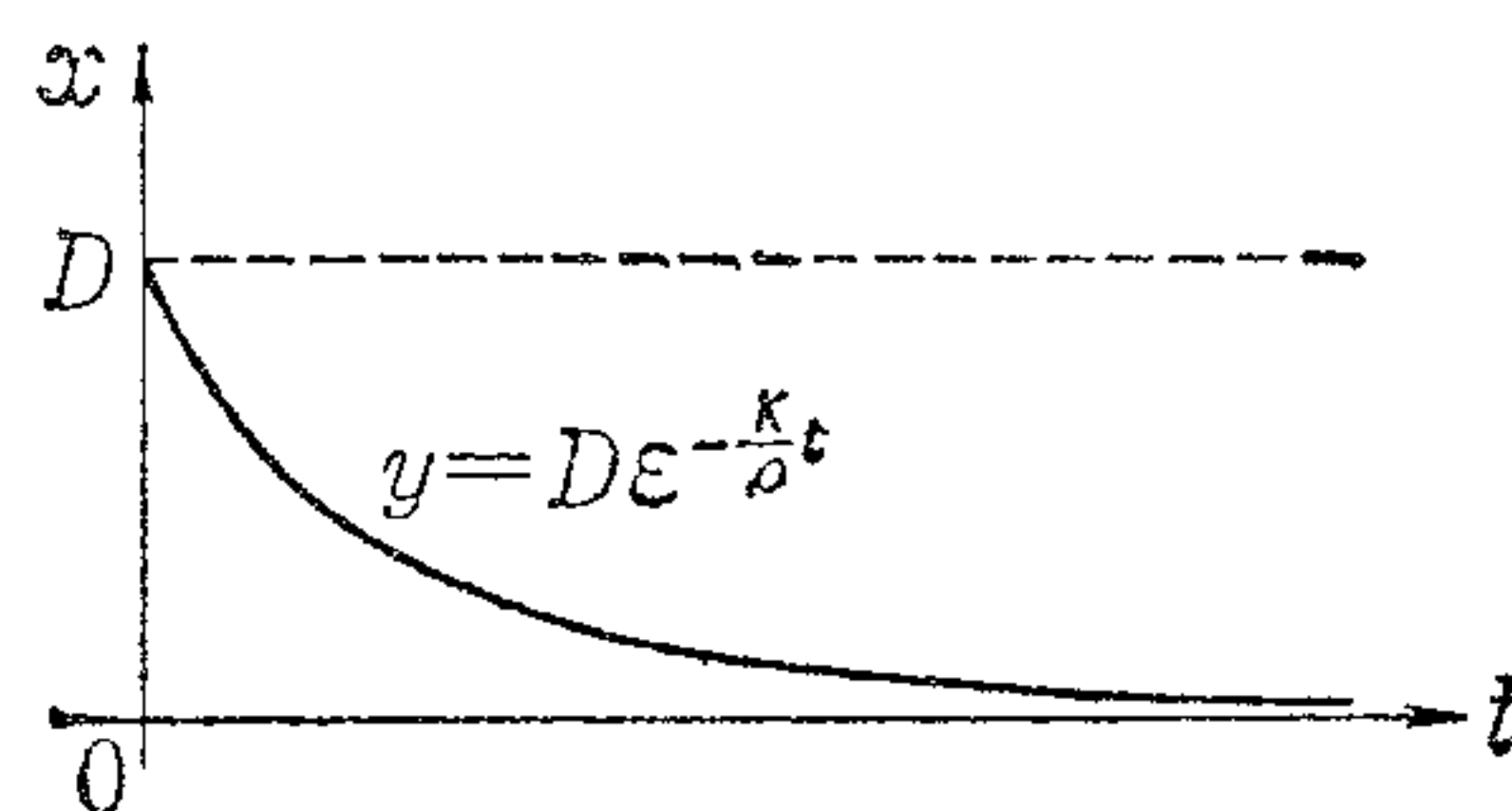


図 6-5

のようになるはずである。ただし、この場合はピストンを瞬間的に D だけ動かしたことになるが、現実にはそうはならないようである。

6-2-2 ばねと質量と外力

図6-6のように、ばねに質量 m の物体を結合し、これを外力 f で引張るとき、 m がどういう速度で動くのか、つまり、力 f に対する m の速度の伝達関数を考えて見よう。ただしこの場合、 m の支持台の摩擦を考えないことにする。

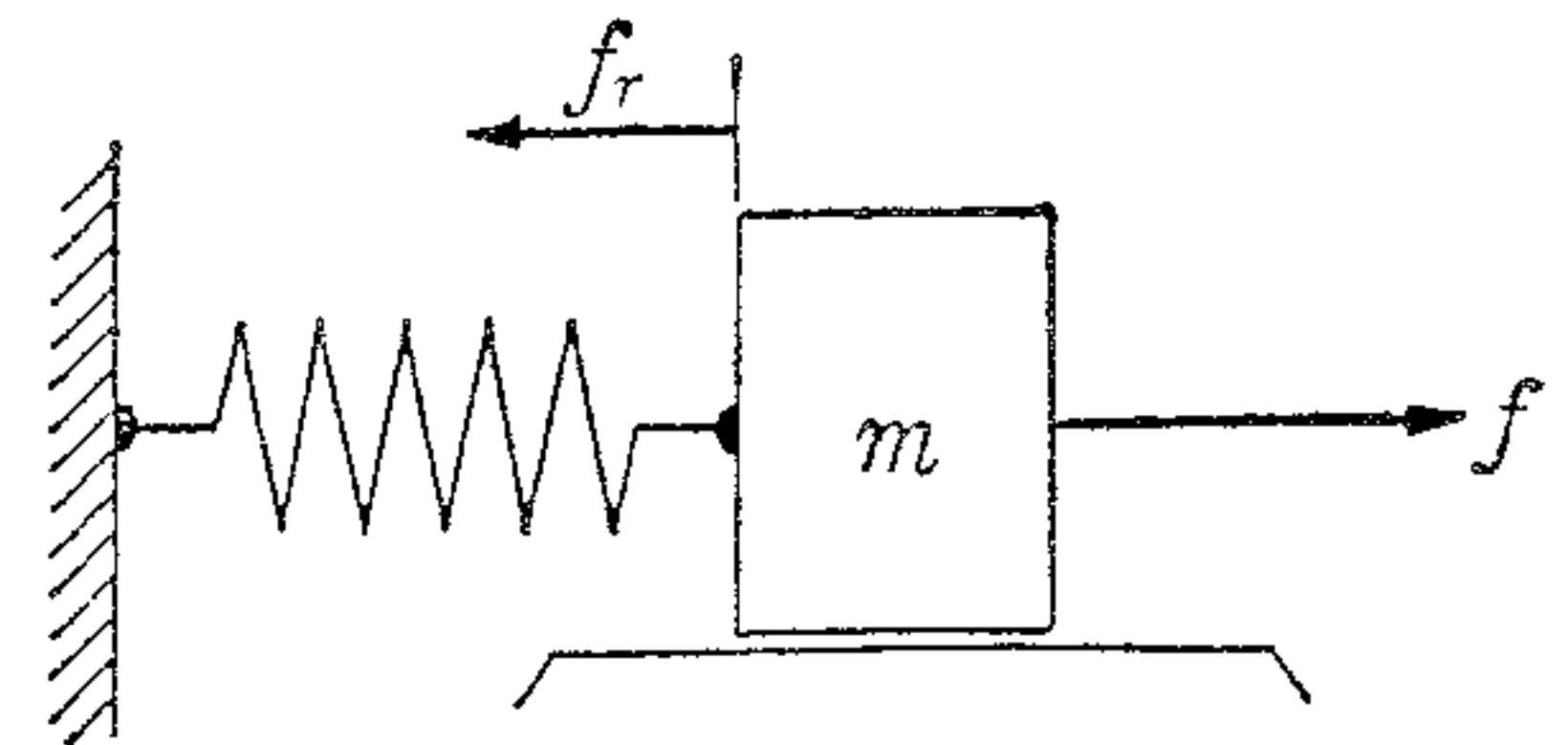


図 6-6

力学的にこの摩擦を考えないということは、この場合重力の問題を除外して考えるということなので、 x の方向についてだけ式を作ればよいことになる。とすれば、この場合はニュートンの運動方程式にばねの力を加算すればよいから、

$$f = m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx \quad \dots\dots\dots (6-9)$$

初期値を考えないとすれば

$$F = m s^2 X + KX \quad \dots\dots\dots (A)$$

一方、速度 $v = dx/dt$ は、 $V = sX$ となるから、力と速度の伝達関数は、

$$F_T = \frac{V}{F} = \frac{s}{K + m s^2} \quad \dots\dots\dots (6-10)$$

同様に、力と変位 X との伝達関数はA式から、

$$F_T = \frac{X}{F} = \frac{1}{K + m s^2}$$

となる。現実にはどういう変位、どういう速度となるかは、力 f の加え方によって定まることはいうまでもないことである。

6-2-3 ばねと質量とダッシュポット

図6-7のような組合わせを考える。前例と同じように、 m の摩擦は考えないものとして、 f という力で m を右へ動かした場合には、その速度と位置について考えるものとする。この場合には、

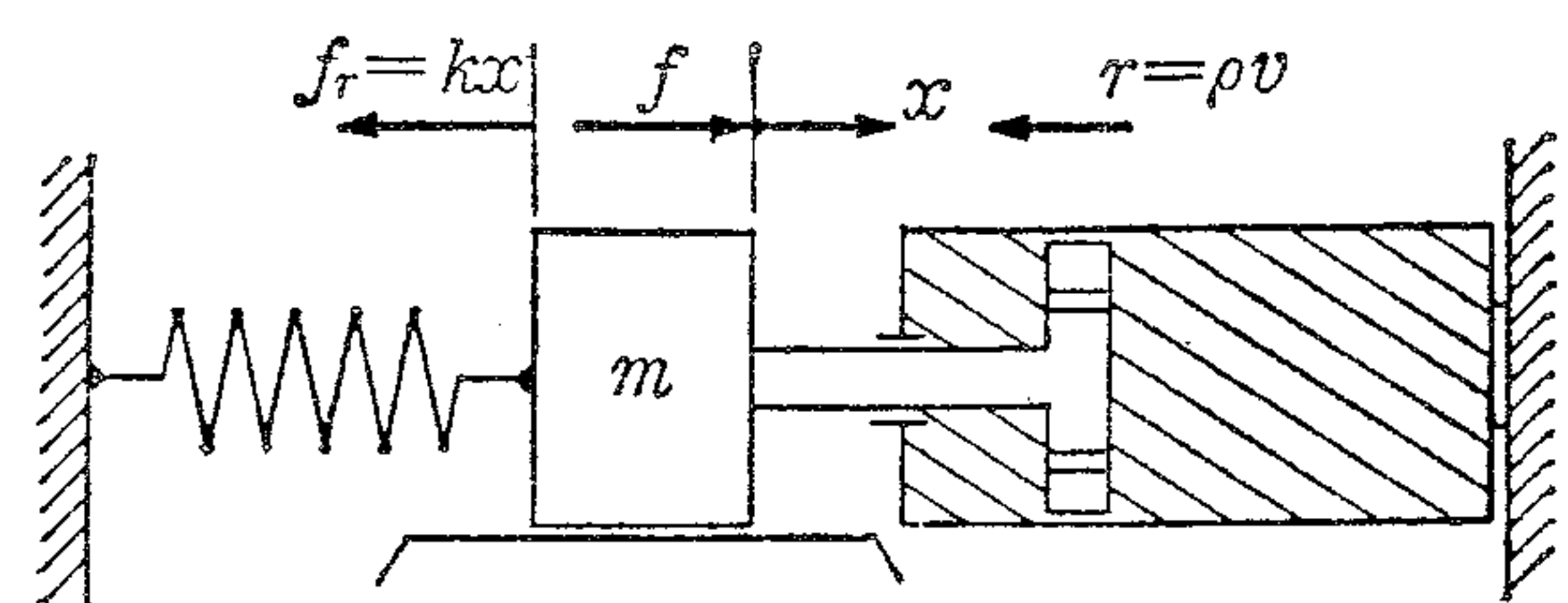


図 6-7

$$f = m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + Kx \quad \dots\dots\dots (6-11)$$

という式ができる。初期値を考えないとして、

$$F = m s^2 X + \rho s X + KX$$

$$\therefore F_T = \frac{X}{F} = \frac{1}{K + \rho s + m s^2} \dots\dots\dots (6-12)$$

$$F_T = \frac{V}{F} = \frac{s}{K + \rho s + m s^2} \dots\dots\dots (6-13)$$

ということになる。

以上に示したような力学系要素は、でき上がった伝達関数の形から見て、電気回路の素子ときわめてよく対比できることが容易に推察されること
 と思う。たとえば、図6-8のようなR.L.C直列回路では

$$e_i = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

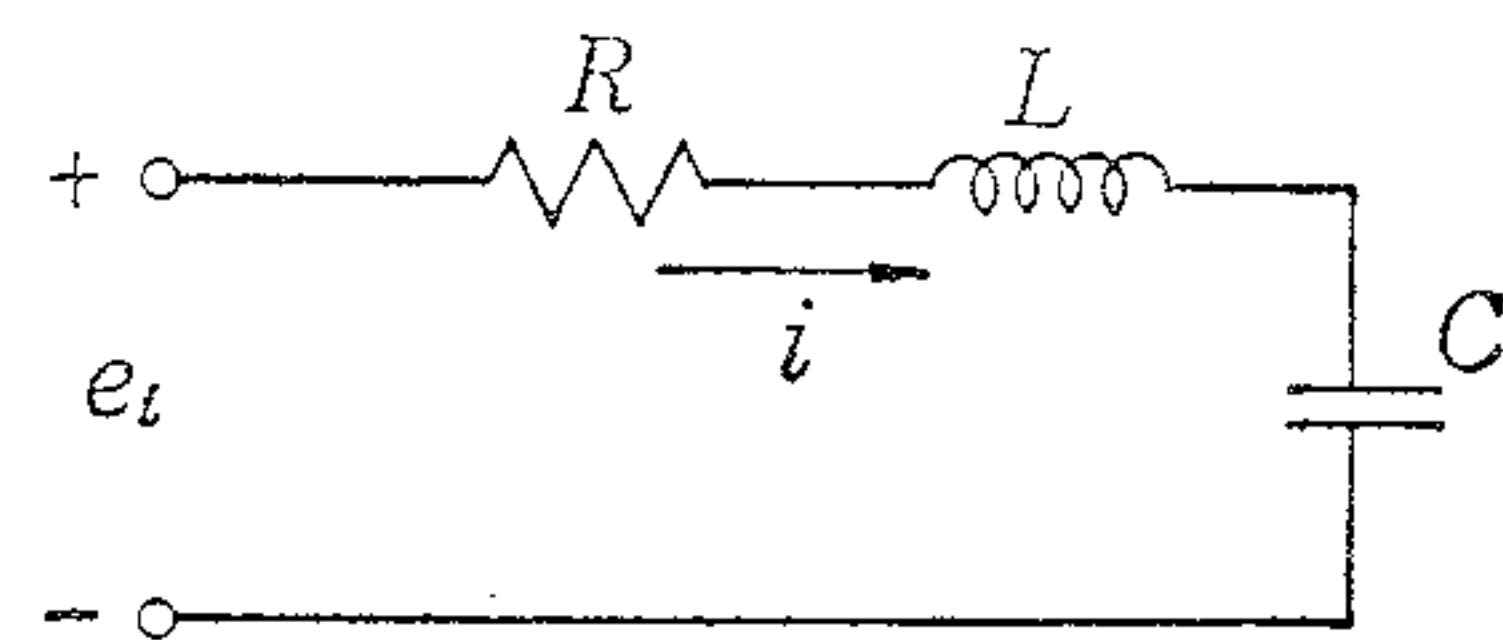


図 6-8

であり、この式に $i = dQ/dt$ を代入すれば

$$e_i = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \dots\dots\dots (6-14)$$

となるから、この(6-14)式と(6-11)式とを対比すれば、 m と L 、 ρ と R 、 K と $1/C$ などが非常によく対応し、同じ形の式であることがわかるのである。このような対比は常に成立するとは考えないが、成立する条件の中ではきわめて有効に相互の考え方、取扱い方を利用し合えるものである。

6-3 振動問題の例

前節までは、伝達関数を求めることを目的として来たので、いずれも初期値を0として考えてきた。ここでは少し角度をかえて、ラプラス変換を利用する場合を取扱って見たいと思う。

6-3-1 ばねと質量の場合

図6-6の場合と同じ条件であるものとし、ここではまず力を加えて m を $x=x_0$ の点まで引張った後に、 $t=0$ の瞬間に離れたとすれば、 m はどういう運動をするかを考えて見ることにしよう。

力の関係式として(6-9)式は常に成立するから、

$$f = m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx$$

この式において、 $t=0$ で $x=x_0$ 、 $dx/dt=0$ という条件で、 $f=0$ となった場合について解いて見ると、まず(6-9)式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \dots\dots\dots (6-15)$$

この式をラプラス変換して

$$m(s^2 X - s x_0) = -KX$$

$$\therefore X = \frac{msx_0}{K + ms^2} = \frac{mx_0}{K} \cdot \frac{s}{1 + ms^2/K}$$

この式について、公式 -0101B を適用して解けば

$$x = \frac{mx_0}{K} \cdot \frac{K}{m} \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t = x_0 \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

ということになる。これは永久に振動する形の式であるが、それは摩擦がないという仮定のためであって、現実にはそんなことは考えられない。当然、摩擦によって減衰振動になるか、摩擦力が大きければ単に $x=0$ の点に戻るだけである。

6-3-2 ばねと質量とダッシュポットの場合

これは図 6-7 の場合であり、このときも摩擦がないものとして考えてゆく。

m を $x=x_0$ まで動かした後に、 $t=0$ で外力を取り去ったとすれば、

$$f = m \frac{d^2x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + Kx$$

において、 $t=0$ で $f=0$ 、 $x=x_0$ の条件でラプラス変換をすると、

$$m(s^2X - sx_0) + \rho sX + KX = 0$$

$$\therefore X = \frac{mx_0s}{K + \rho s + ms^2} \dots \dots \dots (6-16)$$

この式は、分母の係数によって解が別々になることはすでに述べたとおりであるし、前章までに習得した能力によって十分に処理できるはずであると考えるので、ここでは解を示すことは省略したいと思う。

§ 7. 微分方程式の解のカーブ

この章で説明しようとしていることは、実はラプラス変換と直接には関係のないことである。しかし、微分方程式の解についてカーブを描かなければ解の実体や、その物理的な意味を理解することはむずかしいものである。それにもかかわらず、大多数の解説書ではこのことに触れていないし、このカーブの描き方にはかなりの経験が必要なものである。

数学の分野ではもっと抽象的であって、初期条件も入れない一般解の段階で話が終っているし、工学の分野でもせいぜい式を示すに止まっているのである。

従来、微分方程式があまり利用されなかったことの大きな理由として、数学の分野での取扱いもさることながら、カーブを具体的に示すことまでの指導に欠けていたことも、その大きな理由として考えられるのではなからうか。

いまや、ラプラス変換を利用することによって、少なくとも線形微分方程式については十分に実用的な手段として利用し得ることになったので、その解の具体的な表現としてのカーブを描くことについての能力を身につけることはむだではないと考える。

7-1 解のカーブの形

巻末にある一般公式集の $f(t)$ の欄を見渡して見ると、特別なものを除くと、 $f(t)$ を構成している要素は主として t の指数関数および三角関数である。

自然現象とか物理的な現象の大部分が減衰動作か減衰振動であって、これらは指数関数と三角関数の合成によって表現できるのである。

公式集を系統的に見れば、 s^n を別として、一次要素は指数関数に、二次要素は三角関数に対応していることがわかるであろう。比較的簡単な式の場合にはカーブの形も容易に推定できるので問題はないが、少々複雑な式となると、実際にカーブを描いて見ないと、それが一体どんな形になるのかを推定することは困難である。

7-2 やや複雑な関数のカーブの計算

カーブを描くための計算手続きはそう簡単ではなく、ある程度の経験と知識が必要である。この場合の説明には実例による方法が最も効果的であると思うので、以下二、三の実例によって理解していただくことにしたい。

【例題 7-1】

次の電圧のカーブを描け。

$$e_0 = 0.8 + 0.2\varepsilon^{-6.25t}$$

これは、例題5-2の解である。この式はきわめて簡単な場合であるが、計算を行う場合、ここでは指数関数についての一つの基本的な目安を知ってほしいのである。

このような指数関数のみの式の場合には、時間 t を適当に選んで指数計算をすればよいのであるが、問題は t の定め方である。この例の場合に、たとえば、 $t=0, 1, 2, 3, \dots$ というような選び方はおよそ意味のないことである。この結果は次のようになる。

| | | | | |
|-------|---|---------|-----------|-------------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
| e_0 | 1 | 0.80039 | 0.8000007 | 0.800000001 |

という形となって、カーブの尻尾だけを計算することになって、重要な部分については計算されていないわけである。

カーブを正しく描くためには、指数（この場合は $-6.25t$ ）の絶対値が1の付近が重要であることと、指数関数の概数を知っておくことによって、指数の最大値をどのくらいにとればよいかという判断が重要である。このことは指数関数の係数と関係があるので一律にはいえないが、

| | | | | | | |
|--------------------|--------------|------|-------|--------|---------|----------|
| a | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| ε^{-a} | ~ 0.368 | 0.13 | 0.018 | 0.0024 | 0.00034 | 0.000045 |

という概数があり、これに係数を掛けた値が他項の数値の数%以下となれば、もはやあまり計算する意味はないのである。

この例題の場合についていえば、 $6.25t$ が1の前後を詳しく計算すると共に、せいぜい

表 7-1

| t | $-6.25t$ | $\varepsilon^{-6.25t}$ | $0.2\varepsilon^{-6.25t}$ | e_0 |
|------|----------|------------------------|---------------------------|--------|
| 0.00 | 0.000 | 1.000 | 0.200 | 1.000 |
| 0.05 | -0.313 | 0.732 | 0.146 | 0.946 |
| 0.07 | -0.438 | 0.646 | 0.129 | 0.929 |
| 0.10 | -0.625 | 0.535 | 0.107 | 0.907 |
| 0.12 | -0.750 | 0.472 | 0.094 | 0.894 |
| 0.14 | -0.875 | 0.417 | 0.083 | 0.883 |
| 0.16 | -1.000 | 0.368 | 0.074 | 0.874 |
| 0.20 | -1.250 | 0.287 | 0.057 | 0.857 |
| 0.30 | -1.875 | 0.153 | 0.031 | 0.831 |
| 0.50 | -3.125 | 0.044 | 0.009 | 0.809 |
| 1.00 | -6.250 | 0.002 | 0.0004 | 0.8004 |
| 2.00 | -12.500 | 0.000 | 0.0000 | 0.8000 |

4～5くらいまでについて t を選べばよいのである。

コンピュータなどで計算する場合は別として、一般にカーブを描くために行う計算は、数表を作ってゆくものである。

この例題の場合についての数表は、表 7-1 のように作ればよいであろう。

この結果をカーブとしたものが、図 7-1 である。

このカーブは少しやさしすぎたが、計算上の要点が一つだけわかったことになる。また例題 5-2、すなわち図 5-4 の出力電圧がこの図のように変化することが明らかにされたわけである。

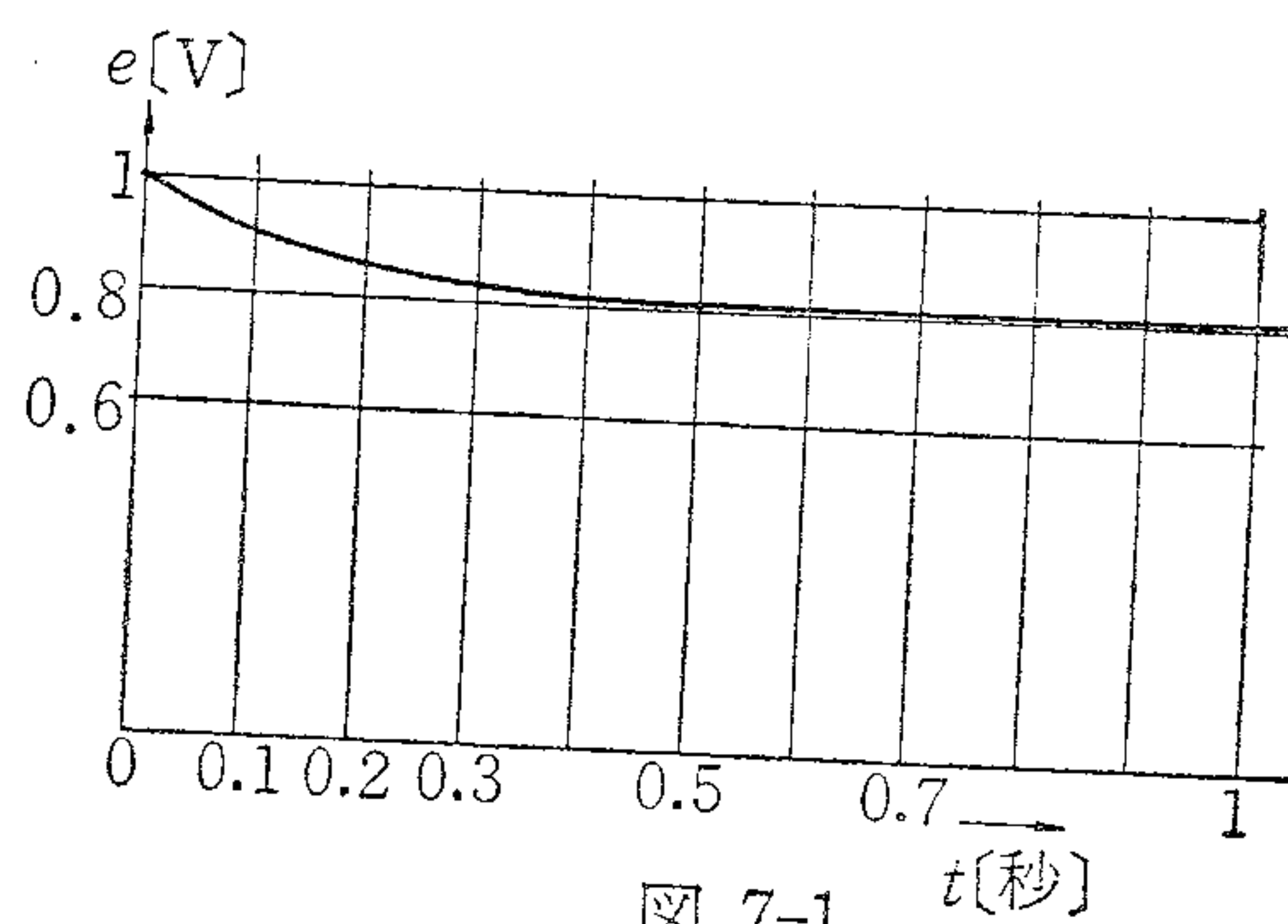


図 7-1

【例題 7-2】

$e_o = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 6t$ のカーブを描け。

この式は係数は異なるが、例題 5-4 の解と同じ形のものである。これは指数関数と三角関数の積であるから、前例のように簡単にはゆかない。

このような場合の t の選び方については、次のような要点があげられよう。

- (イ) まず、指数 ($2t$) が 1 の付近に重点をおき、せいぜい 4～5 くらいまでとなるように t を選ぶこと。
- (ロ) 三角関数は ± 1 の間を振動し、その中できわめて簡単な値となるいくつかの点のあることに着目し、そのときの t を選ぶこと。ただし、 ωt が radian であることを忘れてはならない。
- (ハ) 波形の頂点 (極大、極小点) は必ずしも三角関数の ± 1 の点とは一致しないことに注意すること。

これらの要点に従って t を選ぶとすれば、まず $2t < 4$ つまり $t < 2$ の程度において、 $6t$ ラジアン $= 6t \times 180^\circ / \pi$ が $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, \dots$, などになるときの t を求めればよいことになる。

カーブはその目的にもよるが、おおよそでよい場合が大部分であるから、本例題のような式ではたいていの場合には、これらの場合の t だけでカーブを描くことが可能である。これらの角度と $\sin \omega t$ の関係は

| | | | | | |
|---------------|--------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| θ | $n\pi$ | $n\pi \pm 30^\circ$ | $n\pi \pm 45^\circ$ | $n\pi \pm 60^\circ$ | $n\pi \pm 90^\circ$ |
| $\sin \theta$ | 0 | $\pm 1/2$ | $\pm 1/\sqrt{2}$ | $\pm \sqrt{3}/2$ | ± 1 |

となるから、この場合の θ から逆算して t を定めることによって、 ε^{-2t} を計算すればよいのである。

この式の場合

$$\theta = 6t \times \frac{180}{\pi} \doteq 343.775t$$

$$\therefore t = \frac{\theta}{343.775}$$

という式に上記の θ を入れてを求めればよいのである。

このようにして、 t を定め、 ε^{-2t} を求め、既知の $\sin 6t$ の値を掛け、さらに2で割るという計算をまとめたものが表7-1であり、そのカーブが図7-2である。このカーブは

表7-2

| $\theta [^\circ]$ | $\sin \theta$ | t [秒] | $2t$ | ε^{-2t} | $e_o [V]$ |
|-------------------|---------------|---------|-------|---------------------|-----------|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0.000 |
| 30 | 0.500 | 0.087 | 0.174 | 0.840 | 0.210 |
| 45 | 0.707 | 0.131 | 0.262 | 0.770 | 0.272 |
| 60 | 0.866 | 0.175 | 0.349 | 0.705 | 0.305 |
| 90 | 1.000 | 0.262 | 0.524 | 0.592 | 0.296 |
| 120 | 0.866 | 0.349 | 0.698 | 0.498 | 0.215 |
| 135 | 0.707 | 0.393 | 0.785 | 0.456 | 0.161 |
| 150 | 0.500 | 0.436 | 0.873 | 0.418 | 0.105 |
| 180 | 0.000 | 0.524 | — | — | 0.000 |
| 210 | -0.500 | 0.611 | 1.222 | 0.295 | -0.074 |
| 225 | -0.707 | 0.654 | 1.309 | 0.270 | -0.096 |
| 240 | -0.866 | 0.698 | 1.396 | 0.248 | -0.107 |
| 270 | -1.000 | 0.785 | 1.571 | 0.208 | -0.104 |
| 315 | -0.707 | 0.916 | 1.833 | 0.160 | -0.057 |
| 360 | 0.000 | 1.047 | — | — | 0.000 |
| 405 | 0.707 | 1.178 | 2.356 | 0.095 | +0.034 |
| 450 | 1.000 | 1.309 | 2.618 | 0.073 | 0.037 |
| 495 | 0.707 | 1.440 | 2.880 | 0.056 | 0.020 |
| 540 | 0.000 | 1.571 | — | — | 0.000 |
| 585 | -0.707 | 1.702 | 3.403 | 0.033 | -0.012 |
| 630 | -1.000 | 1.833 | 3.665 | 0.026 | -0.013 |
| 675 | -0.707 | 1.963 | 3.927 | 0.020 | -0.007 |
| 720 | 0.000 | 2.094 | — | — | 0.000 |
| 15 | 0.259 | 0.044 | 0.087 | 0.916 | 0.119 |

図5-6のような回路（定数は異なる）の出力電圧を示すものである。

表7-2のような計算値をグラフ用紙にプロットしてゆく場合、点と点の間が大きいとか、曲り方がきびしいとかで、カーブがうまくつながらないこともあり、その場合には、必要な点について計算を補充しなければならない。表7-2の最下段はその一例である。

上述の三つの要点の中で、(イ)についてはこの例の場合にも問題である。というより、大部分の複合関数について、頂点に関する確認

が必要なのである。もちろん概形を求めるだけでよい場合には、あまり細かいことは必要ないが、ここでこの頂点を求める方法について、少しだけ説明を加えておこう。

これは別に特別なことではなく、例の極値の求め方を利用すればよいのである。 e_o の式を微分して0に等しいとおけば

$$\frac{de_o}{dt} = \frac{1}{2} [-2\epsilon^{-2t} \sin 6t + 6\epsilon^{-2t} \cos 6t] = 0$$

$$\sin 6t = 3 \cos 6t$$

$$\therefore \tan 6t = 3$$

$$\therefore 6t [\text{radian}] \doteq 71.6^\circ + 180n^\circ$$

この式で、 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ について、表7-2の場合と同様にして、 t と e_o を求めて見ると次のようになる。

| | | | | |
|-------|--------|---------|--------|---------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 |
| t | 0.2082 | 0.7318 | 1.2554 | 1.7790 |
| e_o | 0.3128 | -0.1098 | 0.0385 | -0.0135 |

図7-2のカーブにはこの結果も含まれている。

もう一つ、ちょっとややこしい場合のカーブを描いて見ることにしよう。

【例題 7-3】

$$e_o = 1 + \epsilon^{-t} \sin(4t + 60^\circ) + \frac{1}{2} \epsilon^{-2t} \sin(10t - 45^\circ)$$

のカーブを描け。

この式は、係数が単純化されてはいるが、公式0201Aに対応するもので、カーブを描くための計算はちょっと骨の折れる仕事である。

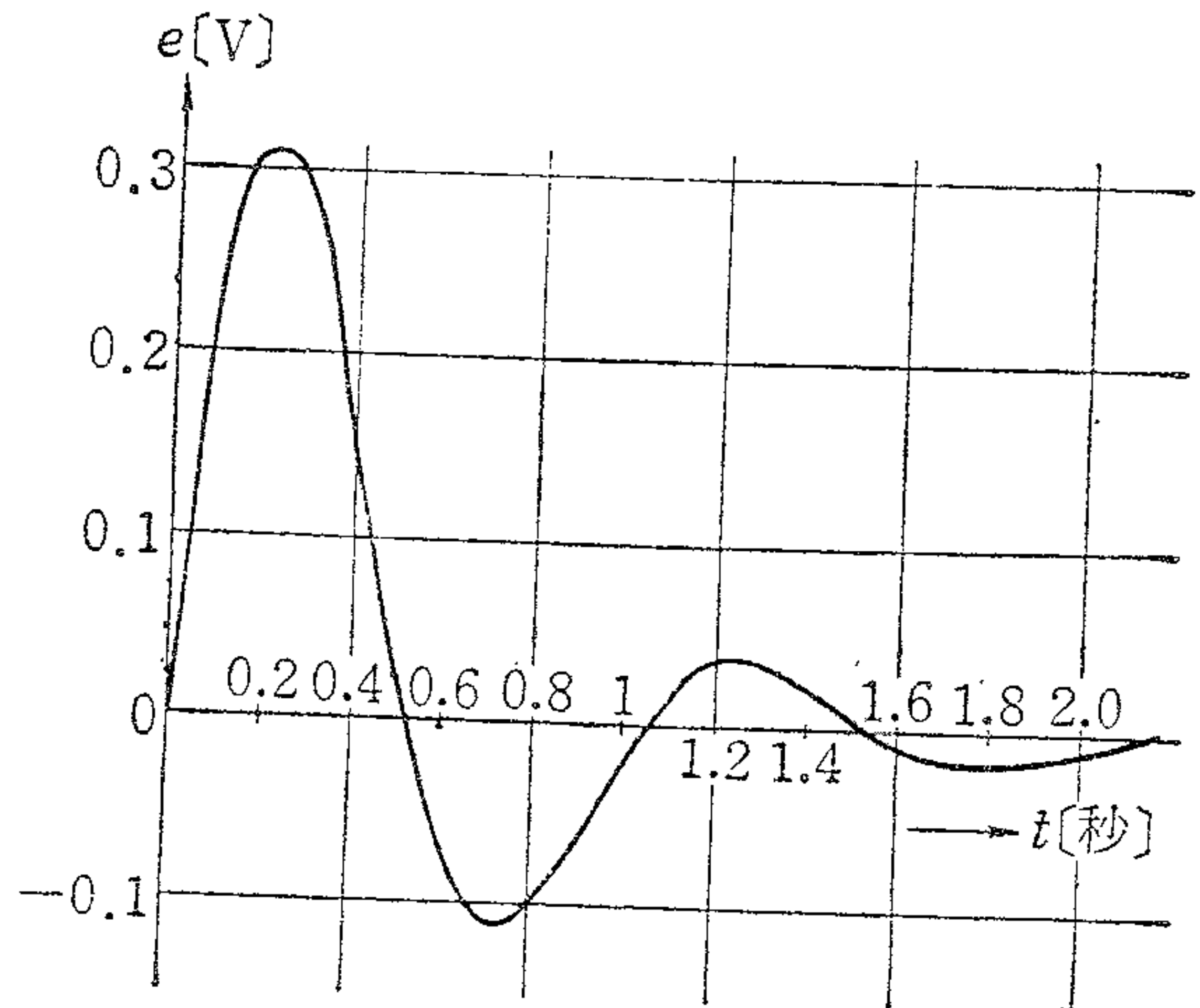


図7-2 $e_o = \frac{1}{2} \epsilon^{-2t} \sin 6t$ のカーブ

この場合にも、前例に示した三つの要点は成立するのであるが、複合関数が二つあるために一方に都合のよい時間 t は他の一方では都合がよくないことになる。したがって、このような場合には経験上次のような方法がよいように思われる。

- (イ) まず三角関数が 0 となる時間を双方の場合について求め、互いに他方の関数の計算を行う。
- (ロ) 次に三角関数が ± 1 となる時間 t について双方の関数を求め、 e_0 を計算する。
- (ハ) 以上の両者の計算値をプロットして見て、カーブについて不足と思われる時間を求め、この時間について e_0 を計算してカーブを描く。
- (ニ) 一般に極値の計算はきわめてむずかしい。というのは、 $de_0/dt=0$ の式は三角関数と指数関数の複雑な式となって容易に解けないからである。したがって、極値付近についての補足計算が必要となる。

以上の手続きによってカーブの計算を進めて見よう。

まず $\sin \theta = 0$ の点について、

$$\begin{cases} 4t_1 \times \frac{180}{\pi} + 60 = 0 + 180n & (A) \\ 10t_2 \times \frac{180}{\pi} - 45 = 0 + 180n & (B) \end{cases}$$

これらの式から

$$t_1 = \frac{180n - 60^\circ}{229.183} \quad (A)'$$

$$t_2 = \frac{180n + 45^\circ}{572.958} \quad (B)'$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

この(A)', (B)'の式によって、 t_1, t_2 を求め互いに他の関数を計算して見たものが、表 7-3 である。この表では

$$e_1 = \varepsilon^{-t_2} \sin(4t_2 + 60^\circ) = \varepsilon^{-t_2} \sin \theta_1$$

$$e_2 = \varepsilon^{-t_1} \sin(10t_1 - 45^\circ) = \varepsilon^{-t_1} \sin \theta_2$$

とおいてある。

この表の e_1, e_2 に 1 を加えて、これを時間 t について点をプロットしたものが図 7-3 である。これでも相当にカーブの形となっているので、方法の(ロ)は省略して(ハ)によって、それぞれの点の中間に点を設定して、補足計算を行って見ると表 7-4 のようになる。この表では細かい部分は省略してあるが、表 7-3 よりも複雑な計算が必要なのは明らかであることはおわかりいただけると思う。

図 7-3 に表 7-4 の結果を加えて描いたものが図 7-4 である。

しかし、このカーブは極値についてはまったくの概形である。念のため原式の de_0/dt を

表 7-3 一方の三角関数が 0 となる場合の計算

| n_1 | n_2 | t_1 | t_2 | θ_1 | θ_2 | $\sin \theta_1$ | $\sin \theta_2$ | e_1 | e_2 |
|-------|-------|-------|-------|------------|------------|-----------------|-----------------|--------|----------|
| | 0 | | 0.079 | 77.99 | | 0.978 | | 0.904 | |
| | 1 | | 0.393 | 150.00 | | 0.5 | | 0.338 | |
| 1 | | 0.524 | | | 255.00 | | -0.966 | | -0.170 |
| | 2 | | 0.707 | 222.01 | | -0.669 | | -0.330 | |
| | 3 | | 1.021 | 294.00 | | -0.914 | | -0.329 | |
| 2 | | 1.309 | | | 705.00 | | -0.259 | | -0.009 |
| | 4 | | 1.335 | 366.01 | | 0.105 | | 0.028 | |
| | 5 | | 1.649 | 437.99 | | 0.978 | | 0.188 | |
| | 6 | | 1.964 | 510.00 | | 0.5 | | 0.070 | |
| 3 | | 2.094 | | | 1155.00 | | 0.966 | | 0.007 |
| | 7 | | 2.278 | 582.01 | | -0.669 | | -0.069 | |
| | 8 | | 2.592 | 654.00 | | -0.914 | | -0.068 | |
| 4 | | 2.880 | | | 1605.00 | | 0.259 | | 0.0004 |
| | 9 | | 2.906 | 726.01 | | 0.105 | | 0.006 | |
| | 10 | | 3.220 | 797.99 | | 0.978 | | 0.039 | |
| | 11 | | 3.534 | 870.00 | | 0.5 | | 0.015 | |
| 5 | | 3.665 | | | 2055.01 | | -0.966 | | -0.0003 |
| | 12 | | 3.849 | 942.01 | | -0.669 | | -0.014 | |
| | 13 | | 4.163 | 1,014.00 | | -0.914 | | -0.014 | |
| 6 | | 4.451 | | | 2,505.01 | | -0.259 | | -0.00002 |
| | 14 | | 4.477 | 1,086.01 | | 0.105 | | 0.0012 | |
| | 15 | | 4.791 | 1,158.00 | | 0.978 | | 0.0081 | |

求めて見ていただくとわかるが、計算は容易ではないからである。

一般には概形で十分なことが多いが、必要のある場合には、推定される部分について t の値を多くとって細かく計算を行えば、かなりの精度でカーブを描くことができるであろう。

次に示す問題を実際に計算して見てほしいが、計算は簡単ではない。もちろんコンピュータを使うことのできる人には何ら問題はないが、電卓を使ったとしても相当な計算が必要である。しかし、そこまで“やらない”……あるいは“やれない”とすれば、たとえラプラス変換によって微分方程式の解が具体的に求められたとしても、その解の具体的な、あるいは物理的な意味を自分のものとするのが不可能であろう。それではやはり中途半端なことになるので、ほんの概形でもよいから、カーブが描けるように努力して見てほしいと思うのである。

表 7-4
表 7-3の補充計算

| t | e_1 | e_2 | e_0 |
|----------|--------|--------|-------|
| 0.00 | 0.866 | -0.354 | 1.512 |
| 0.05 | 0.902 | -0.127 | 1.775 |
| 0.20 | 0.788 | 0.314 | 2.102 |
| 0.25 | 0.692 | 0.300 | 1.992 |
| 0.30 | 0.578 | 0.220 | 1.979 |
| 0.45 | 0.185 | -0.110 | 1.075 |
| 0.5 | 0.057 | -0.162 | 0.896 |
| 0.65 | -0.253 | -0.073 | 0.674 |
| 0.8 | -0.402 | 0.081 | 0.679 |
| 0.9 | -0.406 | 0.077 | 0.672 |
| 1.1 | -0.247 | -0.039 | 0.714 |
| 1.2 | -0.127 | -0.044 | 0.829 |
| 1.5 | 0.154 | 0.025 | 1.179 |
| 1.7 | 0.183 | -0.008 | 1.175 |
| 1.8 | 0.153 | -0.014 | 1.139 |
| 2.4 | -0.085 | -0.004 | 0.911 |
| 2.5 | -0.082 | -0.003 | 0.915 |
| 2.75 | -0.032 | 0.002 | 0.970 |
| 3.1 | 0.035 | -0.001 | 1.034 |
| 3.3 | 0.037 | 0.001 | 1.037 |
| 3.4 | 0.029 | 0.000 | 1.030 |
| 4.0 | -0.018 | — | 0.982 |
| 4.6 | 0.006 | — | 1.006 |
| ∞ | 0 | 0 | 1 |

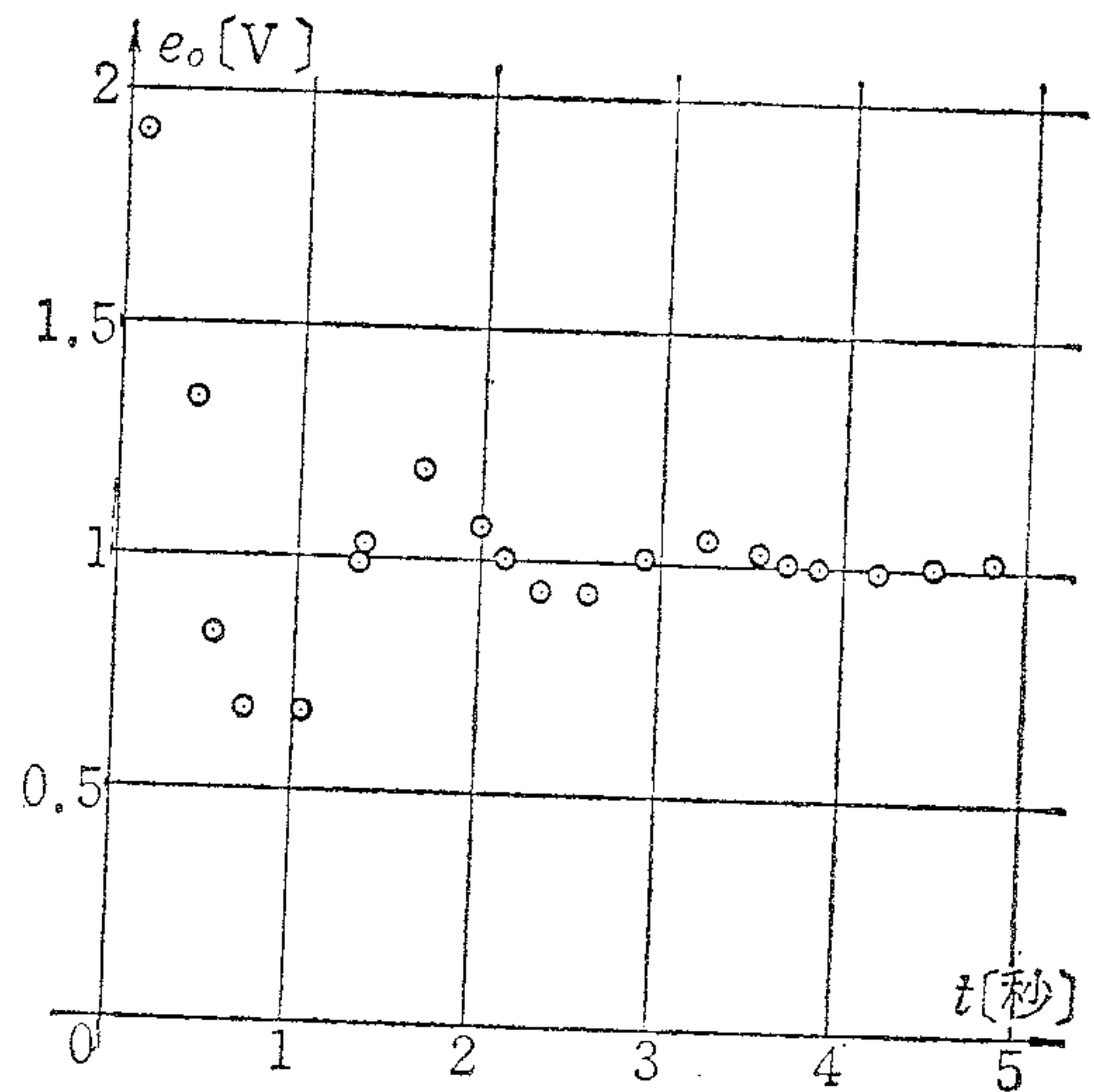


図 7-3 表 7-3 の点をプロットしたもの

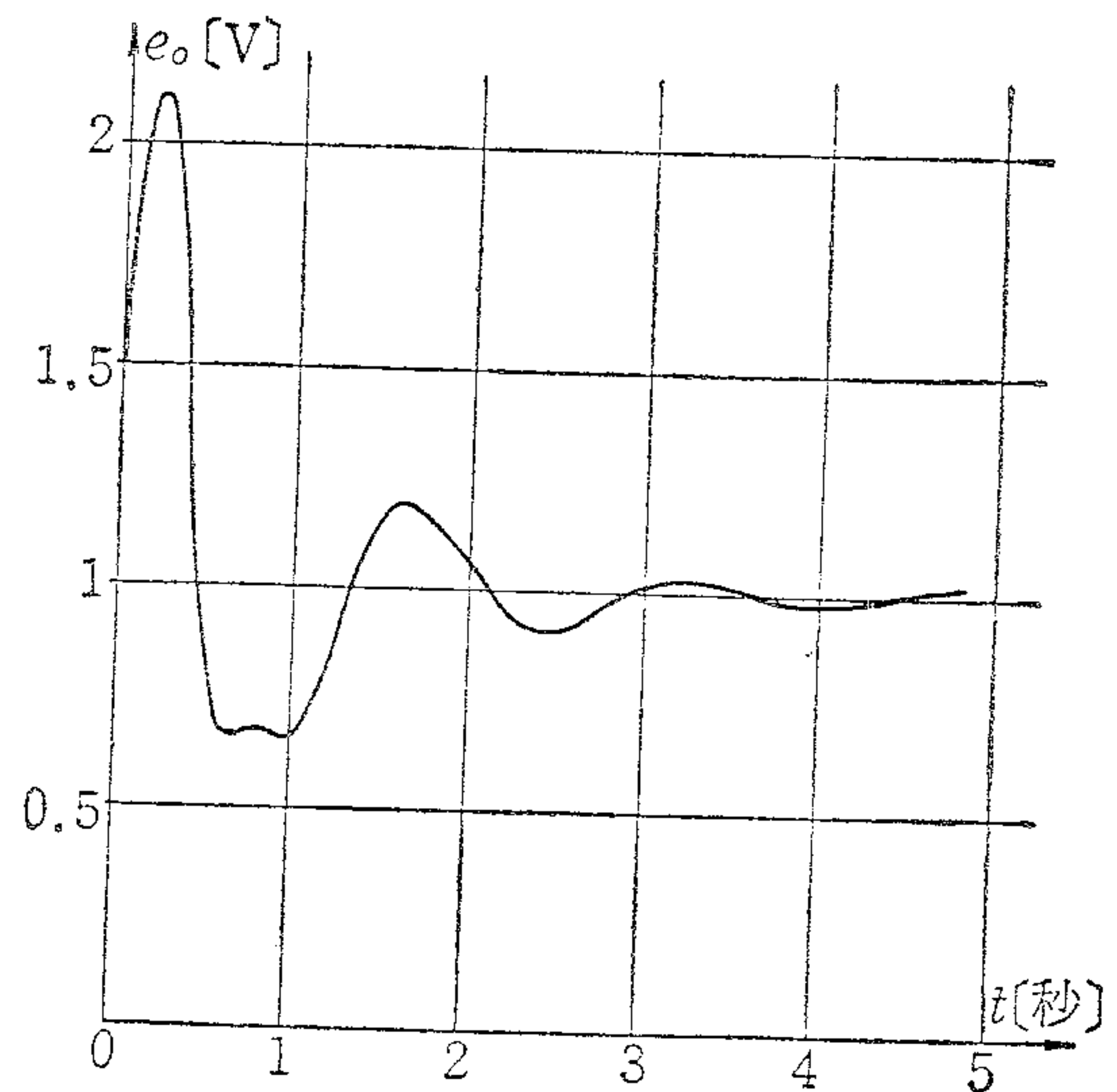


図 7-4 $e_0 = 1 + \varepsilon^{-t} \sin(4t + 60^\circ) + \frac{1}{2} \varepsilon^{-2t} \sin(10t - 45^\circ)$ のカーブの概形

【問題 7-1】

次の微分方程式を解いて、その解のカーブ（概形でよい）を描け。

1) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 2$ $(x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0)$

2) $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$ $(x_0 = 0 = \dot{x}_0 \quad \ddot{x}_0 = 1)$

3) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = \varepsilon^{-\frac{t}{4}}$ $(x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0)$

4) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 20 \sin 10t$ $(x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0)$

§ 8. ラプラス変換のやや高度な問題

以上で、ラプラス変換の基本的な部分とその応用例について一応の説明を終えることにして、さらに基本的な部分に対してやや高度の問題を少しだけ取上げ、その利用の可能性を示しておくことにしたい。

これらの一部分は、理論公式として巻末の公式集にも示してある。

8-1 関数の移動

8-1-1 時間遅れ関数

図 8-1 において、図の中の (a) は

$$f(t) = kt$$

であり、これをラプラス変換したものは

$$F(s) = \frac{k}{s^2}$$

であることはすでに知っていることである。しかし、(b) は、 $t=a$ までは $f_2(t) = 0$ であり、 $t > a$ において

$$f_2(t) = k(t-a)$$

という関数である。これは (a) に対して時間 a だけ遅れているということで、一般に時間遅れ関数と呼ばれているものである。注意すべきことは、この (b) は単に $f_2(t) = k(t-a)$ なのではなくて、 $t < a$ では $f_2(t) = 0$ であるということである。したがって、 $t < 0$ で定義されていなかった (a) に対して、 a だけ右へ移動したものとすることができるのであって、 $f_2(t) = K(t-a)$ をそのままにしたときの $t < a$ における $f_2(t) < 0$ の部分は存在しないということなのである。いま、この移動された関数のラプラス変換を行って見よう。

まず、 $t-a=x$ とおくと

$dt=dx$, $t=x+a$, $t=0$ のとき $x=-a$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)] &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t-a) dt = \int_{-a}^{\infty} \varepsilon^{-s(x+a)} f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 \varepsilon^{-s(x+a)} f(x) dx + \int_0^{\infty} \varepsilon^{-s(x+a)} f(x) dx \\ &= 0 + \varepsilon^{-as} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-sx} f(x) dx \\ &= \varepsilon^{-as} F(s) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[f(t-a)] = \varepsilon^{-as} F(s) \dots\dots\dots (8-1)$$

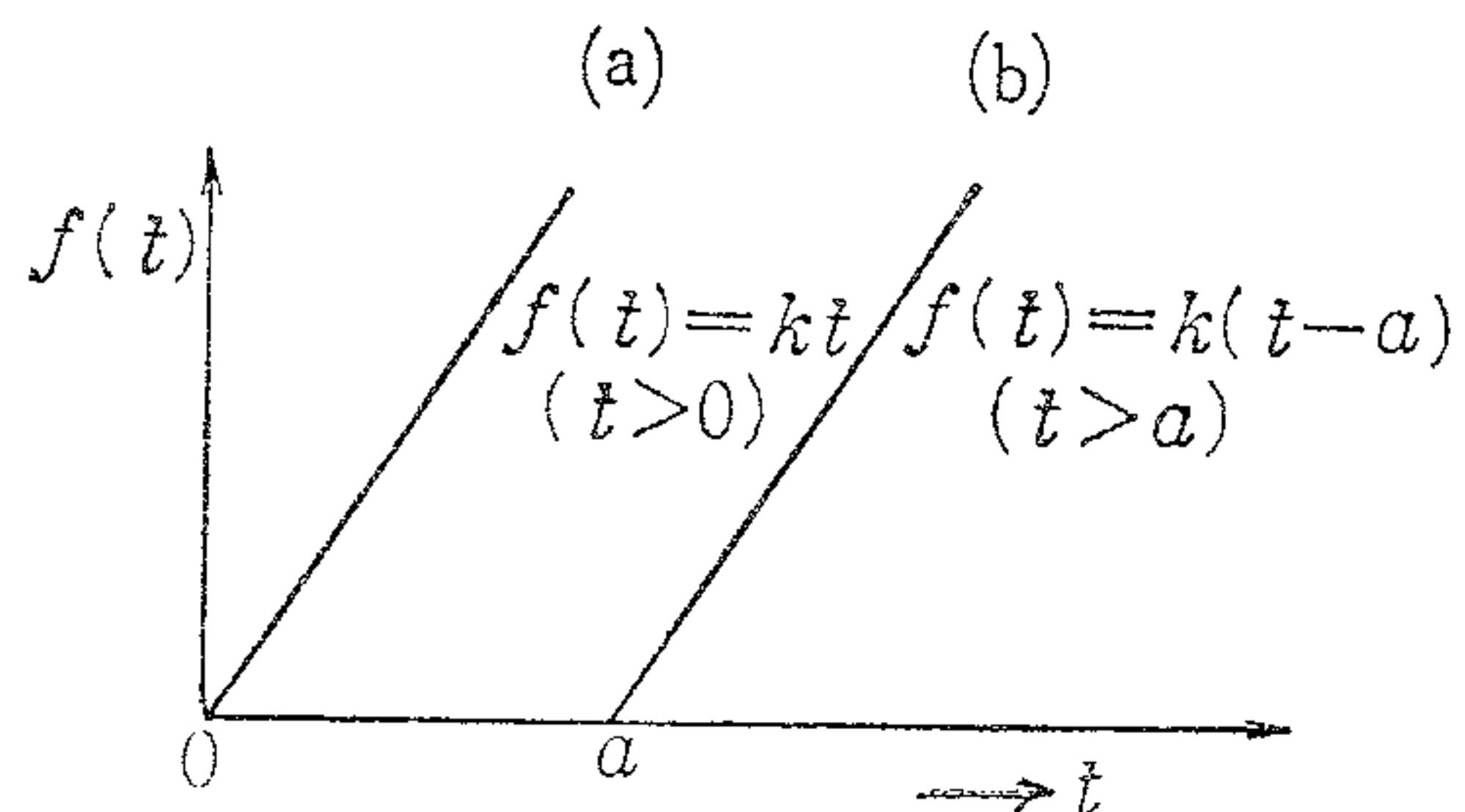


図 8-1

以上の変化の中で、第一項が0となることは、 $f(x) = f(t-a)$ が、 $t < a$ で、つまり、 $x < 0$ で0であることによるものであるし、また第二項が x の式であることは、 x と t が変っているだけで、時間領域の変数として t の代わりに x を使ったとしても、関数の形が同じであれば、 $F(s)$ の式は同じ形になるから、結果として(8-1)式が得られることになる。

したがって、元の式に戻って

$$f(t-a) = k(t-a) \quad \text{ならば}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[k(t-a)] = \varepsilon^{-as} \cdot \frac{k}{s^2} \dots\dots\dots (8-2)$$

ということになるのであって、このことは、 $f(t) = kt$ という元の関数(a)を、 a だけ右へ移動した関数のラプラス変換は、原関数のラプラス変換 (k/s^2) に対して、 ε^{-as} を掛ければよいということになるのである。

この公式(8-1)は、巻末の理論公式Dに対応するものであるが、数学的にはもう少し厳密に証明しなければならないかも知れないが、工学の立場からは上記のような理解で十分であろう。ただ少なくとも $t < a$ についての確認だけは必要なことである。一般の関数の形で書くときには当然 $t < 0$ の場合も含まれるが、ラプラス変換は始めから、 $t < 0$ については定義されていないことであるからで、このことについては、1-2節の定義を確認してほしいのである。工学の問題でも、 $t < 0$ の変化について考えることはほとんどないのである。

【例題 8-1】

$f(t) = \sin t (t > 0)$ を右へ π だけ移動した関数をラプラス変換せよ。

まず原関数 $f(t) = \sin t$ のラプラス変換は基本公式Vによって、

$$F(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

これを π だけ右へ移動するとすれば、この $F(s)$ に対して $\varepsilon^{-\pi s}$ を掛ければよいから、

$$\mathcal{L}[\sin(t-\pi)] = \frac{\varepsilon^{-\pi s}}{1+s^2}$$

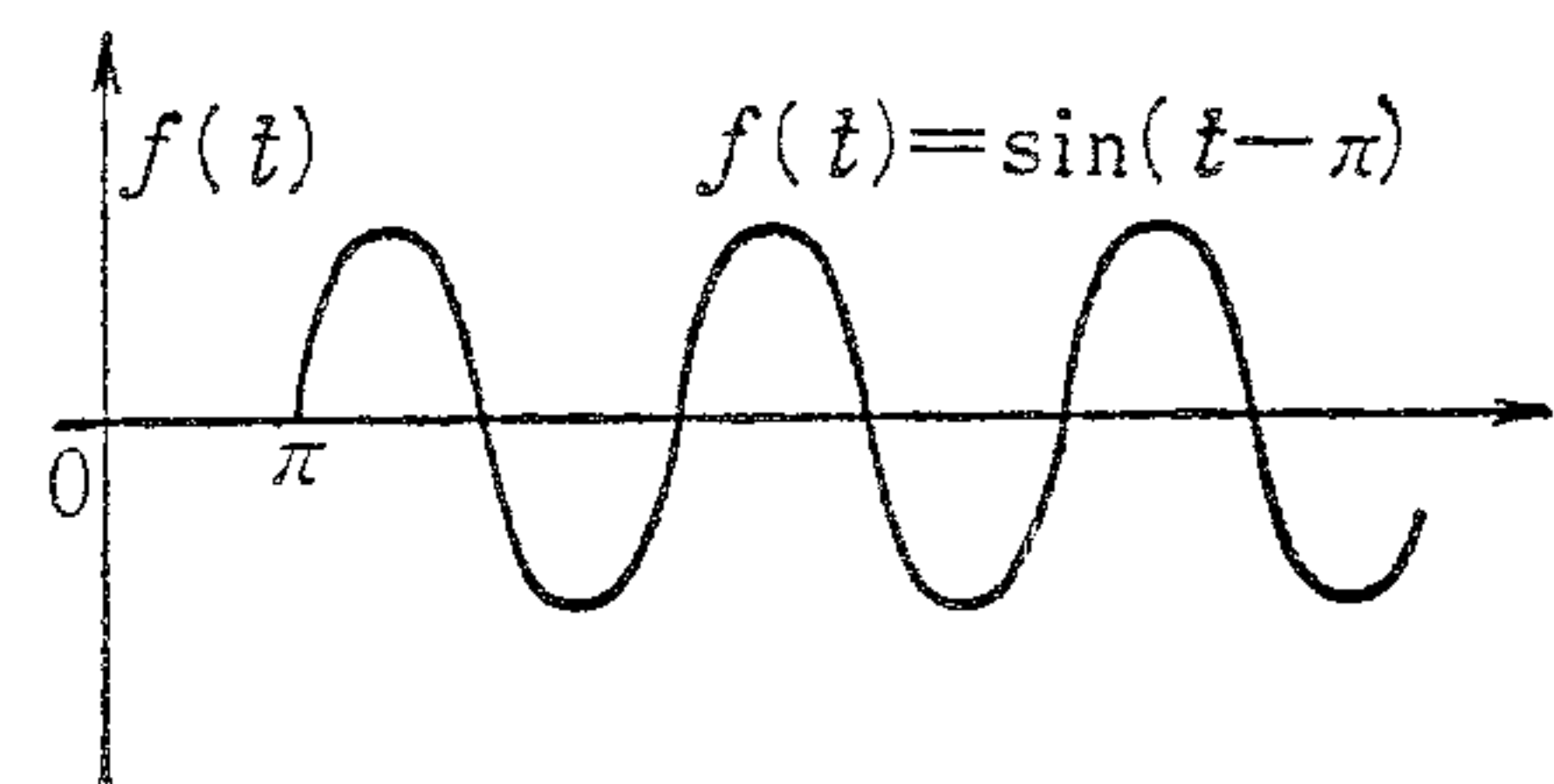


図 8-2

8-1-2 像関数の移動

これは、 s 領域における s の関数 $F(s)$ において、 s の代わりに $(s \mp b)$ とおいた場合、 $F(s)$ の原関数 $f(t)$ がどうなるのかという問題である。

少々邪道な説明であるとは思いますが、逆から話を進めて見よう。いま、 $f(t)$ に ε^{bt} を掛けた関数 $\varepsilon^{bt}f(t)$ をラプラス変換して見ると、

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{bt}f(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \varepsilon^{bt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-(s-b)t} f(t) dt$$

この式は、変換積分において ε^{-st} を掛ける代りに、 $\varepsilon^{-(s-b)t}$ を掛けたことになるので、 $F(s)$ の代りに像関数のすべての s の代りに $(s-b)$ で置きかえた関数 $F(s-b)$ を考えればよい、ということになるので、

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{bt}f(t)] = F(s-b)$$

一般的に

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{\pm bt}f(t)] = f(s \mp b) \dots \dots \dots (8-3)$$

つまり、像関数を $\mp b$ だけ右へ移動することは、原関数 $f(t)$ に $\varepsilon^{\pm b}$ を掛けることに対応するということになるのである。

【例題 8-2】

$f(t) = \varepsilon^{-2t} \sin \frac{1}{2}t$ をラプラス変換せよ。

このような例は、公式 (8-3) を知らないで、ちょっととまどう問題である。もちろん一般公式の中で無理に適用しようとするれば、No. 0100A が形としてこれに該当していることがわかる。

まず (8-3) の公式を適用して見ることにしよう。

$$\mathcal{L}[\sin \frac{1}{2}t] = \frac{2}{1+4s^2} \equiv F(s)$$

この式に ε^{-2t} を掛けることは、 $F(s)$ の s に対して $(s+2)$ とおくことに相当するから、

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{-2t} \sin \frac{1}{2}t] = F(s+2) = \frac{2}{1+4(s+2)^2} = \frac{2}{17+16s+4s^2}$$

ということになってきわめて簡単に処理されるのである。

ここで検算も兼ねて、本公式を知らずに一般公式、0100A を使った場合にどういうことになるかを示しておこう。

公式0100Aは

$$\frac{1}{1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2} \xrightarrow{\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt} \frac{\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt}{D}$$

であるから、この右辺と $f(t) = \varepsilon^{-2t} \sin \frac{1}{2}t$ とを比較して、

$$d\omega_1 = 2 \quad \omega_1 D = 1/2 \quad \text{とおけば}$$

割算をして

$$\frac{D}{d} = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} = \frac{1}{4} \quad \therefore d^2 = \frac{16}{17}$$

$d > 0$ だから、 $d = 4/\sqrt{17}$ であるので

$$\omega_1 = \sqrt{17}/2 \quad \therefore \omega_1^2 = 17/4$$

$$\frac{2d}{\omega_1} = \frac{8/\sqrt{17}}{\sqrt{17}/2} = \frac{16}{17} \quad \frac{\omega_1}{D} = \frac{17}{2}$$

$$\therefore \mathcal{L}[\varepsilon^{-2t} \sin \frac{1}{2}t] = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{1+16s/17+4s^2/17} = \frac{2}{17+16s+4s^2}$$

となって同一の結果は得られるが、なかなか容易ではない。

この例のように、像関数の移動に関する公式は、実際には逆変換の手段としてではなくて、むしろ、 $\varepsilon^{\pm t}$ という指数関数を掛けた複合関数のラプラス変換の手段として多く利用されるものである。

8-1-3 移動関数の逆変換

前項の終りに、像関数の移動の公式が、むしろ指数関数を掛けた複合関数の変換の場合に利用されることが多いと述べたが、まったく同様に、原関数の移動の公式 (8-1) は逆変換の場合に利用されることがある。この (8-1) 式は、一般的にラプラス変換の場合にも利用されるが、このときには、 $F(s)$ の中に ε^{-as} という形の指数関数を生じ、これを代数的に処理したとしても、指数関数のまま残ることになるので、その場合の逆変換にこの (8-1) 式をどう利用するのかという問題が残るのである。

たとえば、図 8-1 の例によってできた (8-2) 式

$$F(s) = \frac{ks^{-as}}{s^2}$$

を逆変換しようとする場合に、単に一般公式の中から探し求めようとしても、一般には見出すことはできない。もちろん中にはこのような移動定理に関するものを、一般公式の中に混ぜてあるような公式集もないことはないが、それは特別な例だけであって、少し複雑な場合にはそれらの表示を望むのは無理である。

$F(s)$ の中に ε^{-as} のような指数関数が存在する場合の処理方法としては、

- (イ) まず ε^{-as} の含まれている部分を分離し
- (ロ) その部分については、(8-1) の公式を利用して逆変換し、他の部分の逆変換結果と合計すればよいのである。

【例題 8-3】

$$F(s) = \frac{2s - \varepsilon^{-s}}{1 + s^2/4} \quad \text{を逆変換せよ。}$$

このままの形ではもちろん一般公式の中には見当らない。そこで上記の処理方法の(イ)に

従って、まずこの関数を ε^{-as} を含むものとそうでないものに分割して見ると、

$$F(s) = \frac{2s}{1+s^2/4} - \frac{\varepsilon^{-s}}{1+s^2/4} \equiv F_1(s) - F_2(s)$$

とおく。このうち $F_1(s)$ は、公式—0101Bによって、

$$f_1(t) = 2(4 \cos 2t) = 8 \cos 2t$$

$F_2(s)$ については、まず ε^{-s} を別に考えると、残りは公式0100Bに該当するものであり、また ε^{-s} という項は $f(t)$ の代りに、 $f(t-1)$ とすればよいことを示しているのであるから、この両者によって、

$$f_2(t) = 2 \sin 2(t-1)$$

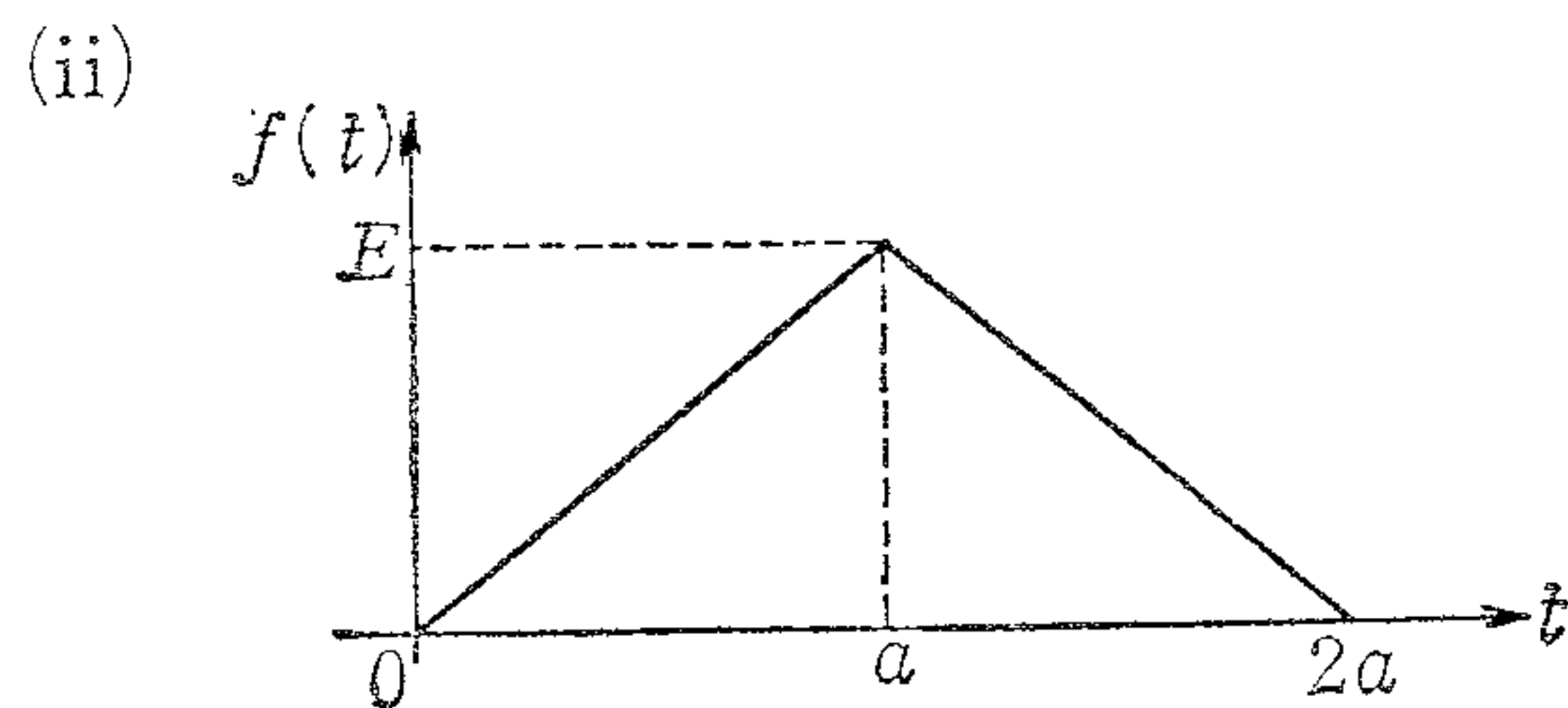
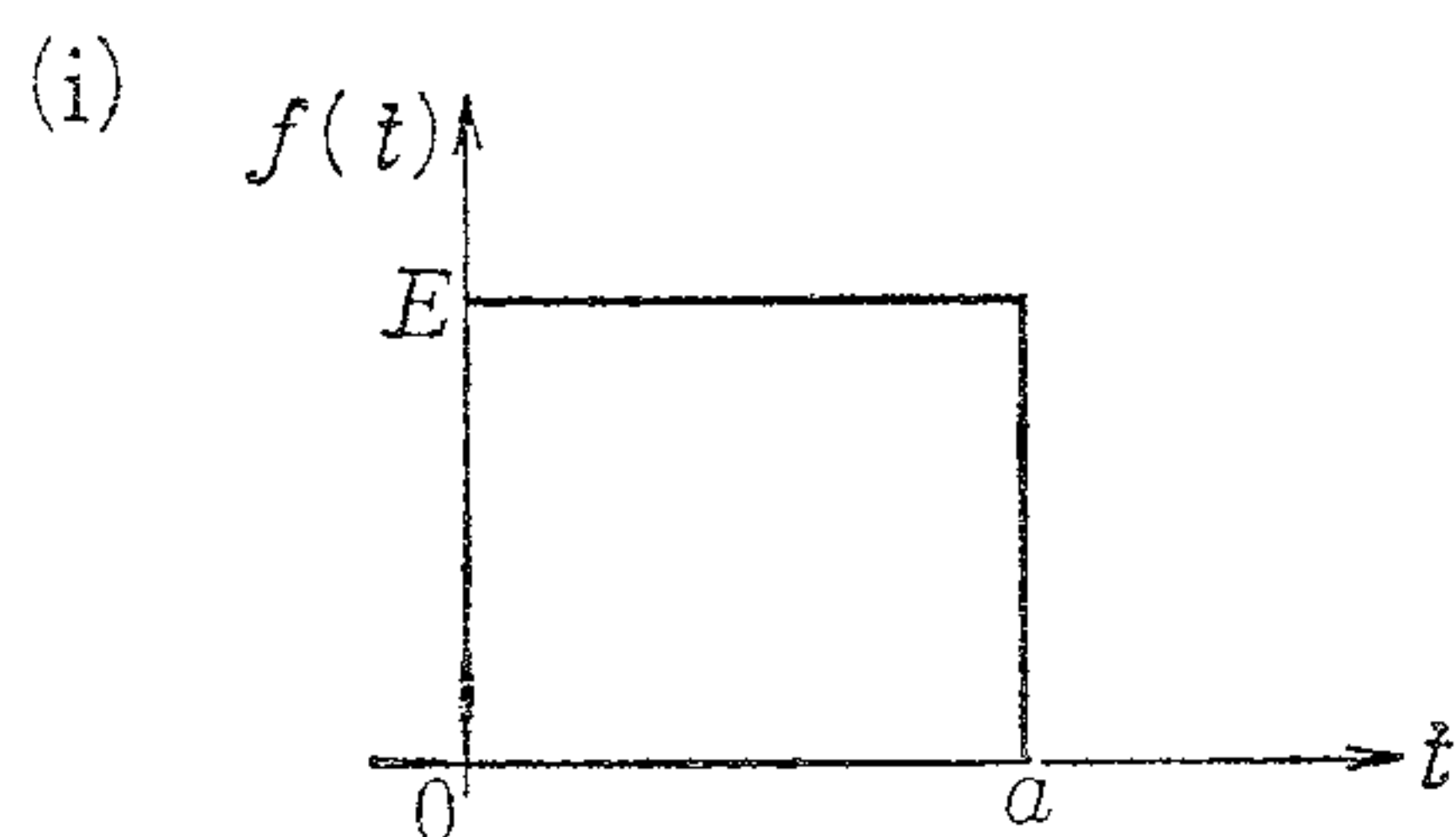
$$\therefore f(t) = 8 \cos 2t - 2 \sin(2t-2)$$

ということになるのである。もちろん $\sin(2t-2)$ の2は radian である。

次に示す練習問題をやって見ていただくと、これらの意味が納得してもらえらると思う。

【問題 8-1】

1) 図のような形の波形の関数をラプラス変換せよ。



2) 次の各関数をラプラス変換せよ。

(i) $(t-a)^2$ (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right)$

(iii) ε^{-2t+6} (iv) $\cos(2t-90^\circ)$

3) 次の各関数をラプラス変換し、さらに一般公式によって逆変換して、元に戻ることを確認せよ。

(i) $\varepsilon^{-2t} \sin t$ (ii) $\varepsilon^{-t} \cos 2t$ (iii) $t \varepsilon^{-\frac{t}{2}}$ (iv) $s^t (t \varepsilon^t + 3)$

4) 次の関数を逆変換せよ。

(i) $\frac{1-s\varepsilon^{-s}}{s(1+s)^2}$ (ii) $\frac{4s-8\varepsilon^{-2s}}{s(2+s^2)(4+s^2)}$

8-2 相似定理

この定理は、 $f(t)$ の時間スケールを変更することに関するもので、式の形としては、

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(s/a) \dots\dots\dots (8-4)$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as) \dots\dots\dots (8-5)$$

ただし $a > 0$ とする。

この公式は、 a が 1 より大きいか小さいかによって、同じことを示しているものである。

この定理も相当に利用価値のあるものであるが、まずこの定理を導くことの説明から始めることにしよう。

まずラプラス変換の定義式

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

において、 $f(t)$ の t の代りに at と書くと

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

この式で、 $at = x$ とおけば

$$dt = \frac{dx}{a}, \quad t = \frac{x}{a} \quad \text{であるから,}$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-\frac{sx}{a}} f(x) \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)x} f(x) dx$$

この式は、 s の代りに s/a を使って、 $f(x)$ をラプラス積分したものであるから、結局

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(s/a)$$

と書くことができることになる。

【例題 8-4】

$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{1+s^2}$ であることを知って、 $\mathcal{L}[\cos \sqrt{3}t]$ を求めよ。

公式 (8-4) を利用すれば、 $a = \sqrt{3}$ と考えて

$$\mathcal{L}[\cos \sqrt{3}t] = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{s/\sqrt{3}}{1+(s/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{1+s^2/3} \quad \text{or} \quad \frac{s}{3+s^2}$$

この公式が有効なのは、一般公式が主として逆変換用に整理されていることによるものである。この例題はきわめて簡単なものであるから、基本公式VIによっても楽に変換することができる。たとえば (VI') で $\omega_1 = \sqrt{3}$ とおいて

$$\mathcal{L}[\cos \sqrt{3}t] = \frac{s}{s^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{s}{3+s^2}$$

となるが、問題は一般にこんなに簡単ではない。

【問題 8-2】

1) 基本公式と相似定理を利用して、次の各関数をラプラス変換せよ。

(i) $\sin 2\pi t$ (ii) $(\pi t)^2$ (iii) $\varepsilon^{-\pi t}$ (iv) $\cos \frac{\pi}{2} t$

2) 一般公式集を利用しないで、次の各関数を逆変換せよ。

(i) $\frac{1}{4s(1+4s)}$ ただし $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+s)}\right]=1-\varepsilon^{-t}$

(ii) $\frac{1}{2s(1+2s)(1+4s)}$ ただし $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+s)(1+2s)}\right]=1+\varepsilon^{-t}-2\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$

(iii) $\frac{1}{2s^2(1+2s^2)}$ ただし $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(1+s^2)}\right]=t-\sin t$

8-3 初期値および最終値の定理

この定理はラプラス変換された関数 $F(s)$ によって、原関数 $f(t)$ の初期値および最終値を簡単に求めることができるという定理である。

まずその内容を示すと、

$f(t)$ と $f'(t)$ のラプラス変換が存在するとし、また、 s を 0 または ∞ に近づけたとき、 $sF(s)$ の極値が存在するとすれば、

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \dots\dots\dots (8-6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \dots\dots\dots (8-7)$$

という関係が成り立つ、というものである。

この (8-6) の関係を初期値の定理

(8-7) の関係を最終値の定理というのである。

まず、(8-6) 式から説明しよう。2-2節で述べたように、 $f(t)$ の導関数 $f^{(1)}(t)$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f^{(1)}(t) dt = sF(s) - f(0) \dots\dots\dots (8-8)$$

であるが、この式において $s \rightarrow \infty$ の極限值をとれば、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f^{(1)}(t) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

左辺は $s \rightarrow \infty$ とすれば ε^{-st} が 0 となるので、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = 0$$

ところが、 $f(0)$ は s とは関係がないし、

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

と書くこともできるので、結局

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

ということになる。

(8-7)式の場合は、(8-8)式において、逆に $s \rightarrow 0$ の極限值をとれば、 $\varepsilon^{-st} = 1$ だから

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f^{(1)}(t) dt = \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f^{(1)}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)]$$

以上は左辺についてであるが、右辺と等しいとおけば

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)]$$

となるが、 $f(0)$ は定数であって s にも t にも関係がないから、両辺で消去できるので、

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

となるのである。

これらの公式は、ラプラス変換または逆変換そのものには直接利用されるものではないが、関数の初期値とか最終値を求めるという必要のある場合にはきわめて重要な役割りを果たす定理である。特に最終値の定理(8-7)の方は、過渡現象終了後の定常状態の値を、 $sF(s)$ の式から直ちに求めることができるのできわめて有効であり、求めた解をチェックすることにも役立つという利点は大きいものである。

【例題 8-5】

電気回路の過渡現象において、その出力が

$$E_o = \frac{2+s}{s(1+2s)(1+s+s^2)}$$

という式で示されたとき、

- (イ) その定常電圧はいくらか、また、
- (ロ) $t=0$ のとき e_o はいくらであるか。

これは典型的な応用例であるが、

(イ)については、最終値の定理によって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2+s}{(1+2s)(1+s+s^2)} = 2 \quad [\text{V}] \end{aligned}$$

(ロ)については、初期値の定理によって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} e_o(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2+s}{(1+2s)(1+s+s^2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2/s+1}{s^2(1/s+2)(1/s^2+1/s+1)} = 0 \end{aligned}$$

一般によく利用されるのは(イ)の方であることはすでに述べたとおりである。このように最終値の定理を適用する場合には、本書の一般公式の形がきわめて有利であることもすでに述べたとおりであり、一般公式はすべて s^n の項を除いて、 $s \rightarrow 0$ のとき 1 となる形をとっていることに注意してほしい。このことは単に過渡現象の問題だけでなく、伝達関数を取扱う場合にもきわめて有効な定理であるといえよう。

【例題 8-6】

次のような伝達関数をもつ回路に、入力として 1V の直流電圧を加えると、出力の定常値はいくらになるか。

$$F_T = \frac{s^2+6s+9}{s^3+3s^2+5s+3}$$

この場合、 $E_i=1/s$ であるから、

$$E_o = \frac{s^2+6s+9}{s(s^3+3s^2+5s+3)} = \frac{(3+s)^2}{s(1+s)(3+2s+s^2)}$$

ここで最終値の定理を適用すれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(3+s)^2}{(1+s)(3+2s+s^2)} = 3 \quad [\text{V}]$$

ということになる。この例では最終値の定理を適用するためには、特に因数分解する必要はないことや、独立した s の項がないときには、分子と分母の定数項の比を考えるだけで十分であると考えられるかも知れない。しかし、次の例題を見てほしいのである。

【例題 8-7】

右の回路で、 $t=0$ で S を閉じたときの e_o の最終値は求められるか。

また初期値はどうか。

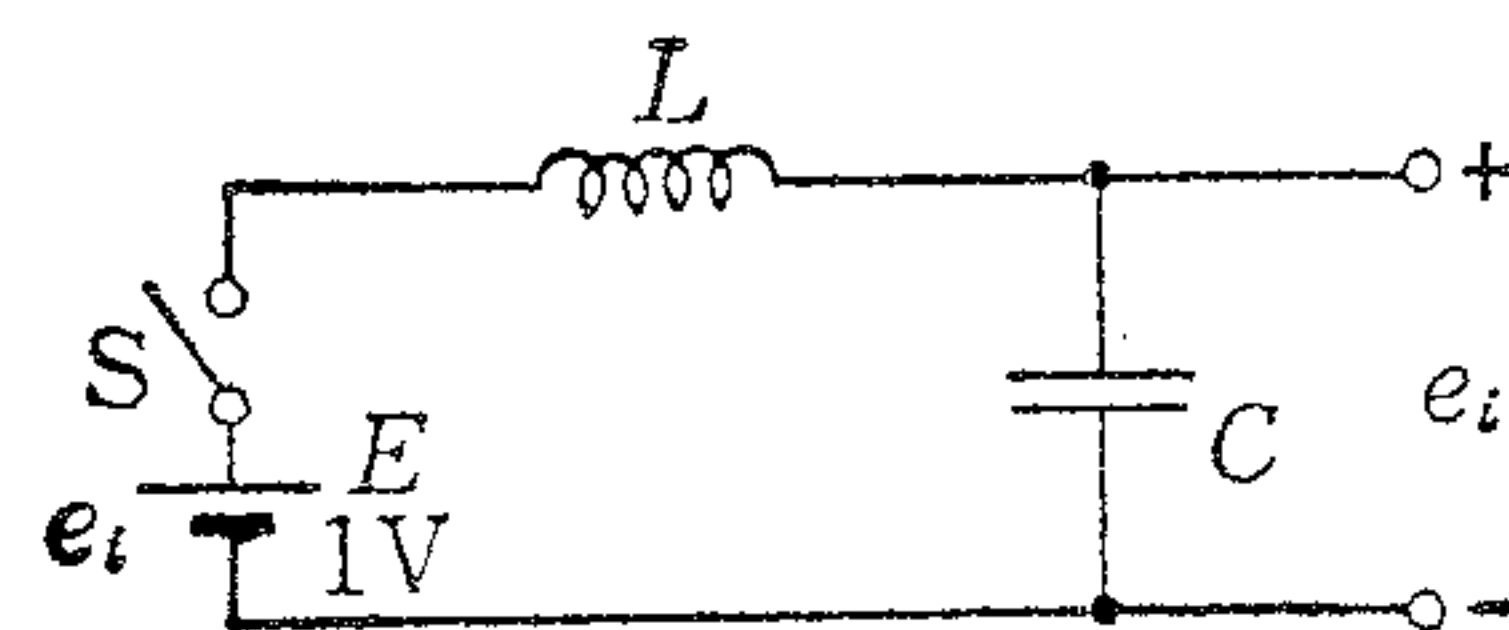


図 8-3

まず伝達関数を求めよう。

$$F_T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{1/sC}{sL+1/sC} = \frac{1}{1+s^2LC}$$

これに $E_i=1/s$ を代入して,

$$E_o = \frac{1}{s(1+s^2LC)}$$

最終値の定理をそのまま適用するとすれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_o = \lim_{s \rightarrow 0} sE_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+s^2LC} = 1$$

しかるに、一方この E_o は公式 0101B において $\omega_1=1/\sqrt{LC}$ とおいて逆変換すれば

$$e_o = 1 - \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

となるので、最終値は求められないはずである。いいかえると、このような場合にこの定理をそのまま適用してはならないのである。

この定理が使用できる条件は関数の最終値が存在する場合であり、 $sF(s)$ の分母が正根とか、単独の純虚数根をもたないことが必要となるのである。

したがって、例題 8-6 の分母の因数分解は実は必要なのであり、この確認のためには分解した結果を一応検討しなければならないのである。

初期値については、

$$\lim_{t \rightarrow 0} e_o(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1+s^2LC} = 0$$

である。

8-4 その他の重要点の一部

工学的に見て、数学的に程度の高い問題はあまり実用的ではないので、これ以上あまり高度の問題に立入ることはやめたいと思う。しかし以上の問題以外のことで、工学的に有効な事項の二、三について簡単に触れておくことにしよう。

8-4-1 周期関数の取扱い

いま、図 8-4 のように、同じ形の波形を周期的に繰り返す場合について考えて見ることにしよう。

まず最初の第一周期 T の中で、 $f(t)$ のラプラス変換が可能であるとすれば、

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) = \int_0^T \varepsilon^{-st} f_1(t) dt \dots\dots\dots (8-9)$$

となる。次の第二周期について、 $f_2(t)$ は上記の $f_1(t)$ を T だけ右へ移動したものと考えることができるから、(8-1) 式の公式によって

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t-T)] = \varepsilon^{-Ts} F_1(s)$$

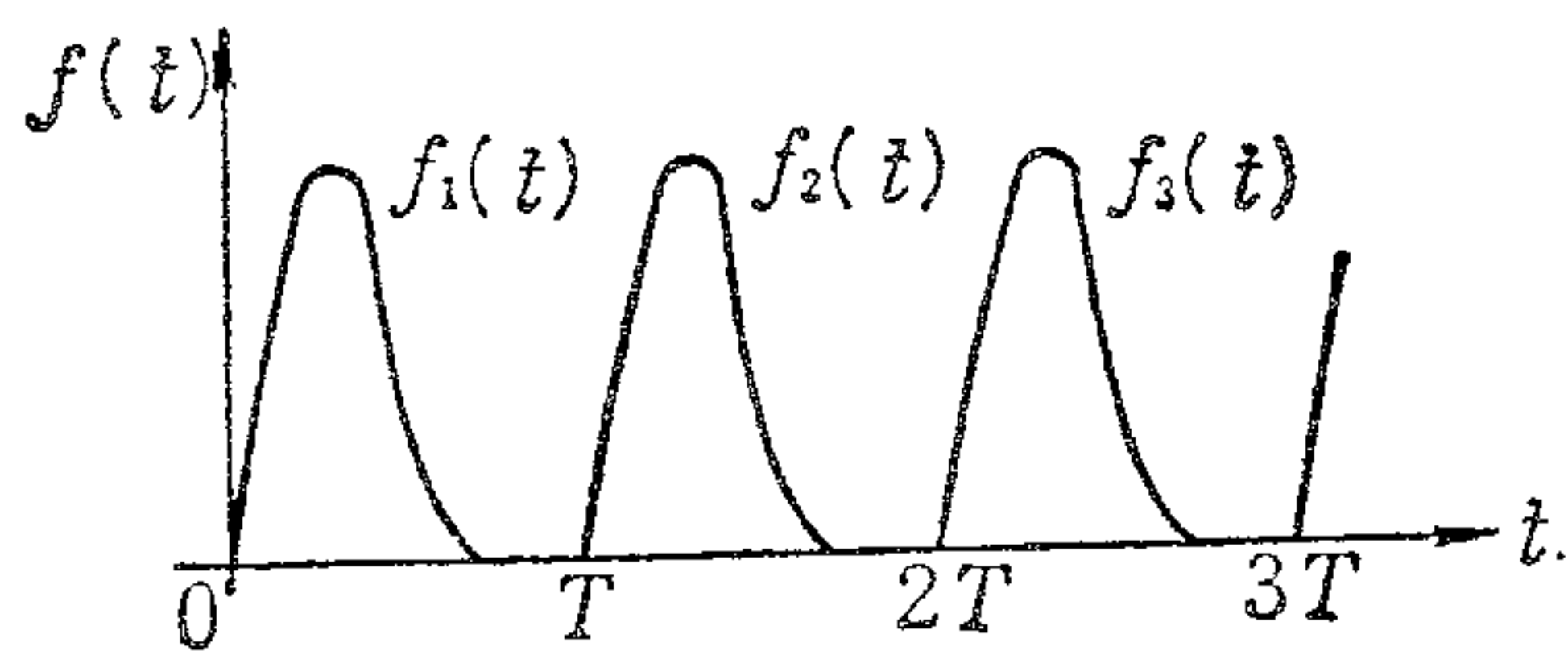


図 8-4

まったく同様にして, $f_3(t)$, $f_4(t)$ …… はそれぞれ $f_1(t)$ を $2T$, $3T$ だけ移動したものと考えられるから,

$$\mathcal{L}[f_3(t)] = \mathcal{L}[f_1(t-2T)] = \varepsilon^{-2Ts} F_1(s)$$

$$\mathcal{L}[f_4(t)] = \mathcal{L}[f_1(t-3T)] = \varepsilon^{-3Ts} F_1(s)$$

⋮

$$\mathcal{L}[f_{n+1}(t)] = \mathcal{L}[f_1(t-nT)] = \varepsilon^{-nTs} F_1(s) \dots\dots\dots (8-10)$$

これらの式を合計すれば,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_0^n \mathcal{L}[f_1(t-nT)] = F_1(s) (1 + \varepsilon^{-Ts} + \varepsilon^{-2Ts} + \dots\dots + \varepsilon^{-nTs})$$

$n \rightarrow \infty$ のときは, この式の右辺は等比級数であるから, その和をとって

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - \varepsilon^{-Ts}}$$

$$\therefore F(s) = \frac{\int_0^T \varepsilon^{-st} f_1(t) dt}{1 - \varepsilon^{-Ts}} = \frac{F_1(s)}{1 - \varepsilon^{-Ts}} \dots\dots\dots (8-11)$$

この結果からいえることは

“周期関数のラプラス変換は, その第一周期 T 中の関数のラプラス変換を $(1 - \varepsilon^{-Ts})$ で割ったものに等しい” ということになる。

【例題 8-8】

図 8-5 のような $\sin t$ の半波整流波のラプラス変換を求めよ。

まず, 第一周期 $T = 2\pi$ 中の $f_1(t)$ について考える。この場合は,

$$0 \leq t \leq \pi \text{ のとき } f_1(t) = \sin t$$

$$\pi \leq t \leq 2\pi \text{ のとき } f_1(t) = 0$$

であるから,

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \int_0^\pi \varepsilon^{-st} \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} \varepsilon^{-st} \cdot 0 \cdot dt = \int_0^\pi \varepsilon^{-st} \sin t dt$$

しかるに,

$$\sin t = \frac{\varepsilon^{jt} - \varepsilon^{-jt}}{2j}$$

であるから,

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \int_0^\pi \varepsilon^{-st} \cdot \frac{(\varepsilon^{jt} - \varepsilon^{-jt})}{2j} dt$$

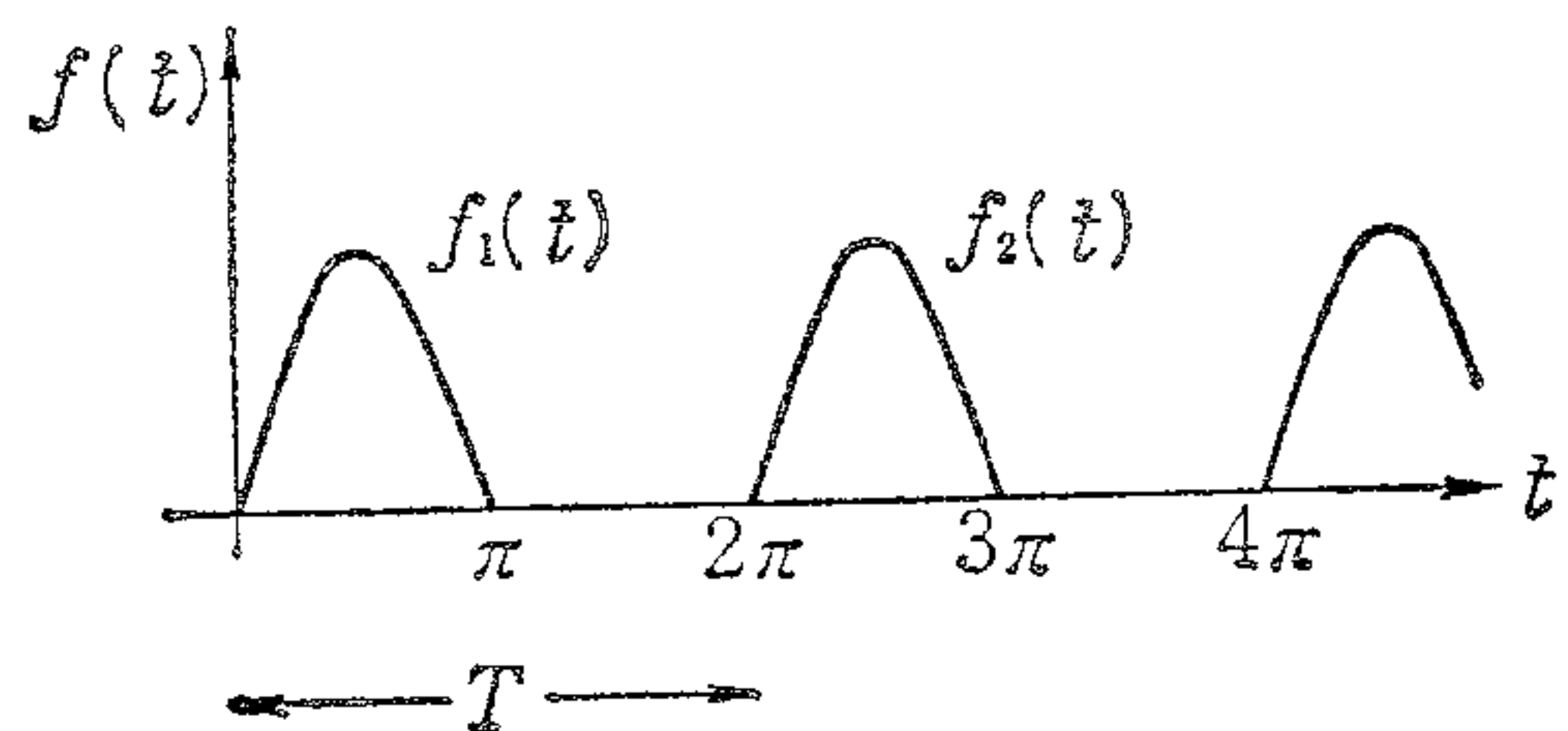


図 8-5

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2j} \left[\int_0^\pi \varepsilon^{-(s-j)t} dt - \int_0^\pi \varepsilon^{-(s+j)t} dt \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\left[\frac{-\varepsilon^{-(s-j)t}}{s-j} \right]_0^\pi - \left[\frac{-\varepsilon^{-(s+j)t}}{s+j} \right]_0^\pi \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j} - \frac{\varepsilon^{-(s-j)\pi}}{s-j} - \frac{1}{s+j} + \frac{\varepsilon^{-(s+j)\pi}}{s+j} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{2j}{1+s^2} + \frac{(s-j)\varepsilon^{-(s+j)\pi} - (s+j)\varepsilon^{-(s-j)\pi}}{1+s^2} \right] \\
&= \frac{1}{2j(1+s^2)} \left[2j + \varepsilon^{-\pi s} \left\{ (s-j)\varepsilon^{-j\pi} - (s+j)\varepsilon^{j\pi} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{1+s^2} \left[1 + \varepsilon^{-\pi s} \left\{ s \cdot \frac{\varepsilon^{-j\pi} - \varepsilon^{j\pi}}{2j} - \frac{j(\varepsilon^{j\pi} + \varepsilon^{-j\pi})}{2j} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{1+s^2} \left[1 + \varepsilon^{-\pi s} \{ s(-\sin \pi) - \cos \pi \} \right] \\
&= \frac{1 + \varepsilon^{-\pi s}}{1 + s^2} \equiv F(s)
\end{aligned}$$

ということになって、あとは $T=2\pi$ だから

$$F(s) = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2\pi s}} \times \frac{1 + \varepsilon^{-\pi s}}{1 + s^2} = \frac{1}{(1 + s^2)(1 - \varepsilon^{-\pi s})} \dots \dots \dots (8-12)$$

ということになるのである。

【例題 8-9】

$\sin t$ の全波整流波である、 $f(t) = |\sin t|$ のラプラス変換を求めよ。

この問題を考える場合に、二つの考え方が可能である。その一つは前題の半波整流波を π だけずらせたものと元の波との合成と考える方法であり、もう一つは、 $T = \pi$ と考えて計算する方法である。

いずれの方法でも、前題の $F_1(s)$ が利用できるので、簡単に解くことができよう。

前者の考え方によると、 π だけずらせたものは $\varepsilon^{-\pi s}$ を掛ければよいから、元の関数と合成すれば、

$$F(s) = F(s)_{(8-12)} (1 + \varepsilon^{-\pi s}) = \frac{1 + \varepsilon^{-\pi s}}{(1 + s^2)(1 - \varepsilon^{-\pi s})}$$

後者の方法では

$$F(s) = \frac{F_1 s}{1 - \varepsilon^{-\pi s}} = \frac{1 + \varepsilon^{-\pi s}}{(1 + s^2)(1 - \varepsilon^{-\pi s})}$$

となって同じ結果が得られる。いずれにしても、前題の $F_1(s)$ を利用したから簡単なのであって、始めから解くのであればそう容易な問題であるとはいえない。

8-4-2 $t^n f(t)$ のラプラス変換

公式集の中の、0001~000nとして示されているものは、 $f(t)=1$ とした場合のこの関係の式に相当するものと考えてよい。しかし、1以外の関数に t^n を掛けた場合には一体どうなるのかを考えて見よう。

先に結論から示すと、

(イ) $f(t)$ に t^n を掛けることは、像関数の $F(s)$ を n 回微分すると共に $(-1)^n$ を掛けることに相当する。

(ロ) $f(t)$ に t^{-n} を掛けること、すなわち t^n で割ることは、 $F(s)$ を、 s から ∞ までについて n 回積分することになる。

この関係は像関数 $F(s)$ に s を掛けることが原関数の微分に、 s で割ることは $f(t)$ を 0 から t まで積分することになるということと対応しているのである。(次項参照)

いま、ラプラス変換の定義式において、 $f(t)$ が変換可能な関数の場合、これを微分してゆくと次のような計算が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt \\ \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{ds} \varepsilon^{-st} f(t) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} (-t) \varepsilon^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \cdot t f(t) dt \\ \frac{d^2}{ds^2} F(s) &= - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} t f(t) dt = - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{ds} \varepsilon^{-st} t f(t) \right] dt \\ &= - \int_0^{\infty} (-t) \varepsilon^{-st} t f(t) dt = (-1)^2 \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} t^2 f(t) dt \end{aligned}$$

これらの結果から推察して、

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} F(s) &= (-1)^n \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} t^n f(t) dt \\ \therefore \mathcal{L}[t^n f(t)] &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad \dots\dots\dots (8-13) \end{aligned}$$

ということになる。

また定義式を積分して見ると、

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} F(s) ds &= \int_s^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt \right] ds \\ &= \int_0^{\infty} \left[f(t) \int_s^{\infty} \varepsilon^{-st} ds \right] dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{t} \varepsilon^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} \cdot \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\therefore \int_s^\infty \varepsilon^{-st} ds = \left| \frac{-1}{t} \varepsilon^{-st} \right|_s^\infty = \frac{1}{t} \varepsilon^{-st}$$

この計算を繰返せば,

$$\underbrace{\int \int \int \dots \int}_n \int_s^\infty F(s) (ds)^n = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t^n} \right] \dots \dots \dots (8-14)$$

となることが容易に推察されるであろう。

【例題 8-10】

$f(t) = t^2 \varepsilon^{-\frac{t}{2}}$ をラプラス変換せよ。

まず $\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$ をラプラス変換した後, 二回微分すればよいのであるから, まず基本公式IVで

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{-\frac{t}{2}}] = \frac{2}{1+2s}$$

$$\mathcal{L}[t \varepsilon^{-\frac{t}{2}}] = -\frac{d}{ds} \cdot \frac{2}{1+2s} = \frac{4}{(1+2s)^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2 \varepsilon^{-\frac{t}{2}}] = -\frac{d}{ds} \cdot \frac{4}{(1+2s)^2} = \frac{16}{(1+2s)^3}$$

ということになるが, この例は簡単なので公式 0030C を逆に利用してもよいし, また (8-3) 式の公式を使った方が簡単であるかも知れない。

【例題 8-11】

$\mathcal{L}[t \sin t]$, $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$ を求めよ。

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1+s^2}$$

であるから,

$$\mathcal{L}[t \sin t] = -\frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{1+s^2} = \frac{2s}{(1+s^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = \left[\tan^{-1} s \right]_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

ということになる。読者の中にはこの結果の中で前者はよいとして、後者の逆変換は一体どうするのかという疑問を生じておられる方がいると思う。

このことについて、本書の程度で考えるとすれば、8-1-3項で ε^{-as} について説明した方法と同様に取扱うべきである。しかし、 $\tan^{-1}s$ というような関数が独立に存在していればよいが、そうでないときにはきわめて厄介なことになる。

工学の分野では、 $F(s)$ の中に指数関数とか三角関数が出て来ることは滅多にないし、逆三角関数が出てくることもほとんどないから、工学的な実用性の範囲を目的としている本書では触れないことにしたい。しかし、 s 領域での積分の必要性は時には発生するために、時として対数とか三角関数などが出現することになる。このときには特別な関数が必要になるのであり、これによって逆変換が可能になる。これらのことについては、本書よりやや高度の解説書を参照してほしいと思う。ここまでのことがマスターできたとすれば、そう大して困難なことではないであろう。

8-4-3 一般公式の拡充

巻末にあるような一般公式は、多くの解説書などにおいても同様であるが、その量には自から限度があることはわかっていただけることと思う。そしてまたそれぞれの目的、立場によって、その収録の内容、方法も多少異なっていることも同様にわかってほしいと思う。

本書では工学的な立場をとったので、数学的な傾向の公式は収録してないし、程度の高い関数を含む公式も除外してある。したがって、ここで拡充といっても、このような数学的な公式のことではもちろんあり得ない。

ここでは、前項でもちょっと触れたように、 s を掛けたり、割ったりすることによって得られる公式の拡充についてだけ触れておこうと思うのである。

すでに述べたように、一般公式は、 s と、一次因数 $(1+Ts)$ と二次因数 $(1+s^2/\omega_1^2)$ または $(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ との組み合わせから成り立っているのであるが、まず分子を一定として、分母について s を除外した組み合わせを考えるのである。一般公式を作り上げる場合の上手な手段を整理すると次のようになる。

- (イ) まず、分子の形で区分する。たとえば 1 , $1+as$, $1+as+bs$ など。
- (ロ) 分母について1次および2次因数の組み合わせを定め、(イ)と共に s を除いた式を考える。
- (ハ) (ロ)の式を部分分数分解法によって展開し、逆変換して整理する。
- (ニ) 次に s を掛ける場合（分子に s が現われる）には(ハ)の式を t で微分し、 s で割る場合（分母に s を掛ける）には、(ハ)の $f(t)$ を $0\sim t$ で積分をすることによって、(ロ)の式を中心とする一連の公式が得られる。

これらのことについて、最も簡単な例を示して説明すると次のようになる。

まず(ロ)の式として最も簡単な例として、公式 0010 を使うことにしよう。まず公式集からあらかじめ結果を拾っておこう。

$$0010 \quad \frac{1}{1+Ts} \quad \frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_0(t)$$

$$0011 \quad \frac{1}{s(1+Ts)} \quad 1-\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_1(t)$$

$$0012 \quad \frac{1}{s^2(1+Ts)} \quad t-T+T\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_2(t)$$

いま、 s を掛ける方の例では、公式集には-0011はないので、下の0012から始めることにすれば、 s を掛けることは $f(t)$ を t で微分すればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_2(t) &= \frac{d}{dt}[t-T+T\varepsilon^{-\frac{t}{T}}] = 1+T\left(-\frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}\right) \\ &= 1-\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_1(t) &= \frac{d}{dt}\left(1-\varepsilon^{-\frac{t}{T}}\right) = -\left(-\frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}\right) \\ &= \frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_0(t) \end{aligned}$$

ということになるのである。

s で割ってゆく場合は、0010 から始めるとして、このときは $0\sim t$ で積分すればよいから

$$\begin{aligned} \int_0^t f_0(t) dt &= \int_0^t \frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}} dt = \left[\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{-1/T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right]_0^t \\ &= \left[-\varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right]_0^t = 1-\varepsilon^{-\frac{t}{T}}=f_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(t) dt &= \int_0^t (1-\varepsilon^{-\frac{t}{T}}) dt = \left[t+T\varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right]_0^t \\ &= t+T\varepsilon^{-\frac{t}{T}}-T=f_2(t) \end{aligned}$$

となって、このようにすれば、公式を発展拡充することができることはわかったと思う。

公式集にはないが、分母に s をもう一回かけると

$$\int_0^t f_2(t) dt = \int_0^t (t-T+T\varepsilon^{-\frac{t}{T}}) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{t^2}{2} - Tt - T^2 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right]_0^t = \frac{t^2}{2} - Tt - T^2 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + T^2 \\
&= \frac{t^2}{2} - Tt + T^2 - T^2 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} = f_3(t)
\end{aligned}$$

となつてこの関係は、公式 0013 に相当するものであつて、

$$0013 \quad \frac{1}{s^3(1+Ts)} \quad \frac{t^2}{2} - Tt + T^2 - T^2 \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$$

という新しい公式が作られたことになるのである。

【例題 8-12】

公式 0100A によつて 0101A, -0101A を導け。

公式 0100A は、

$$\frac{1}{1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2} \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt$$

である。この右辺を上例のように $f_0(t)$ とおけば、0101A の場合の $f_1(t)$ は、積分すればよいはずであるから、積分を行つて見ることにするが、この積分はそう簡単ではない。

$$I = \int_0^t f_0(t) dt = \frac{\omega_1}{D} \int_0^t \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt dt = \frac{\omega_1}{D} I_1 \text{ とおく。}$$

まず、部分積分が必要であるから、

$$u = \varepsilon^{-d\omega_1 t} \quad dv = \sin \omega_1 Dt dt \text{ をおくと}$$

$$du = -d\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} dt$$

$$v = \frac{-1}{\omega_1 D} \cos \omega_1 Dt \text{ となるから}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\frac{-1}{\omega_1 D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt \right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{\omega_1 D} \right) (-d\omega_1) \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt dt \\
&= \frac{1}{\omega_1 D} - \frac{1}{\omega_1 D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt - \frac{d}{D} \int_0^t \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt dt
\end{aligned}$$

この式の第3項の積分だけを I_2 とおけば、ここでも

$$u = \varepsilon^{-d\omega_1 t} \quad dv = \cos \omega_1 Dt dt$$

とおくと

$$du = -d\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} dt \quad v = \frac{1}{\omega_1 D} \sin \omega_1 Dt$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_2 &= \left[\frac{1}{\omega_1 D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{\omega_1 D} (-d\omega_1) \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt dt \\
&= \frac{1}{\omega_1 D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt + \frac{d}{D} I_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= \frac{1}{\omega_1 D} - \frac{1}{\omega_1 D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt - \frac{d}{\omega_1 D^2} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt - \frac{d^2}{D^2} I_1 \\ \therefore \frac{D^2 + d^2}{D^2} I_1 &= \frac{1}{\omega_1 D^2} \left[D - (d \sin \omega_1 Dt + D \cos \omega_1 Dt) \varepsilon^{-d\omega_1 t} \right] \end{aligned}$$

しかるに $D = \sqrt{1-d^2}$ だから $D^2 + d^2 = 1$

$$\therefore I_1 = \frac{D}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_1} (d \sin \omega_1 Dt + D \cos \omega_1 Dt) \varepsilon^{-d\omega_1 t}$$

$$\text{ここで } \phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d}$$

とおけば, $D = \sin \phi$ $-d = \cos \phi$ であるから,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{D}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} (\sin \omega_1 Dt \cos \phi - \cos \omega_1 Dt \sin \phi) \varepsilon^{-d\omega_1 t} \\ &= \frac{D}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi) \\ I &= \frac{\omega_1}{D} I_1 = 1 + \frac{1}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi) \end{aligned}$$

相当厄介ではあったが結果は得られた。

-0101Aの方は, 微分をすればよいので計算は簡単である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_0(t) &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{\omega_1}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt \\ &= \frac{\omega_1}{D} (-d\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 Dt + \omega_1 D \varepsilon^{-d\omega_1 t} \cos \omega_1 Dt) \\ &= \frac{\omega_1^2}{D} (-d \sin \omega_1 Dt + D \cos \omega_1 Dt) \varepsilon^{-d\omega_1 t} \end{aligned}$$

ここで $\phi = \tan^{-1} D / -d$ とおけば

$-d = \cos \phi$ $D = \sin \phi$ であるから,

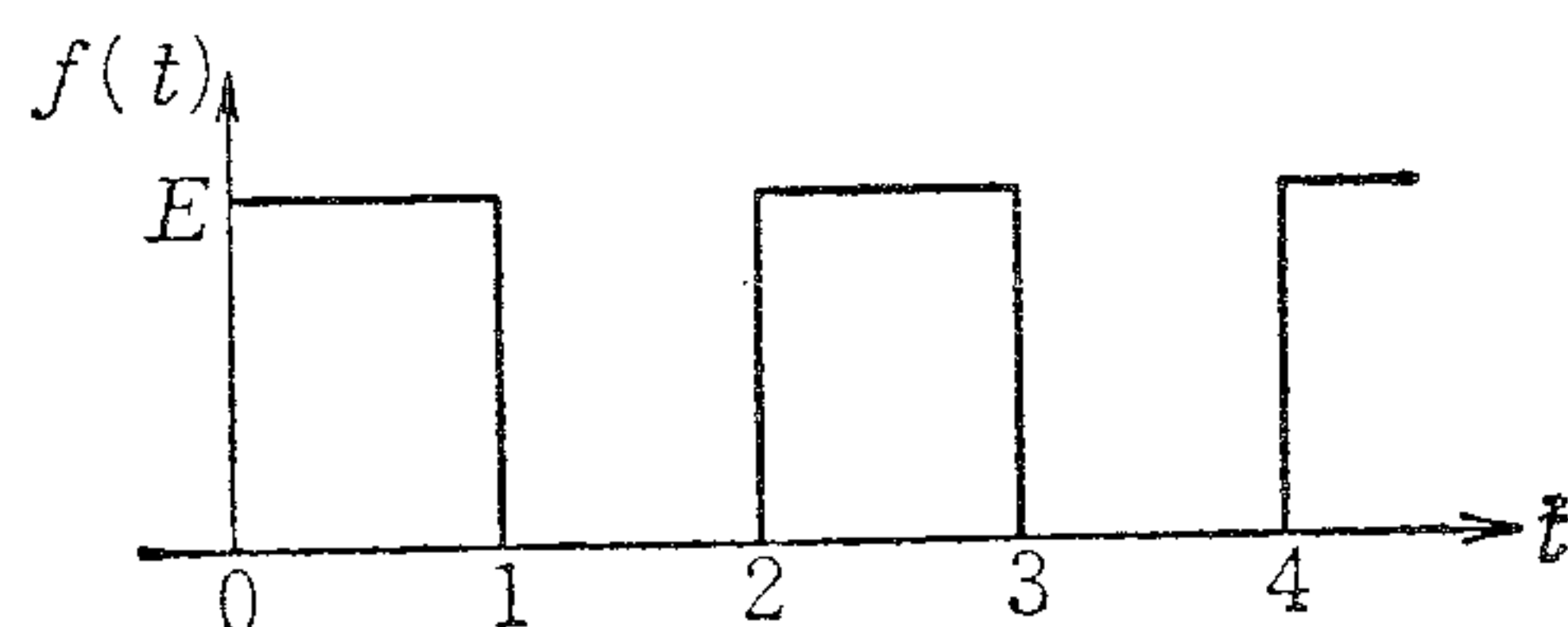
$$\frac{d}{dt} f_0(t) = \frac{\omega_1^2}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt + \phi)$$

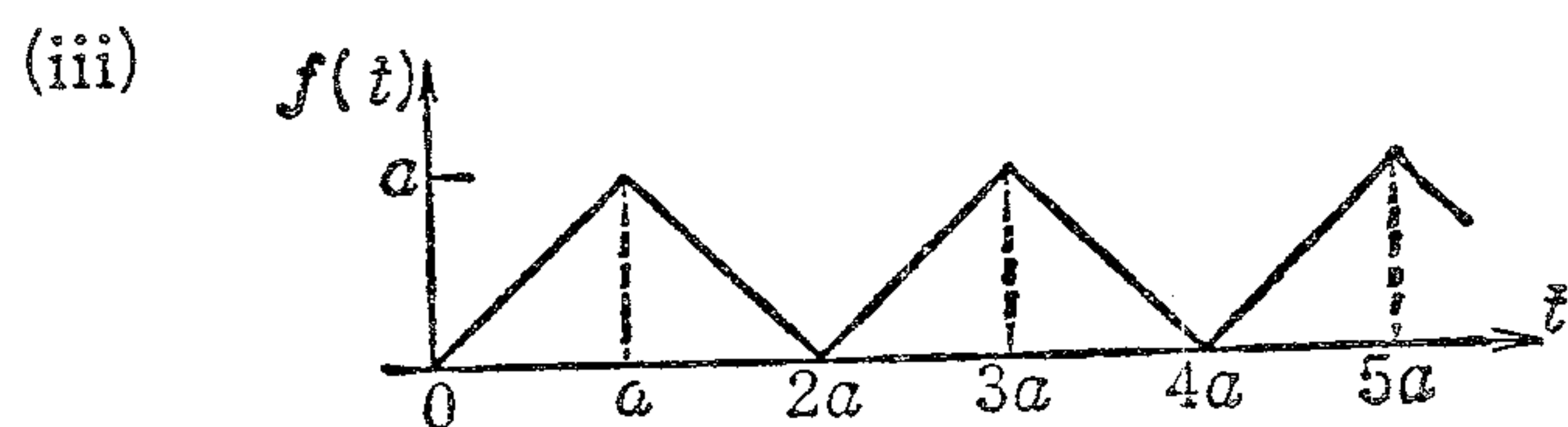
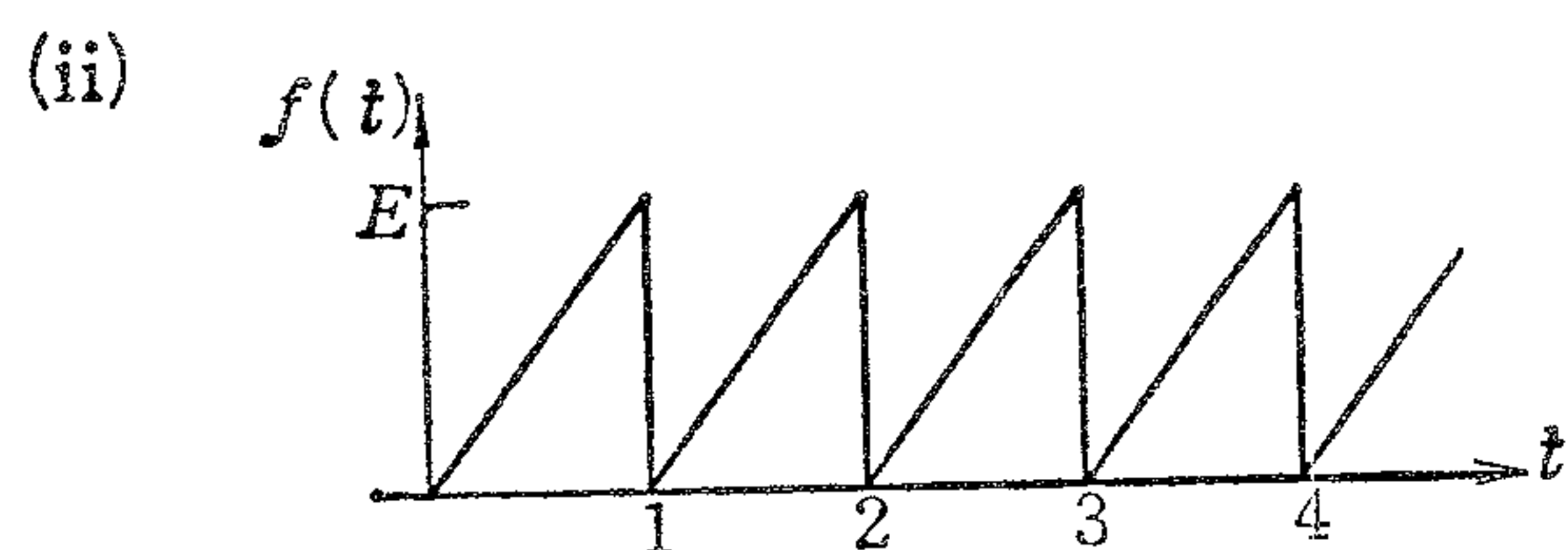
となる。

【問題 8-3】

1) 次のような連続波形の関数のラプラス変換を求めよ。

(i)





2) 次の各関数をラプラス変換せよ。

(i) $t^2 \cos t$ (ii) $t \sin 2t$ (iii) $t \frac{dx}{dt}$ (iv) $t^2 \frac{d^2x}{dt^2}$

3) 公式 0110B を元にして、

(i) 公式 -0111B

(ii) 公式 0111B

(iii) 公式 0112B

を導け。また

(iv) -0112B を作れ。

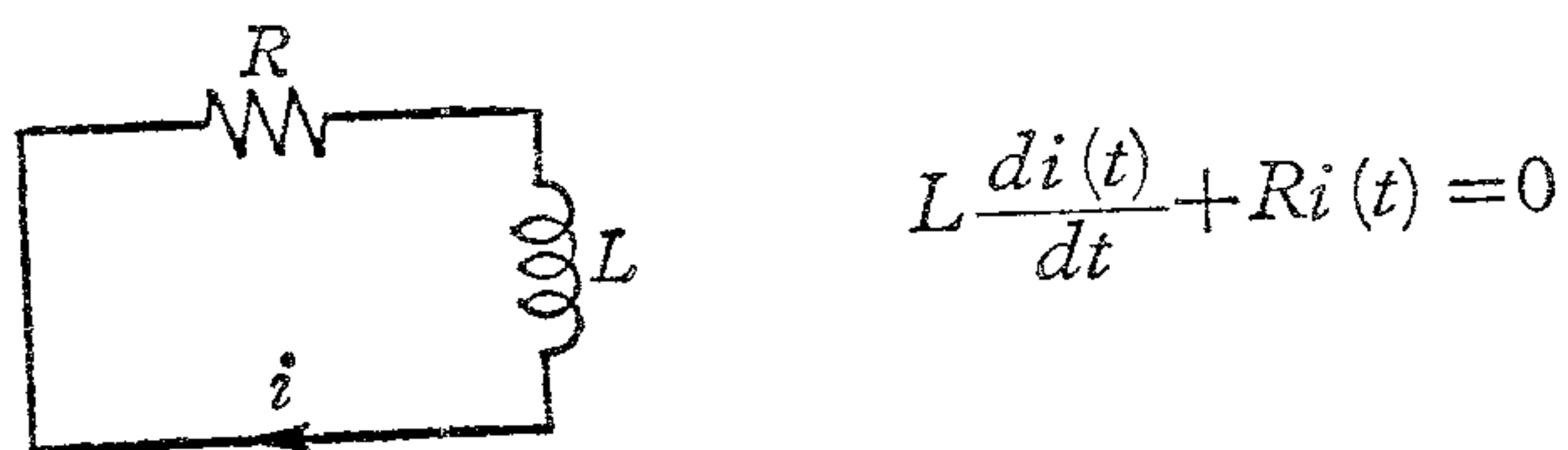
§ 9. シグナルフローグラフ

9-1 シグナルフローグラフ概説

微分方程式やそのラプラス変換されたものをながめても、その式に表現される意味を把握することはむずかしい。特に、本書のように、電気もしくは機械系などのシステムにおける微分方程式そのものをながめていても、系が複雑になるとわかりにくくなる。また電気系と機械系が混在するシステムにおいてはその系の全体的な把握がむずかしくなることは言うまでもない。

計測制御系などにおいては、その基本となる量の変化をシグナルとして、そのシグナルがどのように伝わっているかについてモデル化するとわかりやすくなると考えられる。このようなシステム記述に用いられるものが、シグナルフローグラフ (Signal Flow Graph) である。つまり、シグナル (信号) の流れを簡単に目視しうるグラフで代数方程式を表示するものである。信号は中空点 (ノード) で表示され、信号を伝える要素は線で表わされる。また、その要素の特性 (トランスミッタンス) は、矢印を使用した線により表示される。

たとえば、次のような回路において、入力を $i(0)$ とし、出力を $I(s)$ とすると、基本式は



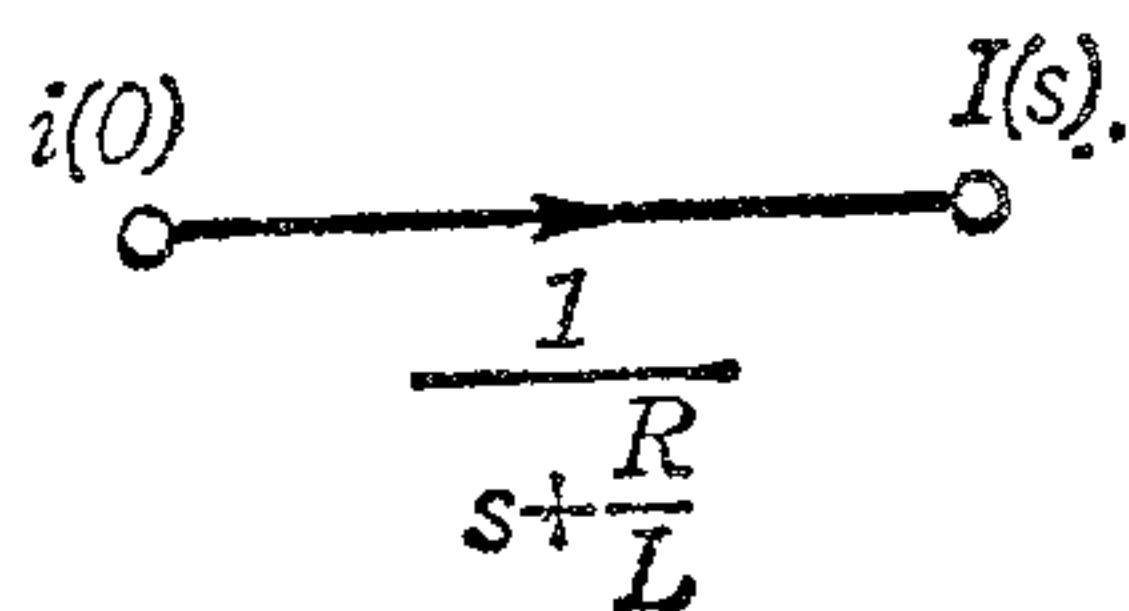
これをラプラス変換すると、

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = 0$$

となり、

$$I(s) = \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

となるが、これを、たとえば



というグラフで表現する。このグラフにおいて

| | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| ○ | は ノード (node), |
| → | は ブランチ (branch), |
| $\frac{1}{s + \frac{R}{L}}$ | は ブランチ利得, ブランチゲイン, (branch gain) |

と呼ばれる。また、 $i(0)$ は入力シグナル、 $I(s)$ は出力シグナルと呼んでいる。もう少し具体的な例、たとえば温度計などでは、測定温度と温度計の読みが一致するときには



などと表現することができる。

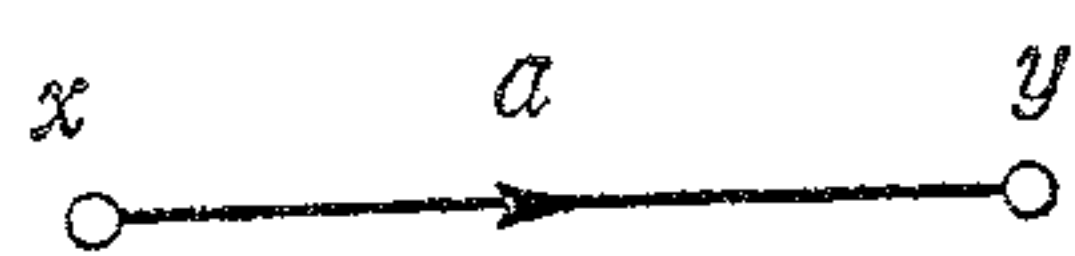
一般的なシステムにおいては、微分、積分などをはじめとする多くの動的な要素を持っている。これらを表現する微分方程式がラプラス領域では単なる代数方程式となる。通常シグナルフローグラフではその簡便性を利用してグラフ表示はすべてラプラス領域で表現される。すなわち、微分方程式で示される数式モデルをラプラス変換し簡単な図式モデルに置き変えているのにすぎないわけである。この図式モデル、すなわち、シグナルフローグラフ表示は、数式モデルと比べて直観性がよく、具体的な物理システムとの対応もよい。また、その系の中の任意の点の信号は、別の任意の点での応答にどのような影響を与えるかということなども図解法などにより簡単に解くことができる。

9-2 ノードとブランチ

ノードに関する入力の取扱いには次のような特徴がある。

- (1) ノードへの信号は入力信号の和で与えられる
- (2) ノードからの出力信号は、そのノードへの影響を与えない。

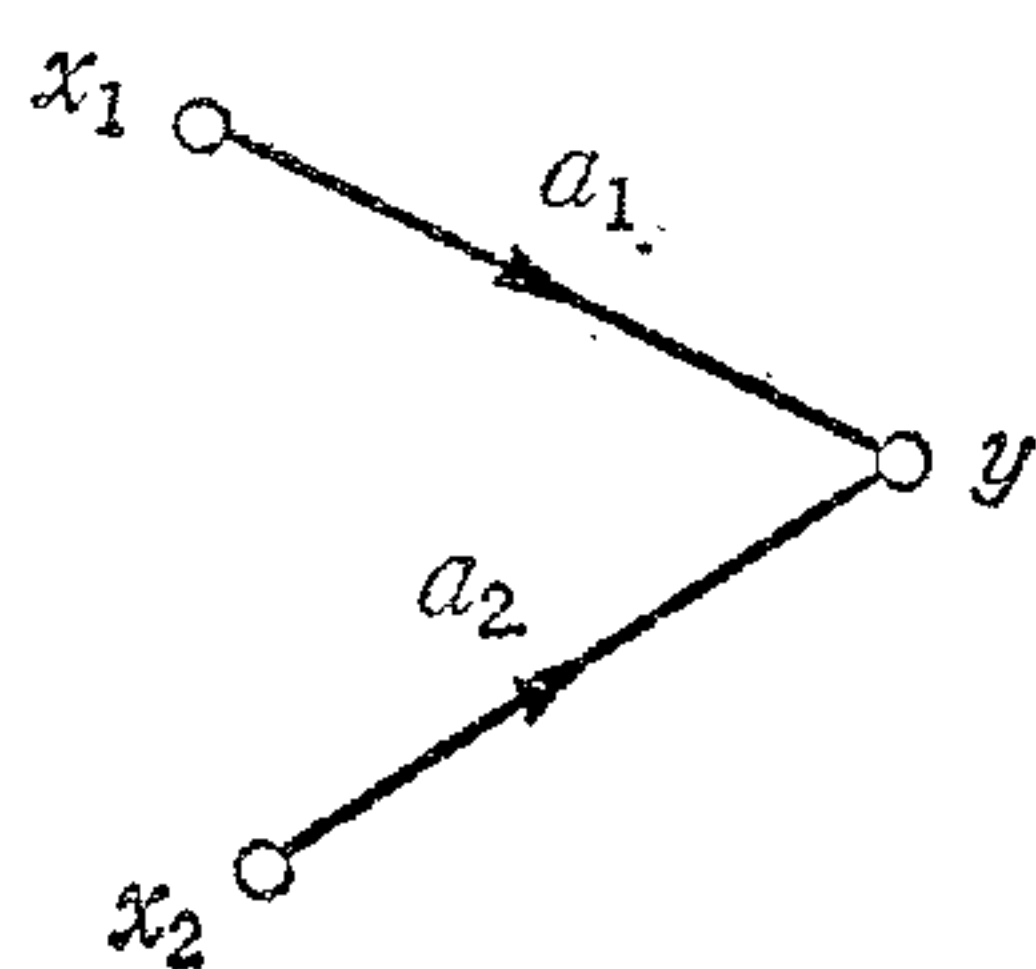
シグナルフローグラフにおいて



は

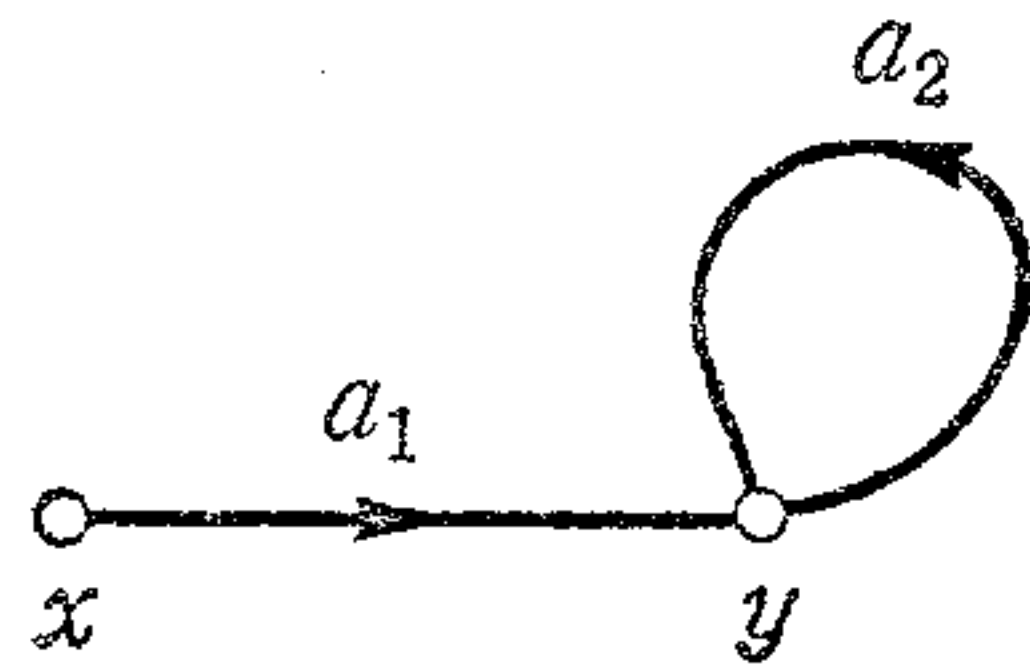
$$y = ax$$

を示している。このグラフは $x = -\frac{1}{a}y$ を直接的に意味していないことに注意が必要である。次に



は

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$



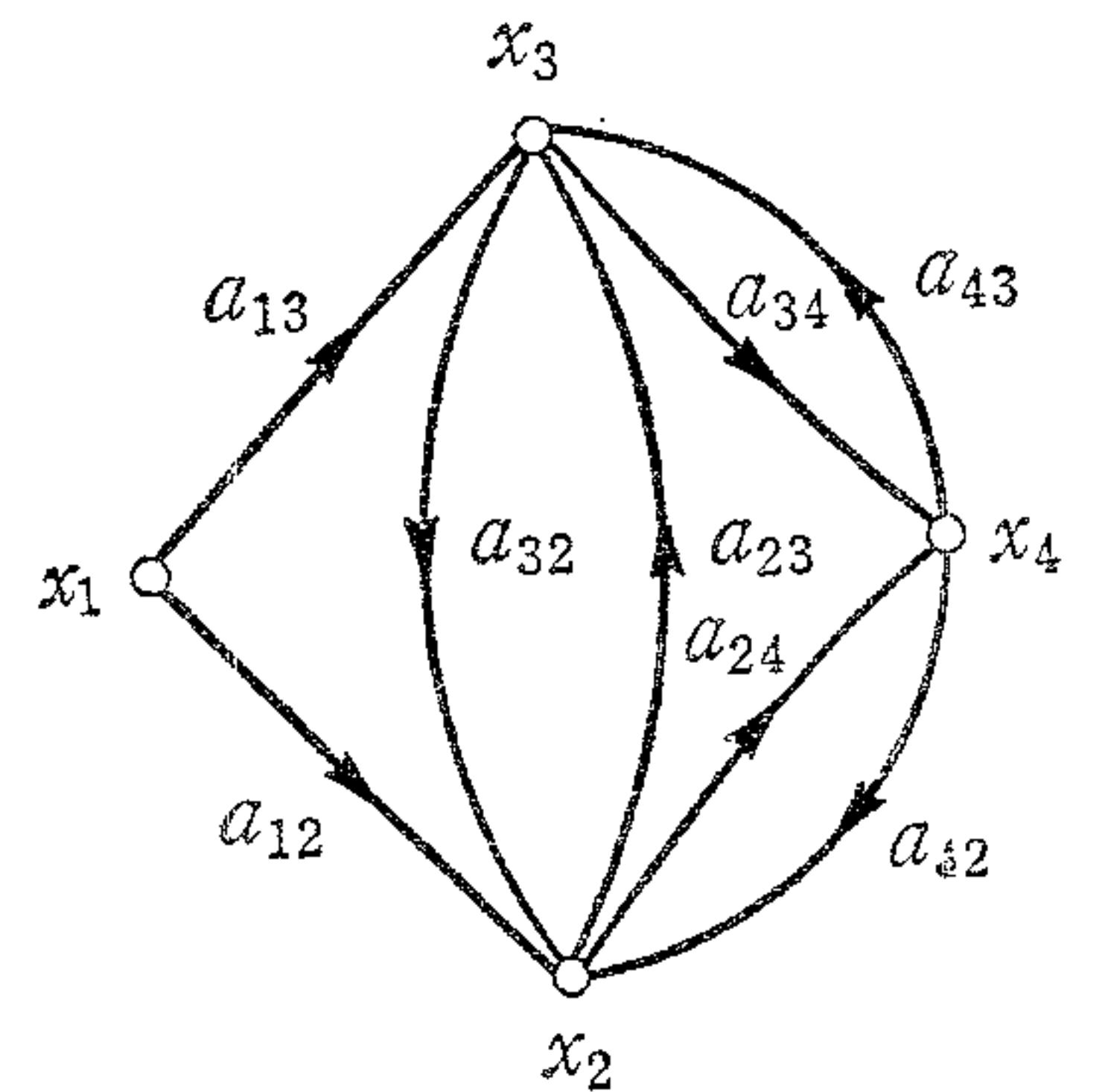
は

$$y = a_1 x + a_2 y$$

を示している。上述の例のように x, x_1, x_2 は出力ブランチのみを持っており、これはソース・ノードと呼ばれる。

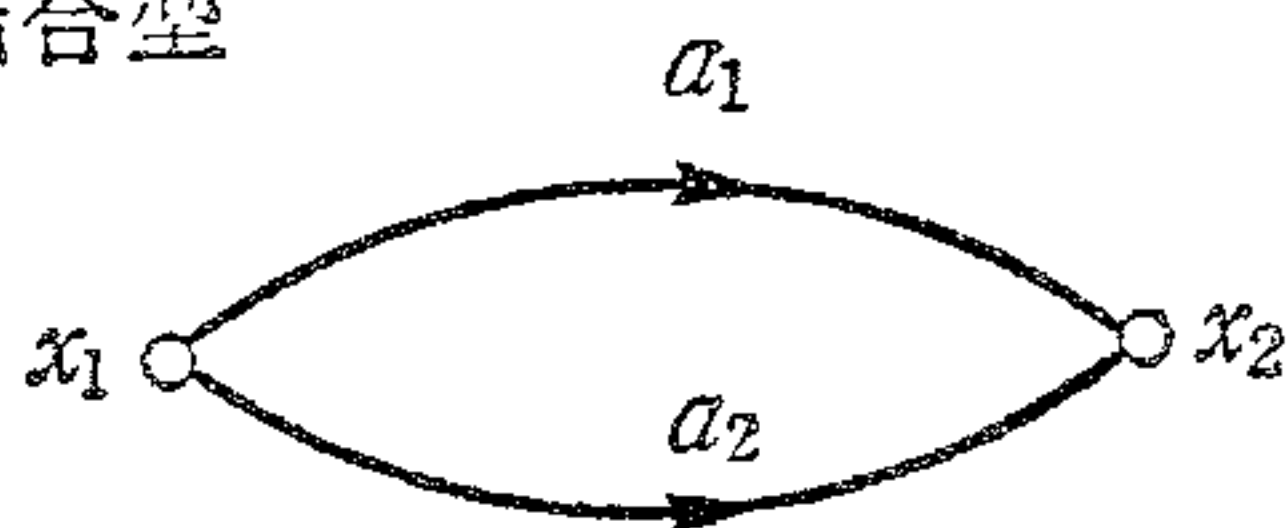
これより、例えば次式 (x_1, x_2, x_3, x_4 をノードとすると) は右図のように表現される。

$$\begin{aligned} x_2 &= a_{12}x_1 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \\ x_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{43}x_4 \\ x_4 &= a_{34}x_3 + a_{24}x_2 \end{aligned}$$



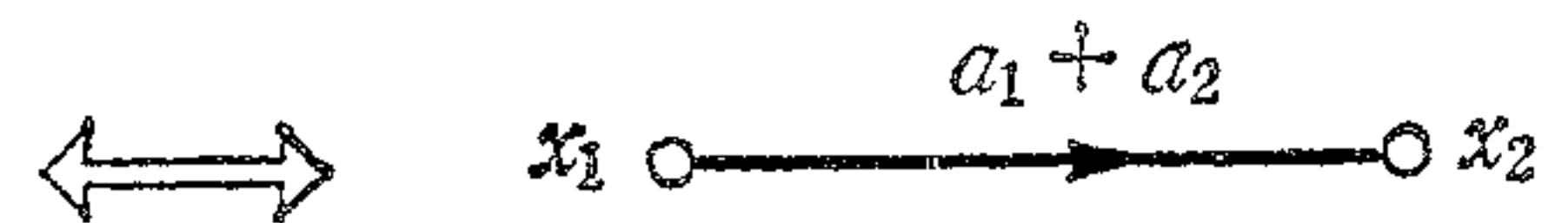
すなわち、図にあるように各ノードに注目する。各ノードからの出力シグナルは無視し、入力シグナルのみに注目すればよいことになる。ブランチの直列、並列は次のようになる。

並列結合型

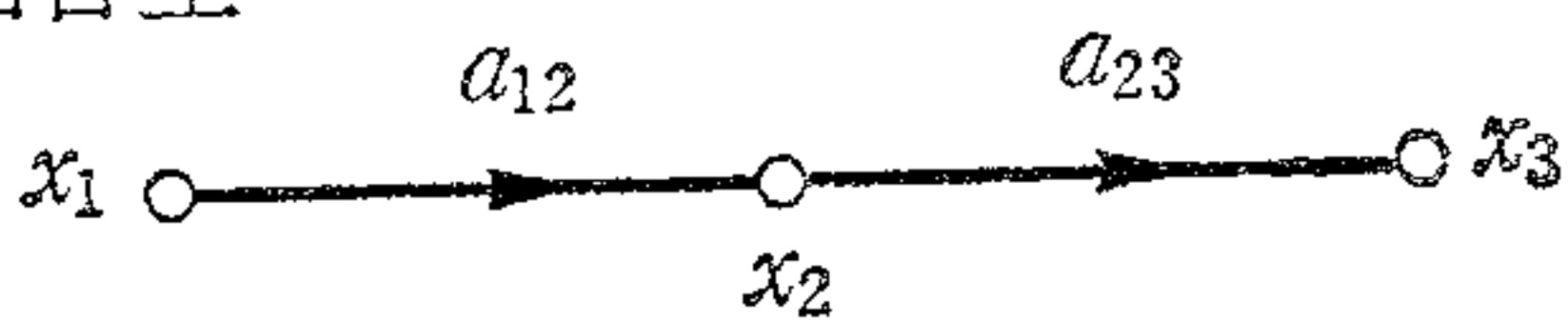


意味 $x_2 = (a_1 + a_2)x_1$

等価グラフ



直列結合型

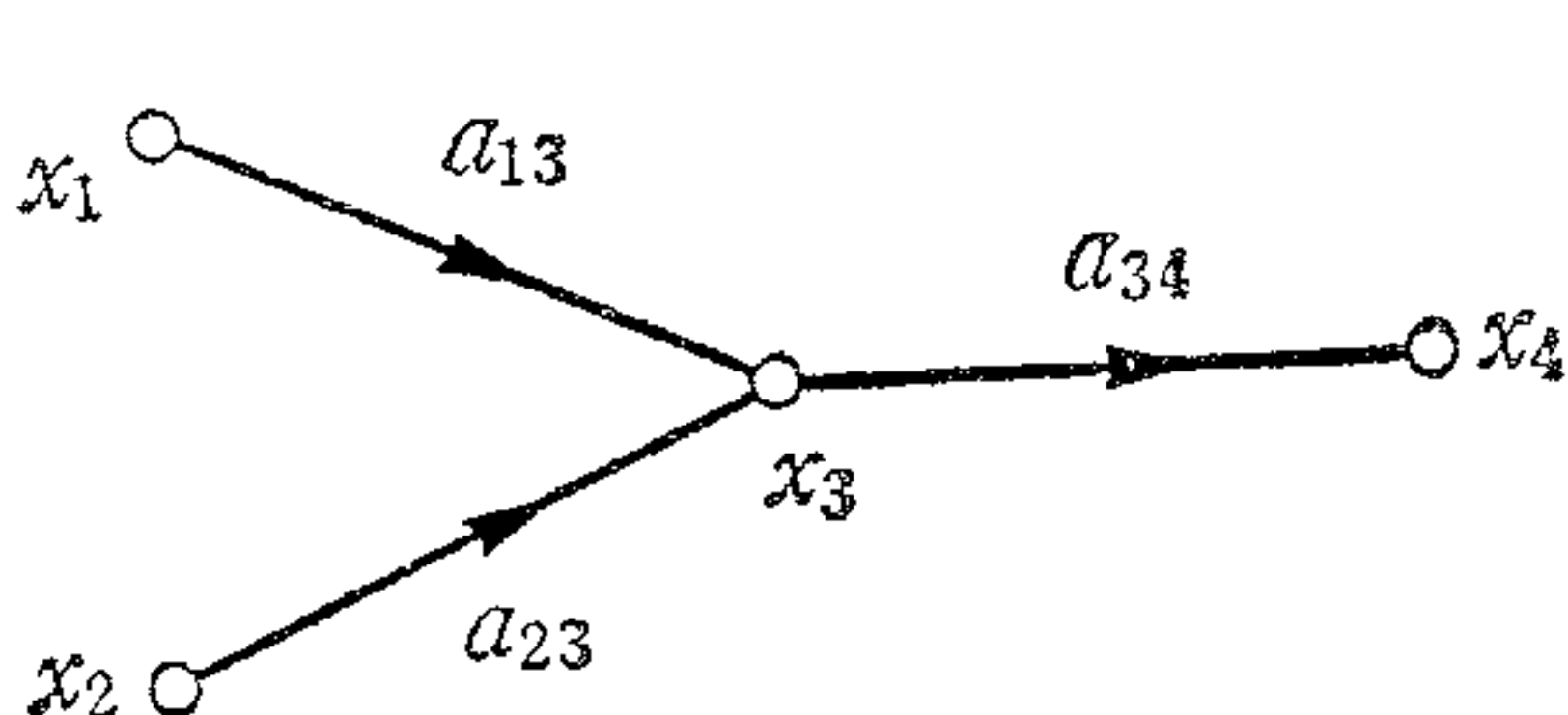


$x_2 = a_{12}x_1, x_3 = a_{23}x_2$

すなわち $x_3 = a_{12}a_{23}x_1$

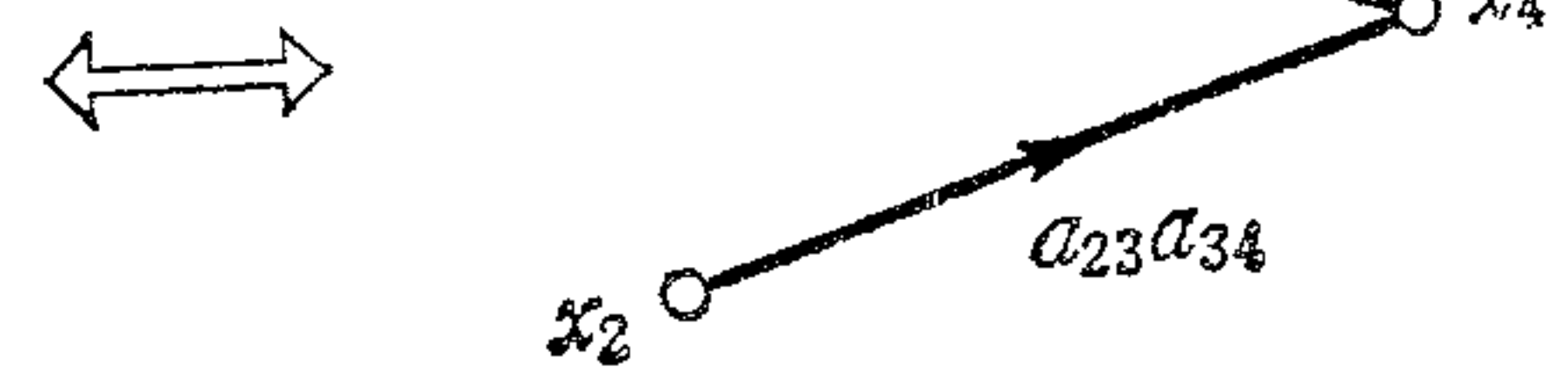


型

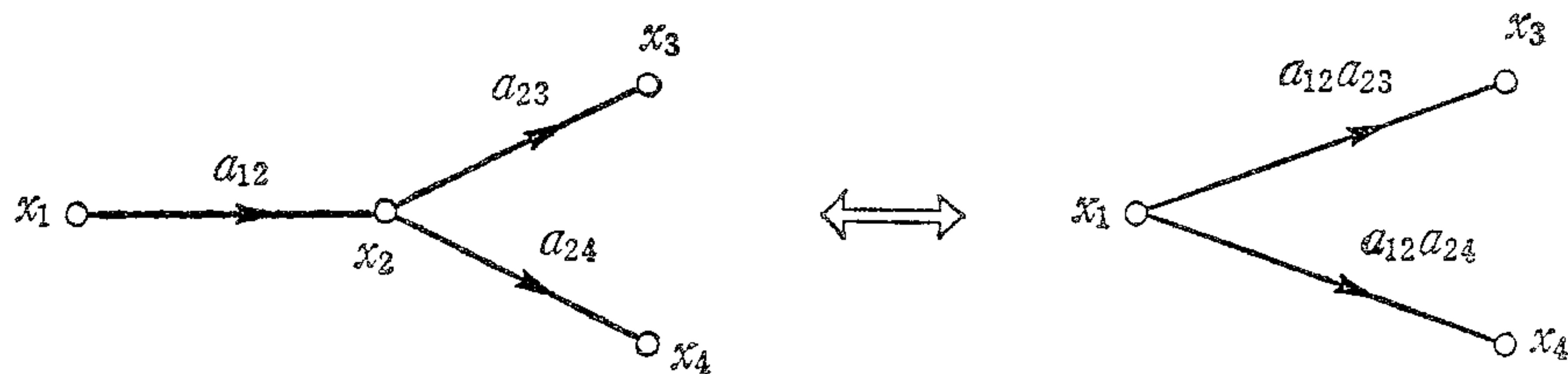


$x_4 = a_{34}x_3, x_3 = a_{23}x_2 + a_{13}x_1$

すなわち $x_4 = a_{23}a_{34}x_2 + a_{13}a_{34}x_1$



◁型



$$x_3 = a_{23}x_2, \quad x_4 = a_{24}x_2, \quad x_2 = a_{12}x_1$$

$$\text{すなわち } x_3 = a_{12}a_{23}x_1$$

$$x_4 = a_{12}a_{24}x_1$$

9-3 微分方程式のシグナルフローグラフ表現

一般的にラプラス変換後の微分方程式のシグナルフローグラフの表現については次のような手順でわかりやすく書くことができる。

ここでは例として二次微分方程式の場合を考えてみよう。

(例)

$$As^2X(s) + BsX(s) + CX(s) = DY(s)$$

とすると、

- (1) 出力項の最高次がかかっている項を左辺に持ってくる。

$$As^2X(s) = -BsX(s) - CX(s) + DY(s)$$

- (2) 左辺の係数を1とする（斉次形とする）。これで式の変形は完了。

$$s^2X(s) = -\frac{B}{A}sX(s) - \frac{C}{A}X(s) + \frac{D}{A}Y(s)$$

(基本式)

- (3) シグナルを列記する。シグナルが明確にわかるときには、これを書く必要はない。シグナルとなるノードに注意する。

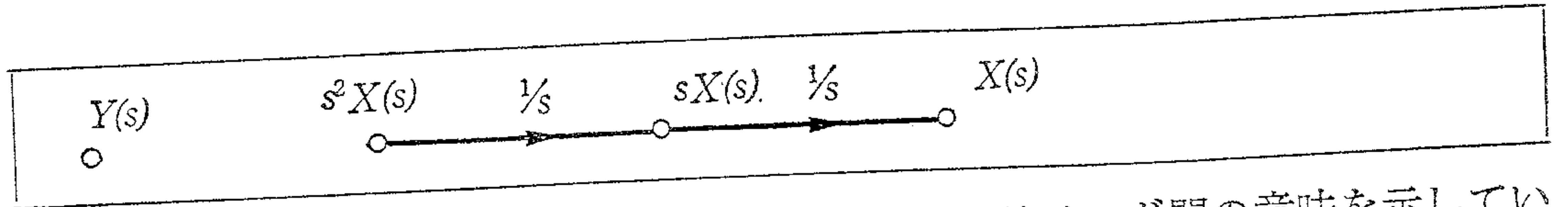
$$s^2X(s), \quad sX(s), \quad X(s), \quad Y(s)$$

- (4) 各シグナルに相当するノードを書き、ラベルをつける。

$$\circ Y(s) \quad \circ s^2X(s) \quad \circ sX(s) \quad \circ X(s)$$

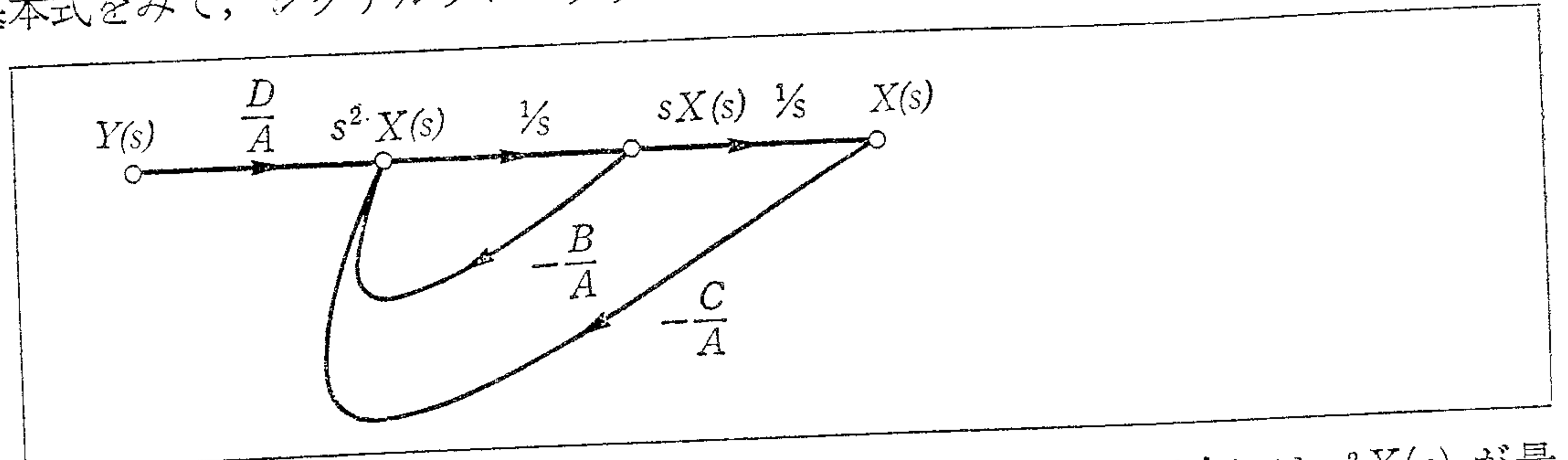
このシグナルの順序は、原則的にはどのように書いても良いが、グラフが見やすいようにするためには、左側に入力シグナル、右側に出カシグナルとなるようにするとともに、その出カシグナルは最高次から順に書くようにする。

- (5) この各ノードで、関係づけられているものを結ぶ。



この手順では、基本式がなくとも既に関係づけられているノード間の意味を示している。

(5) 基本式をみて、シグナルフローグラフを完成する。



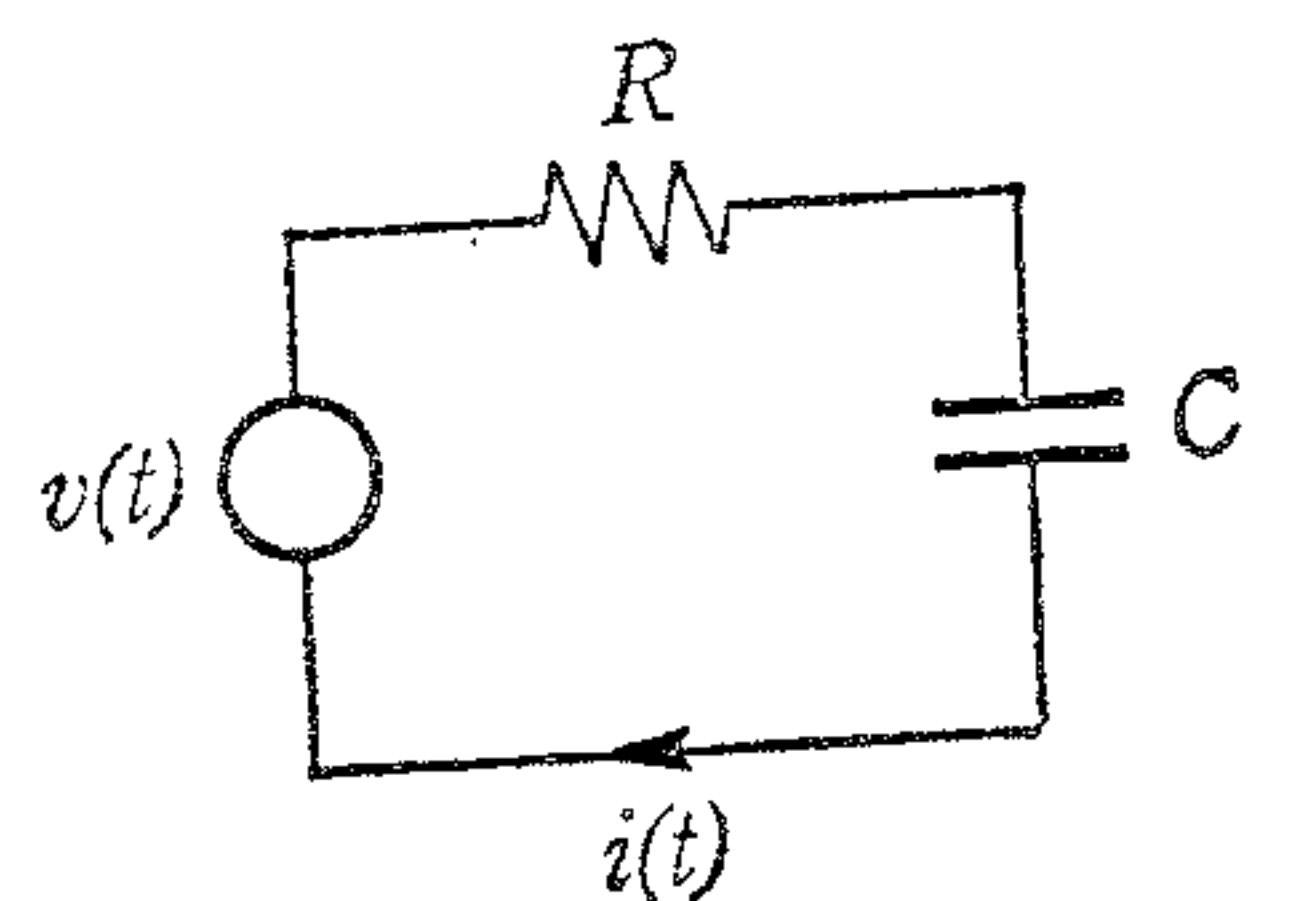
基本式は、シグナルの最高次への入力となっているので、この場合には $s^2 X(s)$ が最高次のシグナルとなり、それへすべての他のシグナルからの入力となる。

単純な回路の場合の例題

右図の回路において、入力シグナルを $V(s)$ 、出力シグナルを $I(s)$ としてシグナルフローグラフを書け。
ただし回路の状態方程式は

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

とする。



解答

状態方程式をラプラス変換すると、

$$RI(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{i^{-1}(0)}{s} = V(s)$$

$i^{-1}(0)$ は C の初期電圧であるので $v(0)$ とし、最高次のシグナルを左辺へ移項すると

$$RI(s) = -\frac{I(s)}{sC} - \frac{v(0)}{s} + V(s)$$

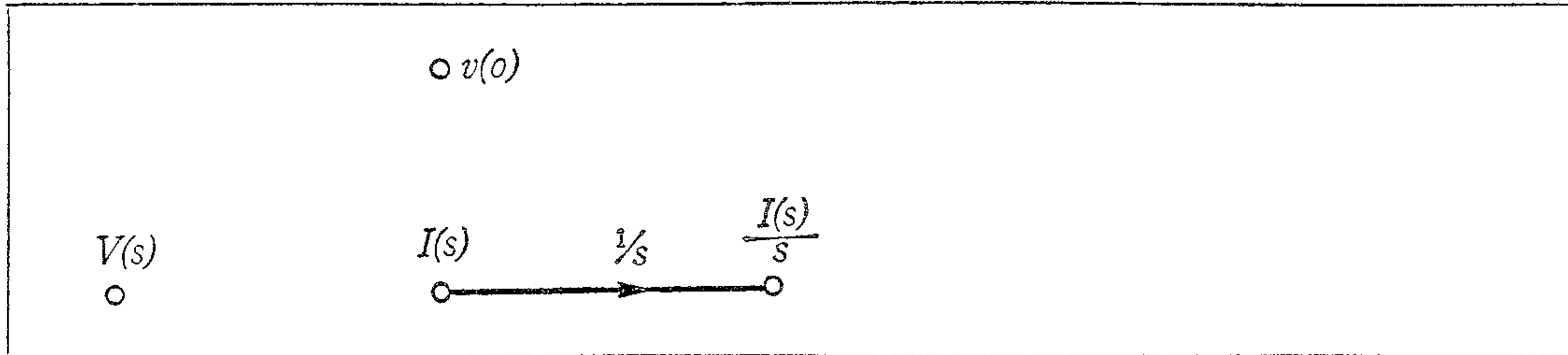
となり、左辺の係数を 1 とする。

$$I(s) = -\frac{I(s)}{sRC} - \frac{v(0)}{sR} + \frac{V(s)}{R} \quad (\text{基本式})$$

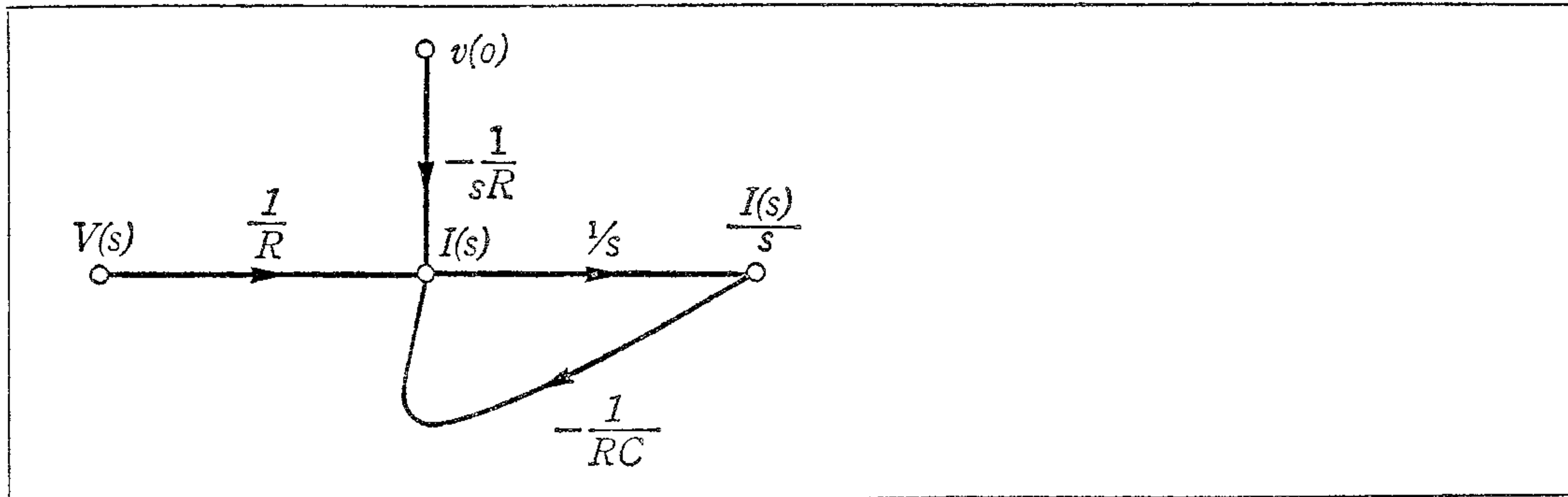
各シグナルを列記する。

$$I(s), \frac{I(s)}{s}, v(0), V(s)$$

各ノードを書き、すでに決っている関係を書くと次のようになる。



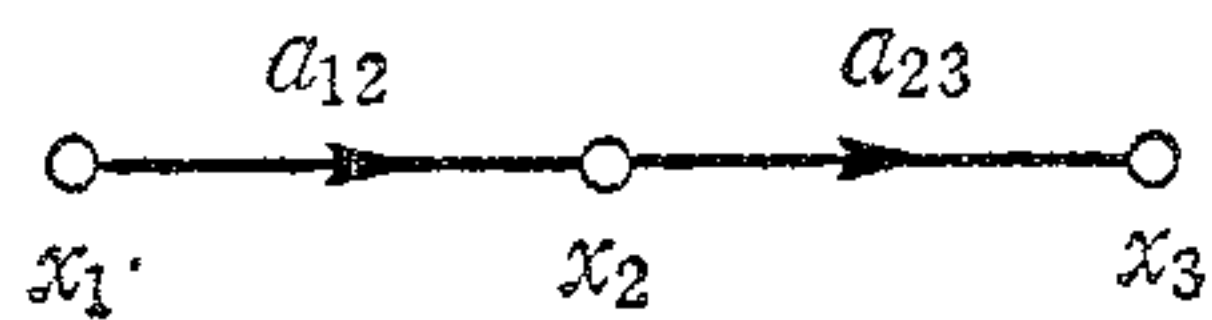
基本式よりグラフを完成する。



9-4 パス、ループおよびパス利得、ループ利得

パス (Path) はブランチの矢印に沿って進み、同一ノードを一度しか通らないブランチの連続したつながりと定義される。また、パス利得は、パスが通過したブランチの積で示される。例をあげると、

(1)

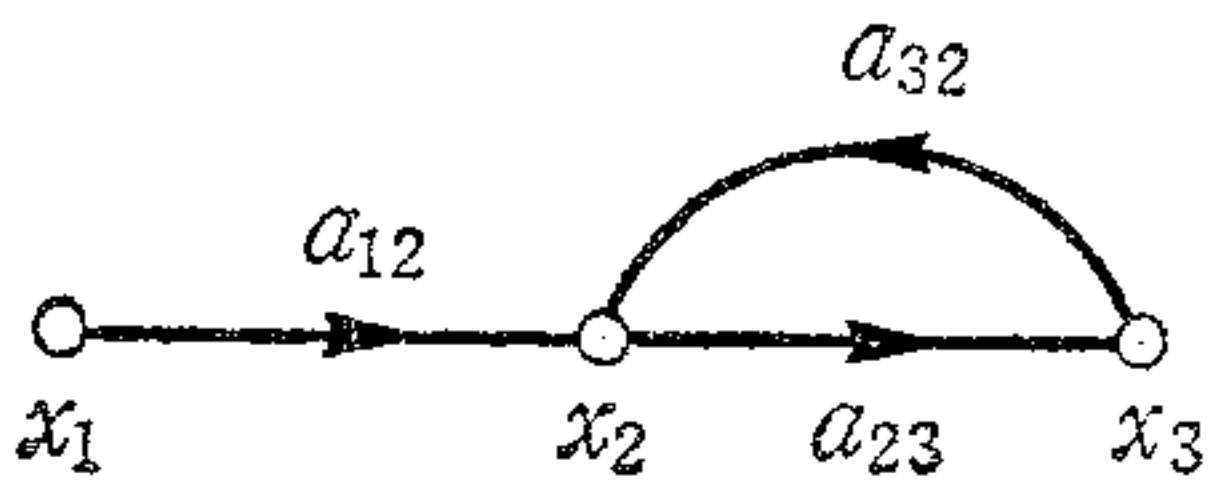


x_1 から x_3 までのパスは存在する。 x_1 から x_3 までのパス利得は $a_{12}a_{23}$

x_3 から x_1 までのパスは存在しない。

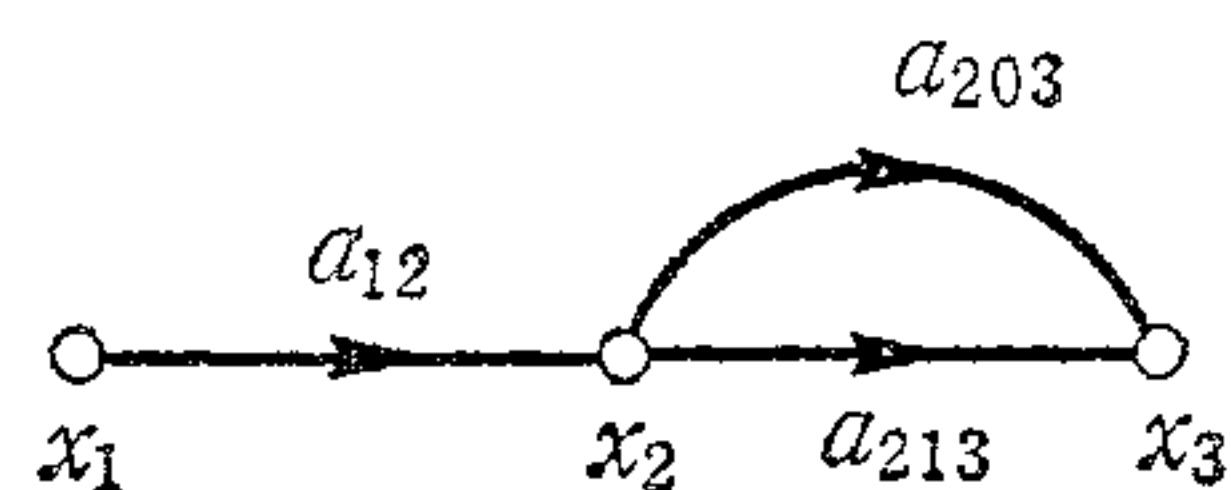
x_2 から x_3 まではパスは存在するが、 x_2 から x_1 までのパスは存在しない。

(2)



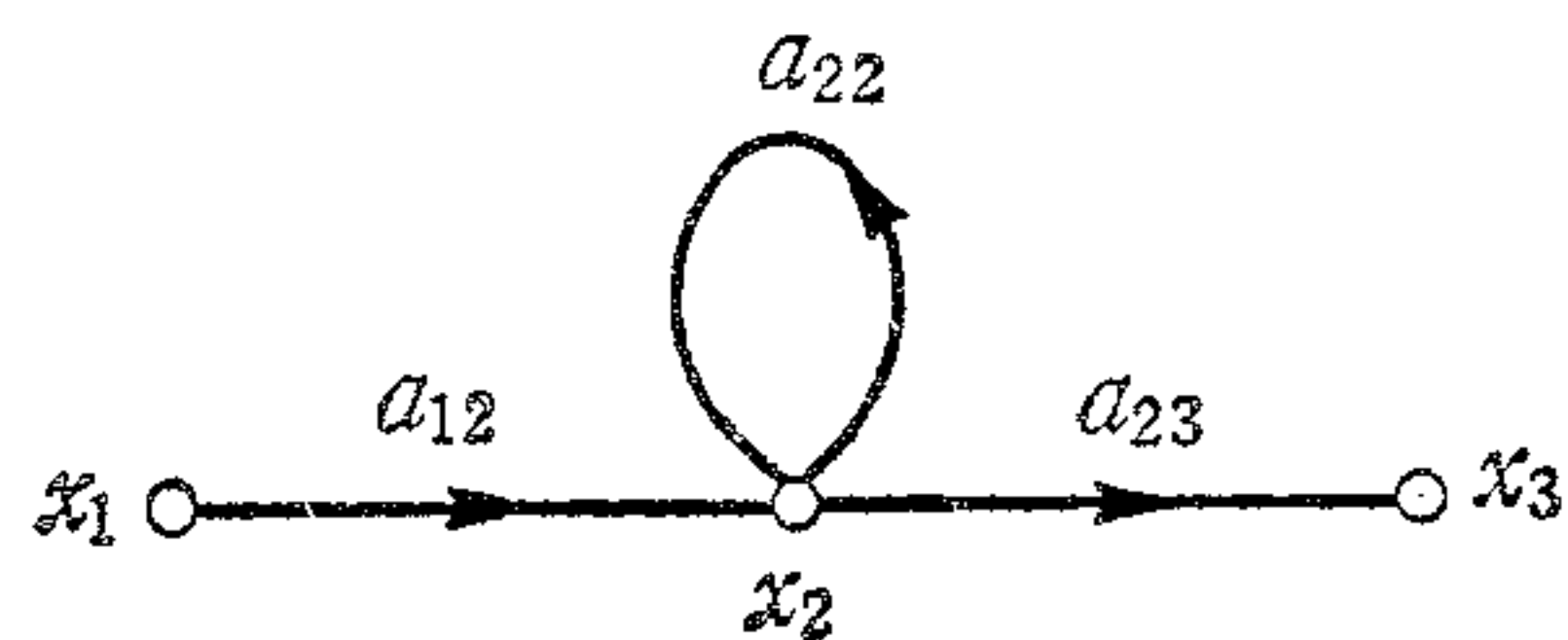
x_1 から x_3 までのパスは1つ存在する。そのパス利得は $a_{12}a_{23}$

(3)



x_1 から x_3 までのパスは2つ存在する。パス利得は上側のパスに対して $a_{12}a_{203}$ および下側のパスに対して $a_{12}a_{213}$ である。

(4) また自己ループがあるときには、



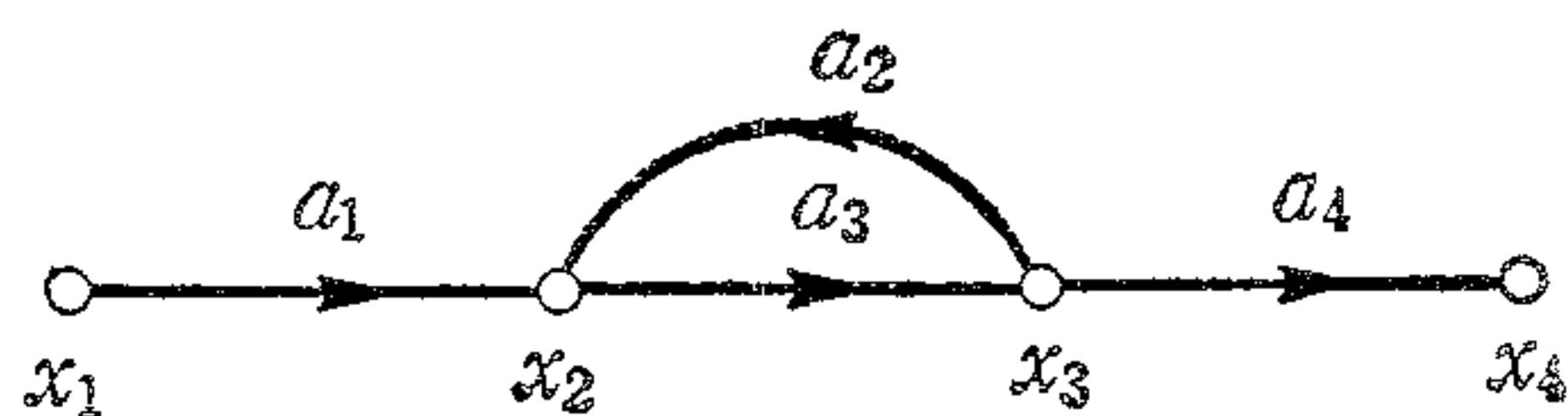
x_1 から x_3 までのパスは1つ存在する (パスは同一ノードを2度通らない) パス利得は $a_{12}a_{23}$

となる。

ループ (Loop) は一つのノードから出発してそのノードへ帰るもののうち、どのノードも1回しか通らないブランチの連結したつながりとして定義され、パス利得と同様にループ利得はそれらのブランチの積として定義される。

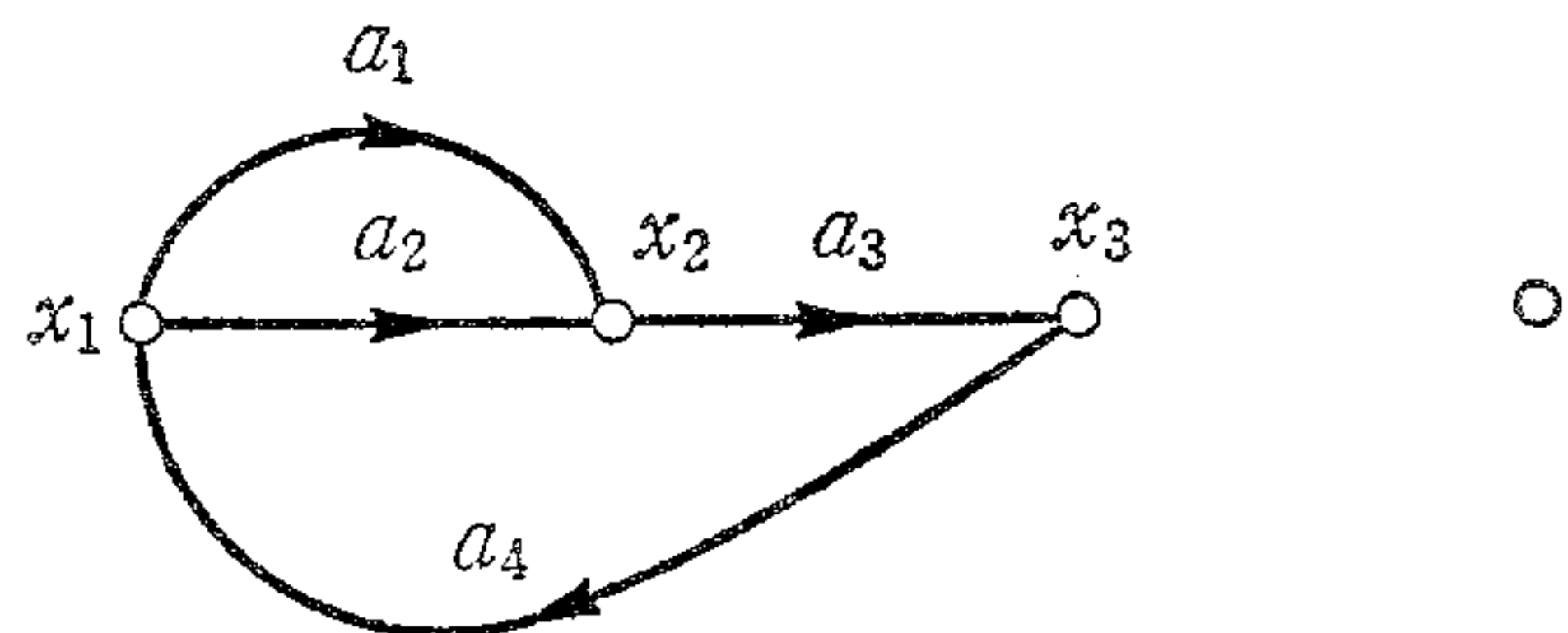
例を上げると

(1)



ループが1つ存在, そのループ利得は a_2a_3

(2)



ループが2つ存在, 外側のループ利得は $a_1a_3a_4$, 内側のループは $a_2a_3a_4$

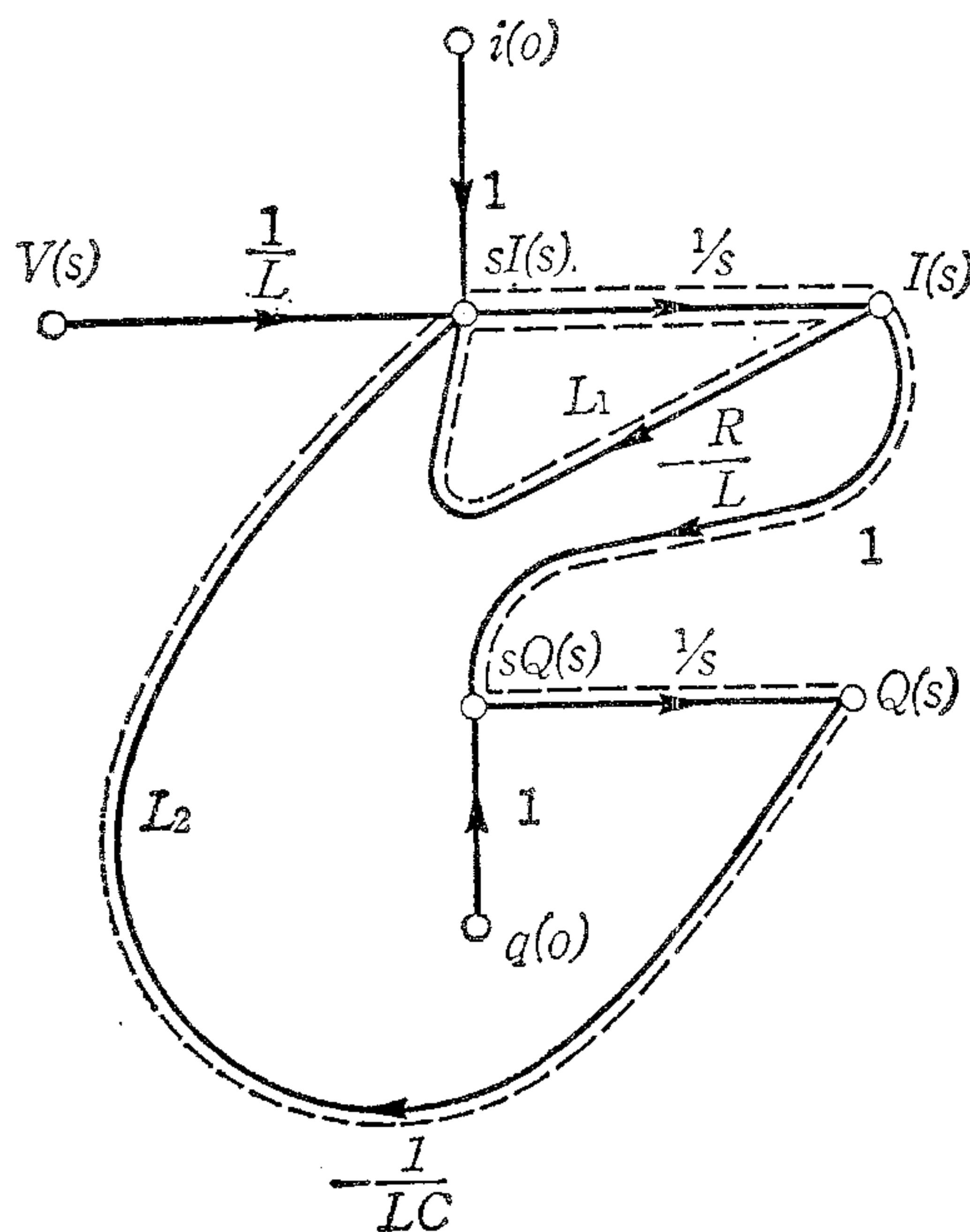
【例題】

次の状態方程式より得たシグナルフローグラフよりループがあれば、そのループ利得、および $V(s)$ から $Q(s)$ までのパス利得を求めよ。

状態方程式

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$



解 答

$$\text{ループ利得 } L_1 = -\frac{R}{sL}, \quad L_2 = -\frac{1}{s^2LC}$$

$$V(s) \text{ から } Q(s) \text{ までのパス利得 } P_1 = \frac{1}{s^2L}$$

9-5 MASON の法則 (メイソンの法則)

MASONの法則による伝達利得は次の式で計算される。

$$T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

T : 入力ノードから出力ノードまでの伝達利得 (Transfer Gain)

Δ : デタミナント (Determinant)

$$\text{展開式 } \Delta = (1 - L_1)(1 - L_2)(1 - L_3) \cdots (1 - L_j) \cdots$$

から互いに触れているループの積の項を除いて得られるグラフ行列式, ただし,

L_j は j 番目のループ利得

k : 入力ノードから出力ノードまでの k 番目の順方向パス

P_k : k 番目のパスに相当するパス利得

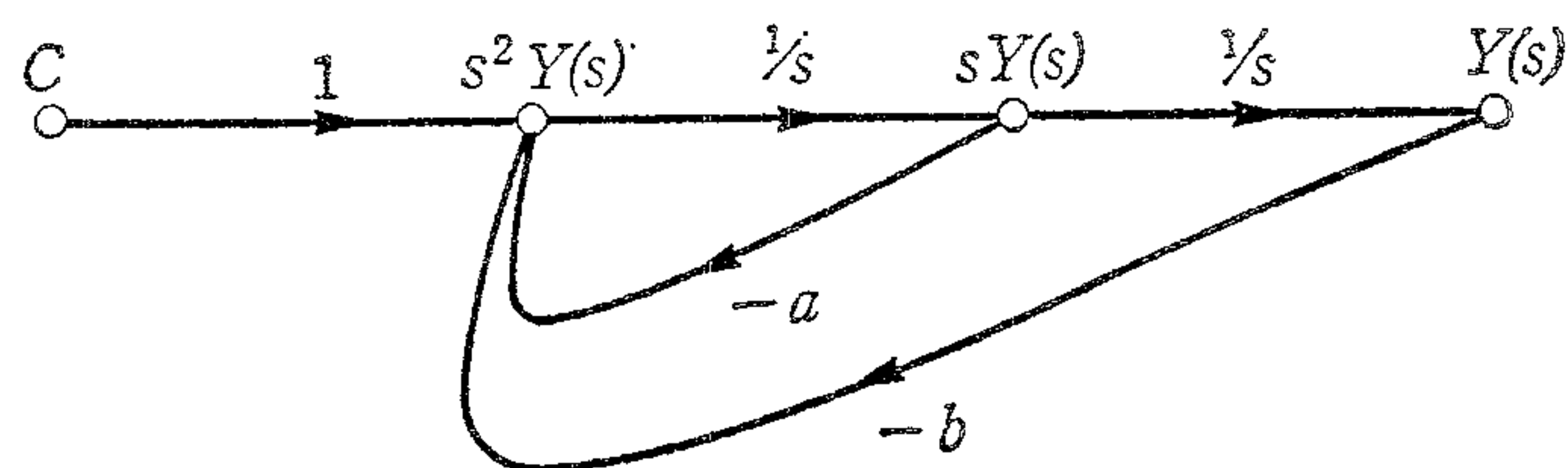
Δ_k : Δ から k 番パスに触れているループ L を含むすべての項を除いて得られる k 番パスの余因子行列式

この式による計算手順を次に示す。ここでは例として, 次の2次微分方程式の例を上げる。

(例) 入力: C

出力: $Y(s)$

$$s^2 Y(s) + as Y(s) + b Y(s) = C$$



計算手順 $T = \frac{Y(s)}{C}$ を計算する。

Δ の計算

(1) ループの数を数える

2個

- (2) ループに番号をつけ、各ループ利得を計算する
- 内側ループ $L_1 = -\frac{a}{s}$
外側ループ $L_2 = -\frac{b}{s^2}$
- (3) ループの要素展開する
- ループが2個であるので展開式は次のようになる
 $(1-L_1)(1-L_2) = 1 - (L_1+L_2) + L_1L_2$
- (4) 互いに触れているループの積の項を展開式より除き
- $\Delta = 1 - (L_1+L_2) + \cancel{L_1L_2}$
 $= 1 - (L_1+L_2)$
- その結果を Δ とする

 P_k, Δ_k の計算

- (1) 目的とするパスの数を数える
- C から $Y(s)$ までのパス 1 個
- (2) パスに番号をつけ、各パス利得を計算する
- $P_1 = \frac{1}{s^2}$
- (3) パスの要素について $\sum P_k \Delta_k$ を展開する
- $\sum P_k \Delta_k = P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots$
 $\sum P_k \Delta_k = P_1 \Delta_1$
- (4) 各パスが触れているループに注目する
- P_1 は L_1 と L_2 に触れている
- (5) 各パスが触れているループの項を Δ より除く。
- $\Delta_1 = 1 - (\cancel{L_1+L_2}) = 1$

 T の計算

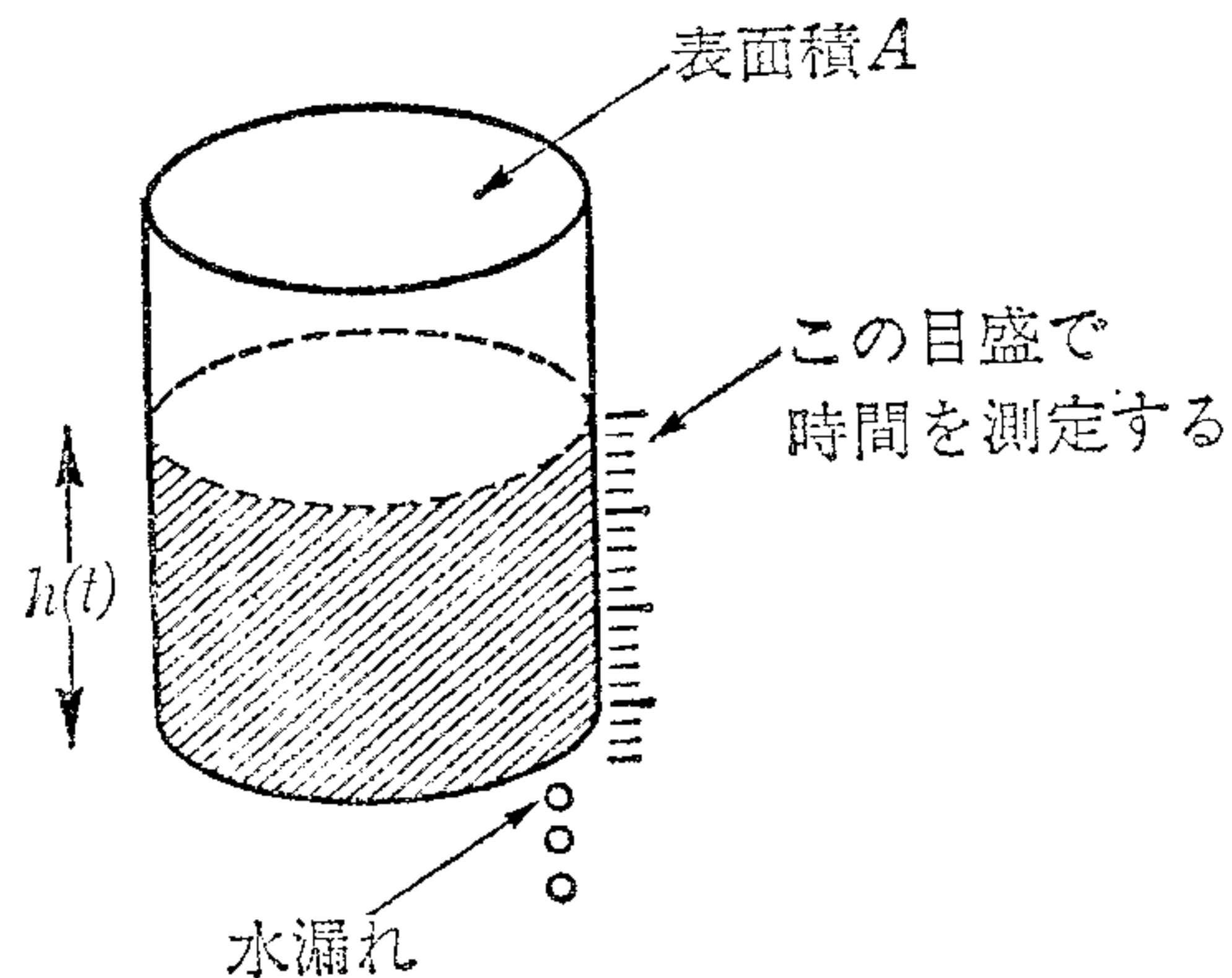
$$T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - (L_1 + L_2)} = \frac{\frac{1}{s^2} \cdot 1}{1 - (L_1 + L_2)} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2}}$$

$$= \frac{1}{s^2 + as + b}$$

【例題】 水時計

ドラムカン形の水タンクを用意し、そのタンクに水位 $h(0)$ まで水を満たす。水タンクの底部に小さい穴をあけて水を漏らすこととする。このときの、水漏れ水量は満たされた水の水位に比例するとして、その水位を測定することで時計のかわりとする。



このシステムをシグナルフローグラフで示し、解を得る。

ただし、状態方程式は次のように示されるものとする。

$$A \frac{dh(t)}{dt} = -kh(t)$$

k : 比例定数

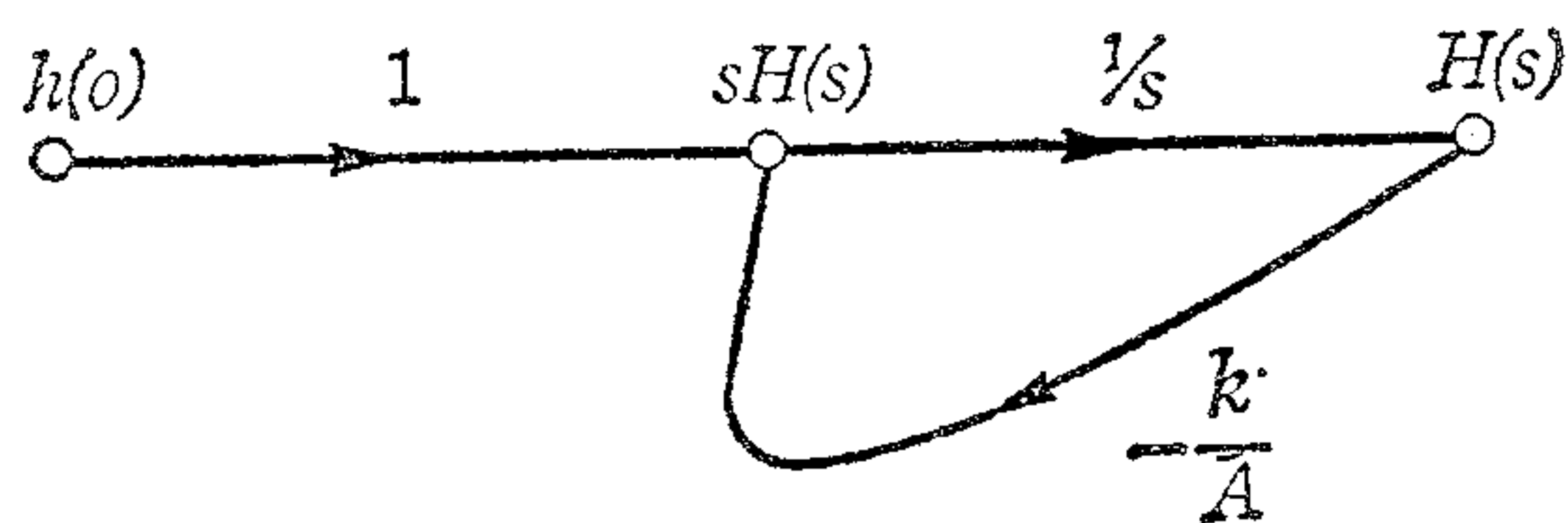
A : 表面積

解答

状態方程式をラプラス変換する。

$$sH(s) = -\frac{k}{A}H(s) + h(0)$$

シグナルフローグラフで示すと次のようになる。



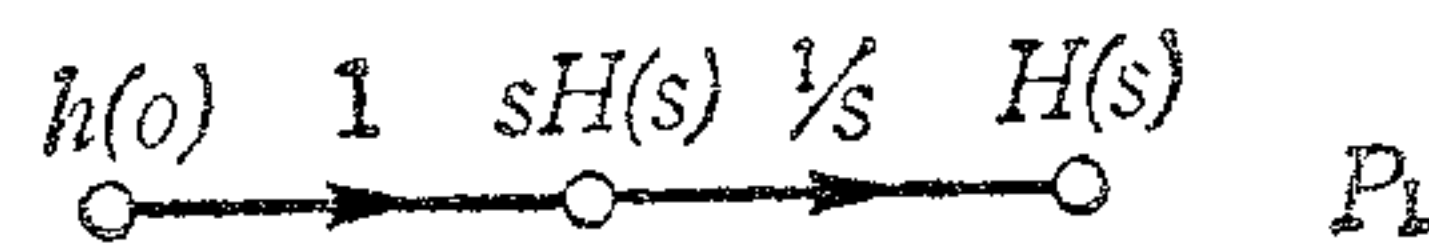
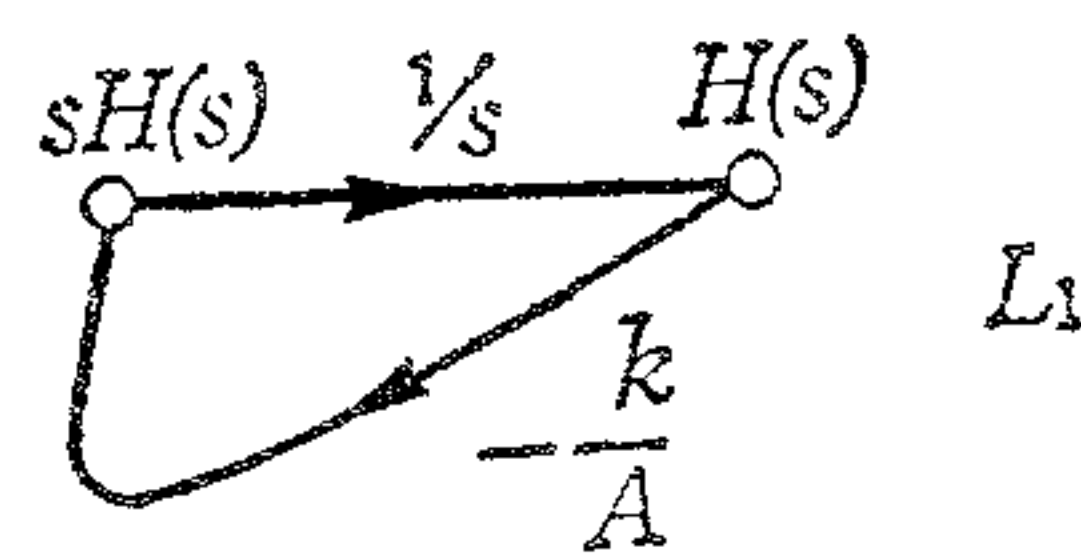
MASON法による解を求める。入力ノード \$h(0)\$, 出力ノード \$H(s)\$ とすると次のようになる。

$$\text{ループの数 } 1, L_1 = -\frac{k}{sA}$$

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{k}{sA}$$

$$\text{パスの数 (} h(0) \text{ から } H(s) \text{ まで) } 1, P_1 = \frac{1}{s}$$

$$\Sigma P_k \Delta_k = P_1 \Delta_1$$



パス 1 はループに触れている。

$$\Delta_1 = 1 - L_1 \neq \Delta$$

$$T = \frac{H(s)}{h(0)} = \frac{\Sigma P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{k}{sA}} = \frac{1}{s + \frac{k}{A}}$$

\$H(s)\$ を求めると,

$$H(s) = T \cdot h(0) = \frac{1}{s + \frac{k}{A}} \cdot h(0)$$

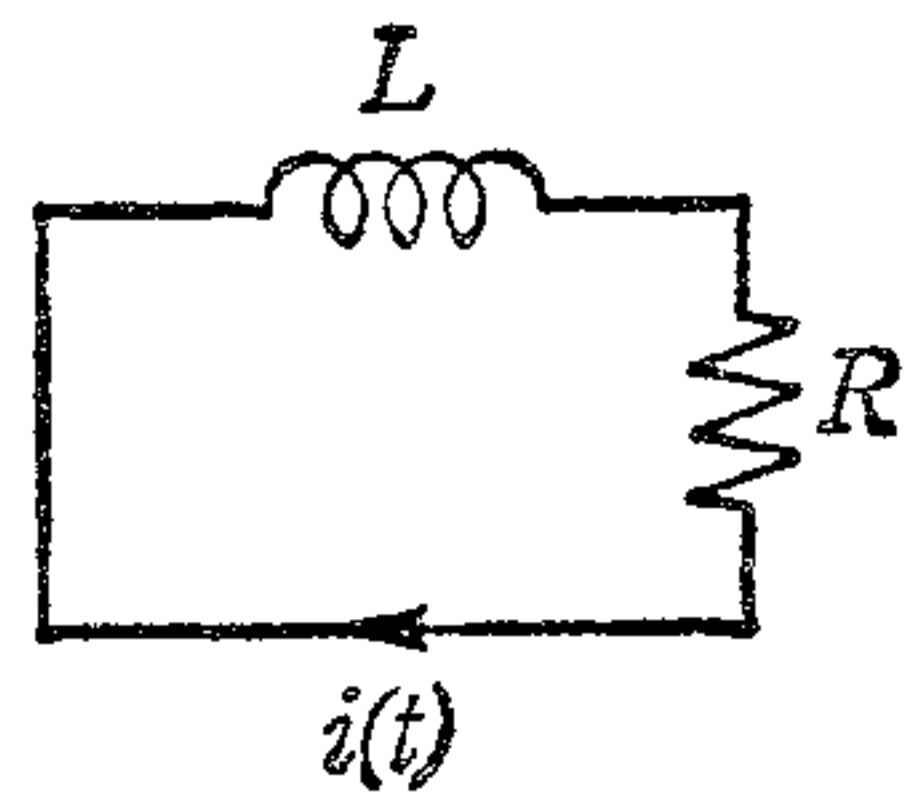
これをラプラス逆変換すれば

$$h(t) = h(0) e^{-\frac{k}{A}t}$$

となる。

参考ながら, 本例題は次のような電気系と全く同じ意味を持っている。(電気系とのアナロジー)

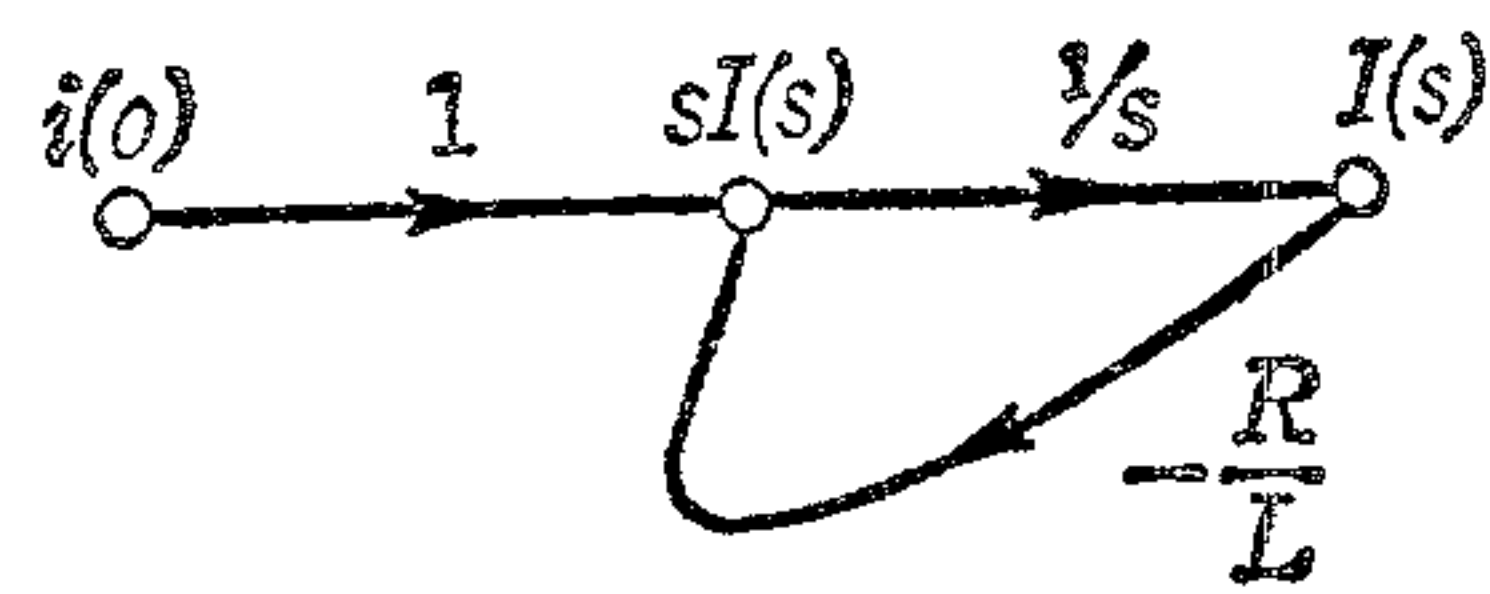
$$A \rightarrow L, k \rightarrow R, h(t) \rightarrow i(t) \text{ とすると}$$



電気回路

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

状態記述式



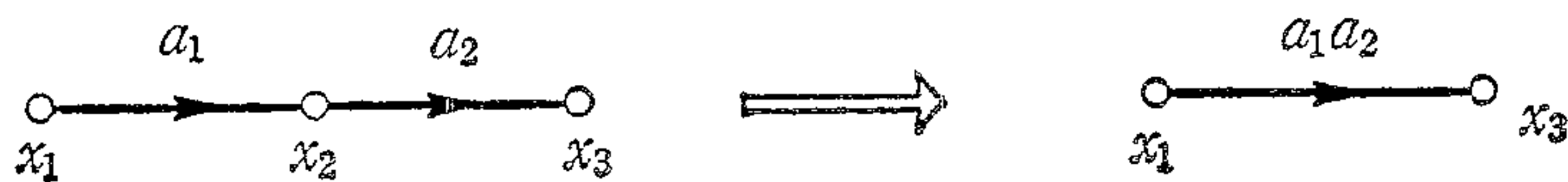
シグナルフローグラフ

9-6 グラフの等価変換

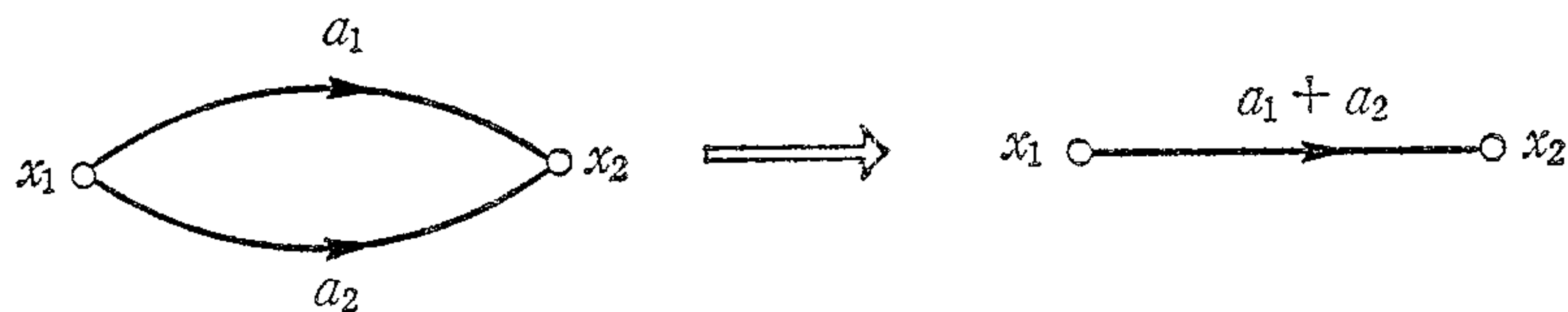
シグナルフローグラフでは、グラフの内容を等価にしてノードやブランチを取り去って簡略化することができる。

ブランチの直並列に関しては、前に述べたように

(1) 直列ブランチ

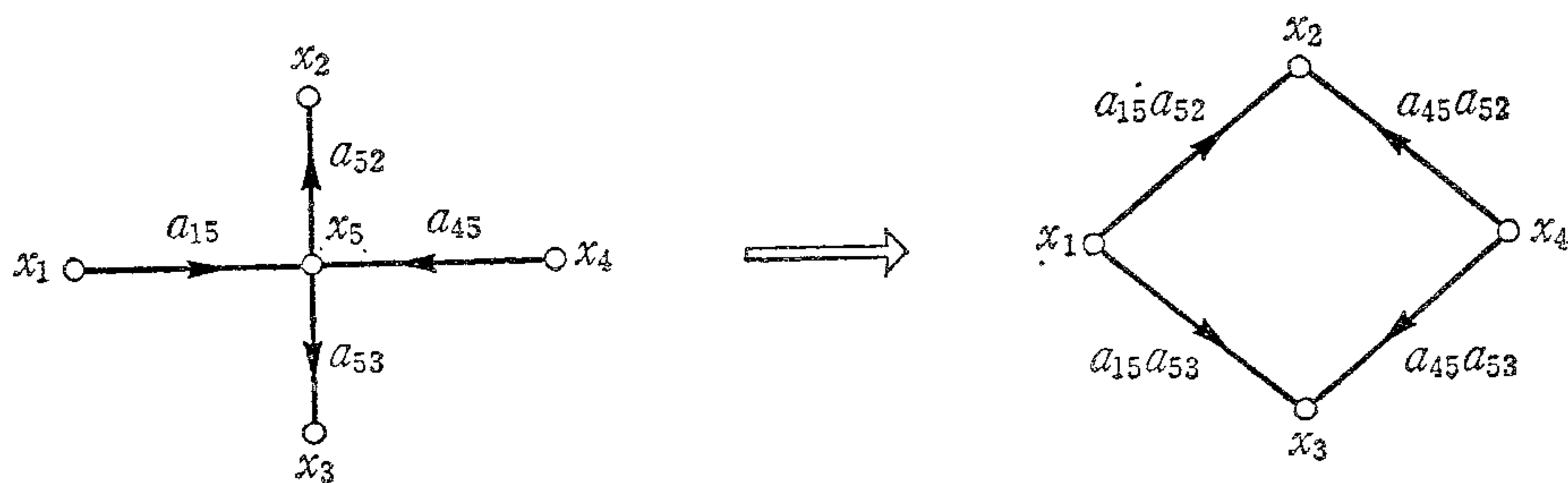


(2) 並列ブランチ



となり、(1)ではノード x_2 が省略され、(2)では2つのブランチが1つに簡略化されている。この考え方をもう少し発展させると、次のようなものも考えられる。

(3) ノードの消去



〔証明〕 $x_5 = a_{15}x_1 + a_{45}x_4$ とすると

$$x_2 = a_{52}x_5 = a_{52}(a_{15}x_1 + a_{45}x_4)$$

$$= a_{15}a_{52}x_1 + a_{45}a_{52}x_4$$

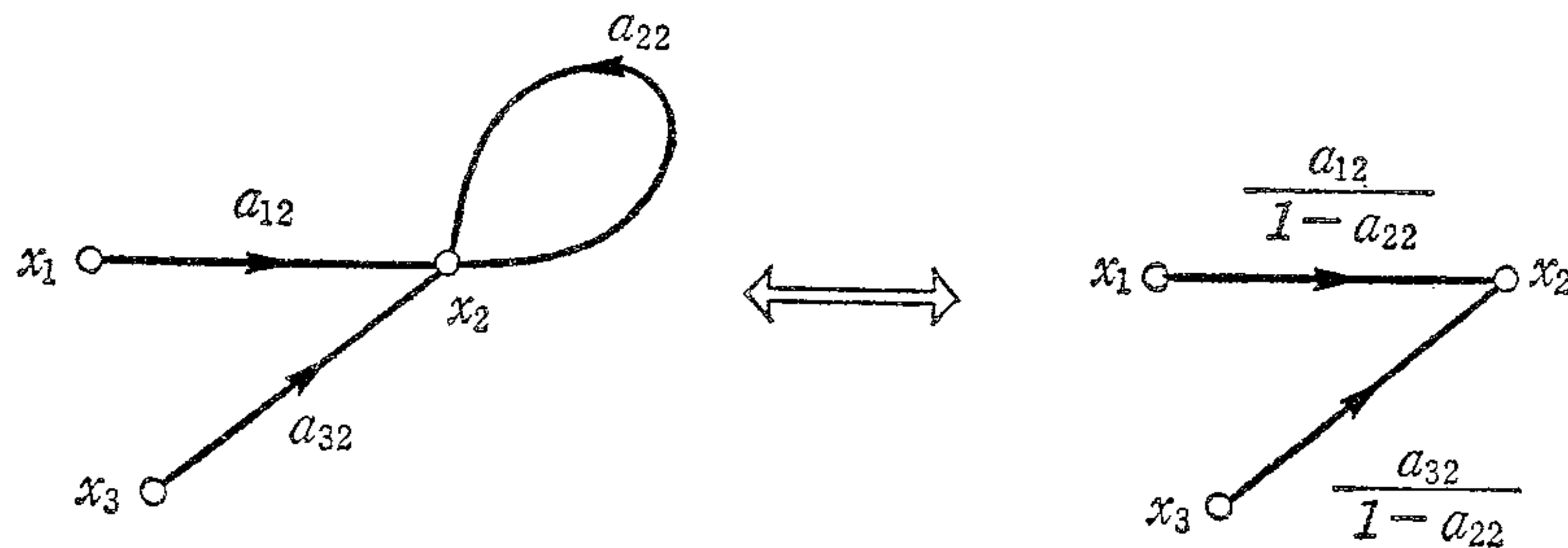
$$x_3 = a_{53}x_5 = a_{53}(a_{15}x_1 + a_{45}x_4)$$

$$= a_{15}a_{53}x_1 + a_{45}a_{53}x_4$$

これは 9.2 の \succ 型, \prec 型の一変形である。

これにより、ノード x_5 が消去される。

(4) ループの消去



〔証明〕

$$x_2 = a_{22}x_2 + a_{12}x_1 + a_{32}x_3$$

$$x_2 = \frac{1}{1-a_{22}} (a_{12}x_1 + a_{32}x_3)$$

このようにループを取り去ることもできる。

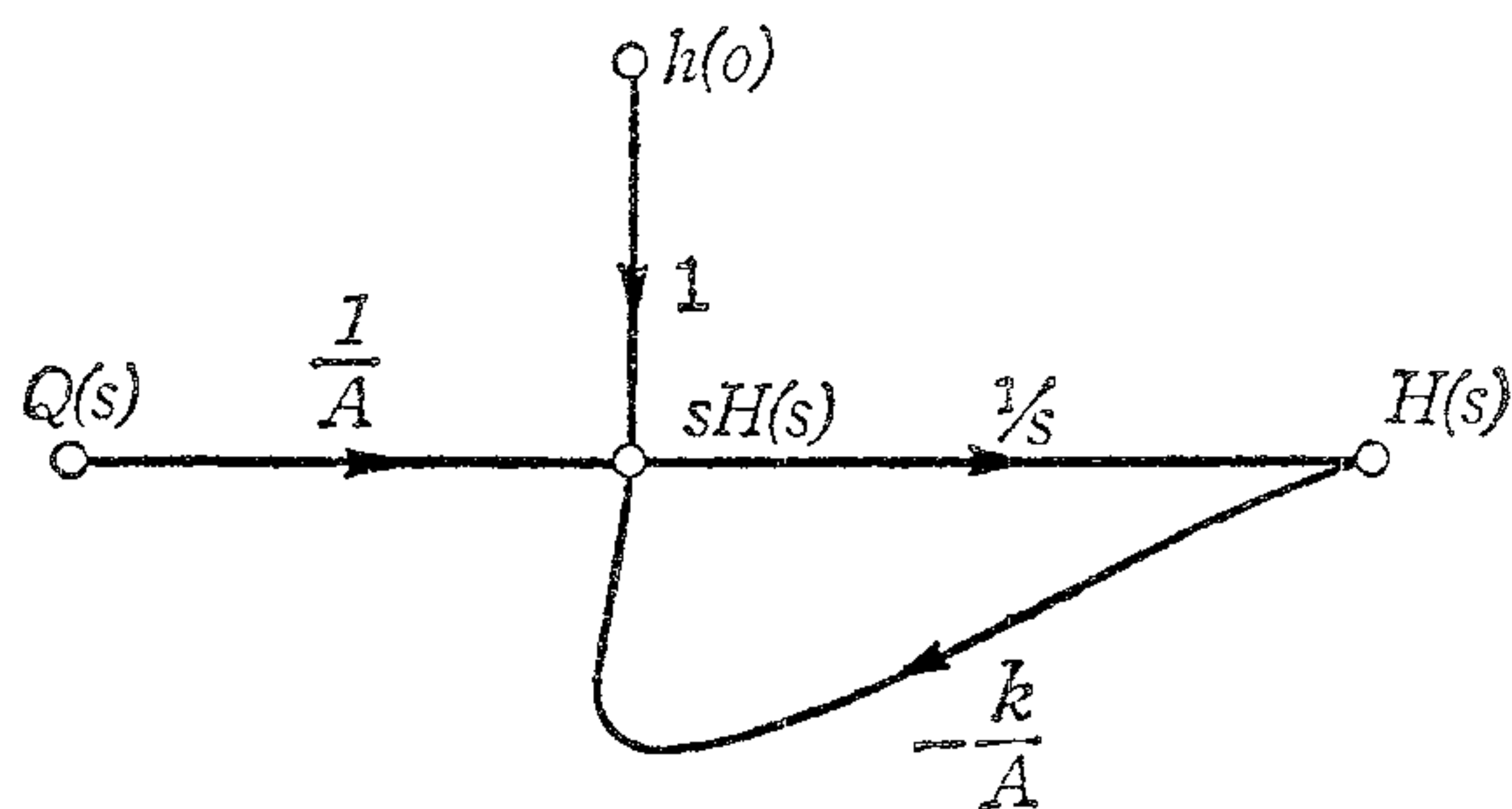
これらの等価変換を用いて、グラフを簡略化し（簡約）その伝達利得を求める方法もある。具対的に例を上げてみよう。9-5の例題に $q(t)$ という注水がある場合には、状態方程式は

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \{q(t) - kh(t)\}$$

ラプラス変換すると、

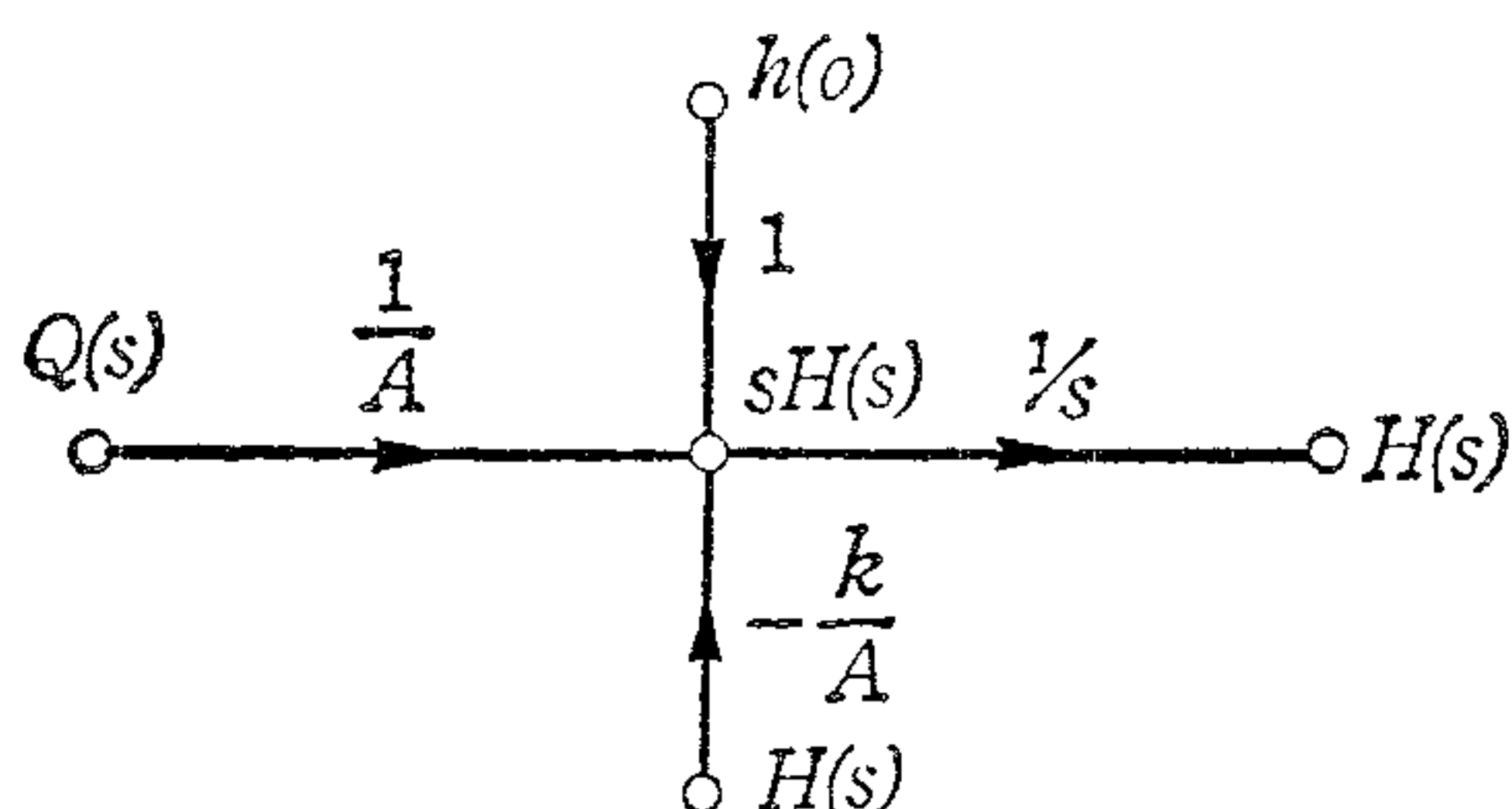
$$sH(s) = -\frac{k}{A}H(s) + \frac{1}{A}Q(s) + h(0)$$

シグナルフローグラフを書くと次のようになる。

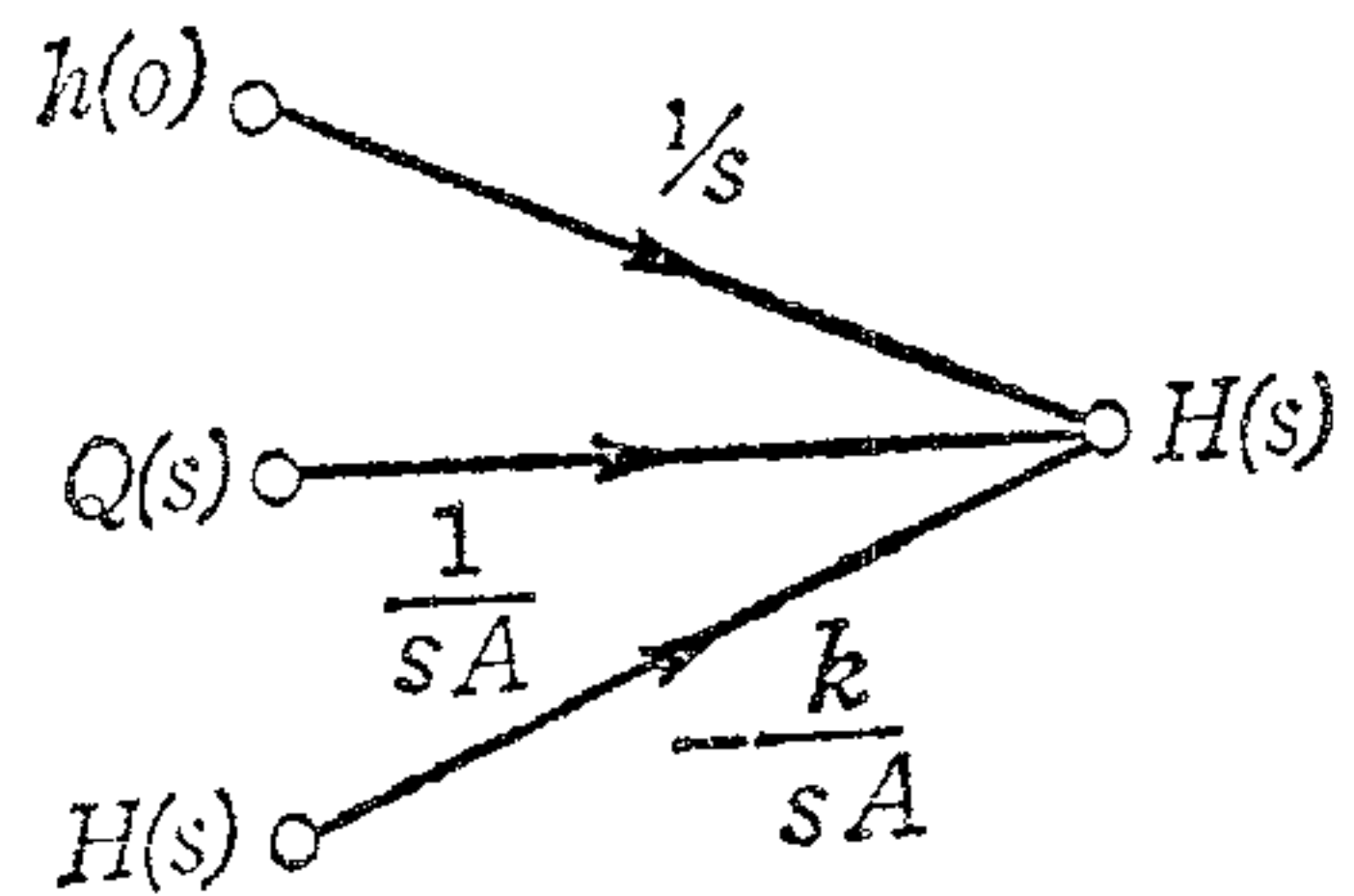


このグラフからわかるようにソースノードになり得るものは $Q(s)$ もしくは $h(0)$ である。したがって、入力シグナルを $h(0)$ 、 $Q(s)$ として出力シグナル $H(s)$ の伝達利得をグラフの等価変換を用いて、グラフを簡約し、求めてみることにしよう。

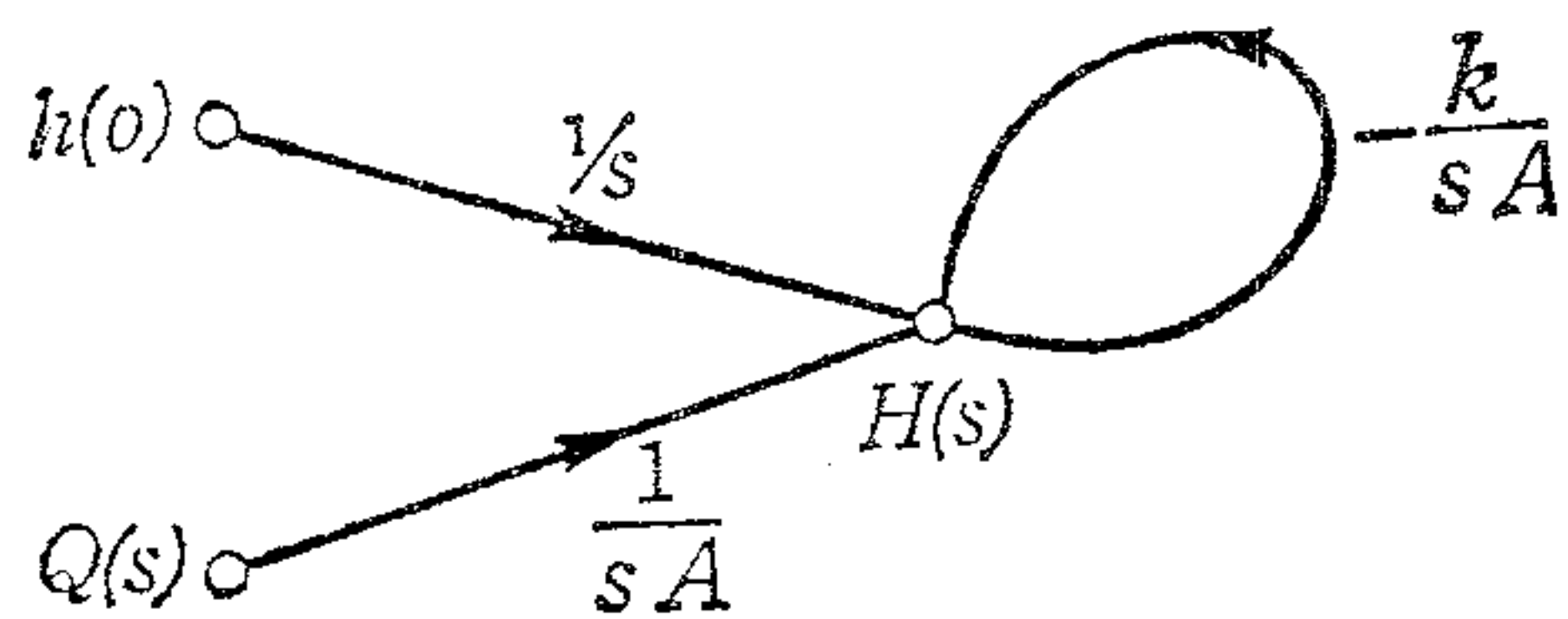
このグラフは本質的に次のものと等価である。（ $H(s)$ が2つあるように改良する）



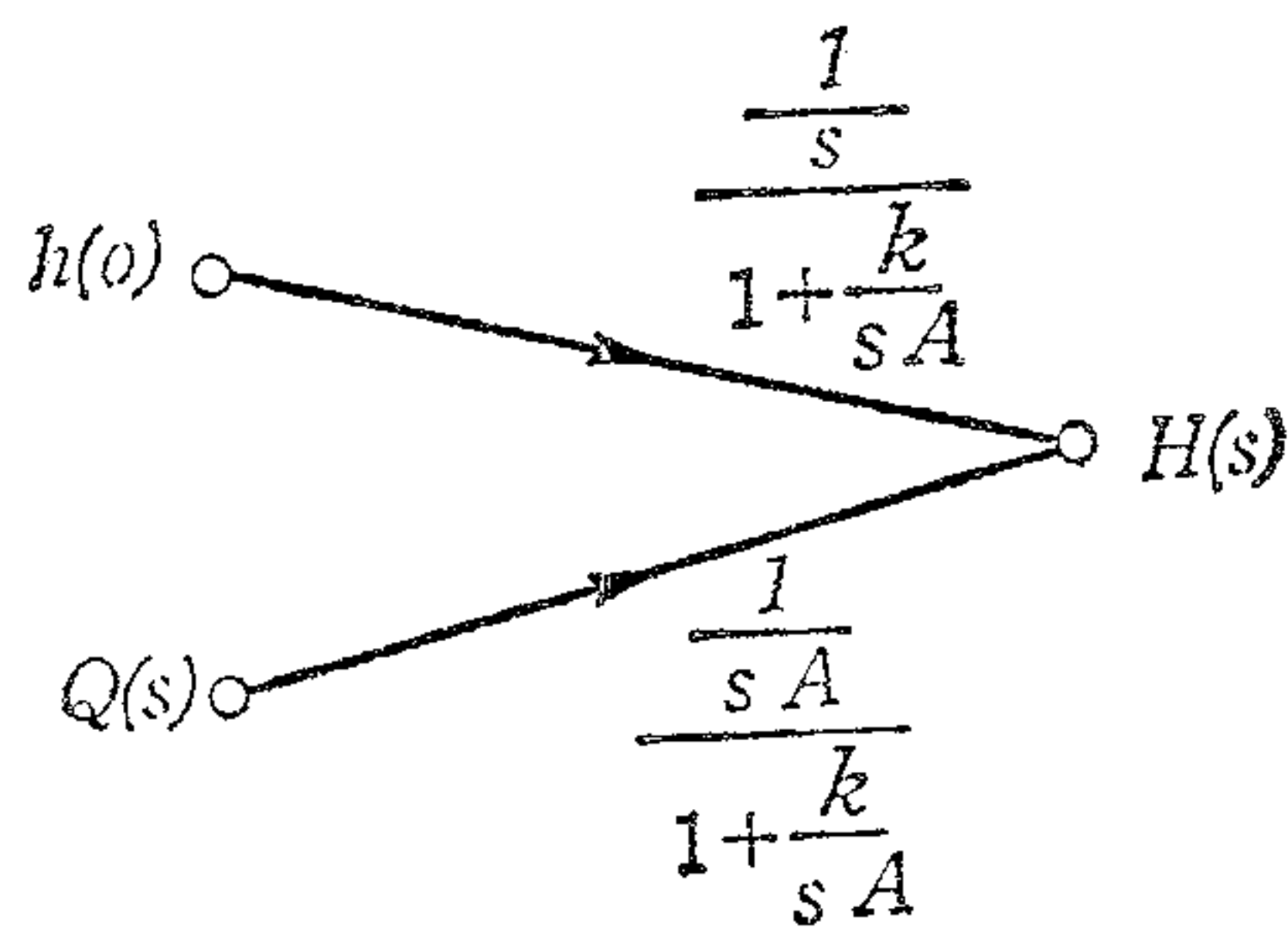
マ型の等価変換を用いると、



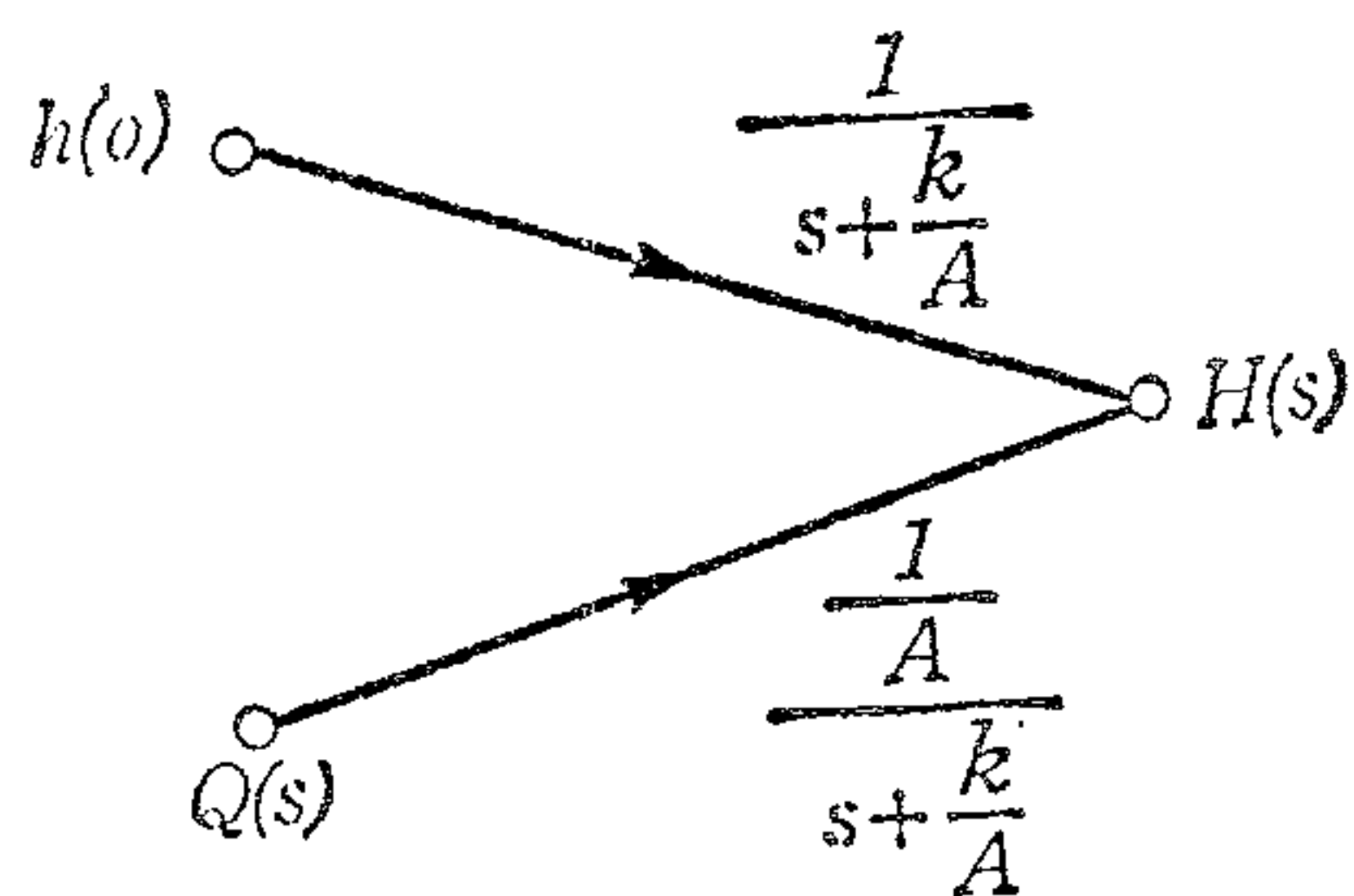
一方、 $H(s)$ は 2 つあるので再び 1 つにまとめると、



ここでループを消去すると



整理すると



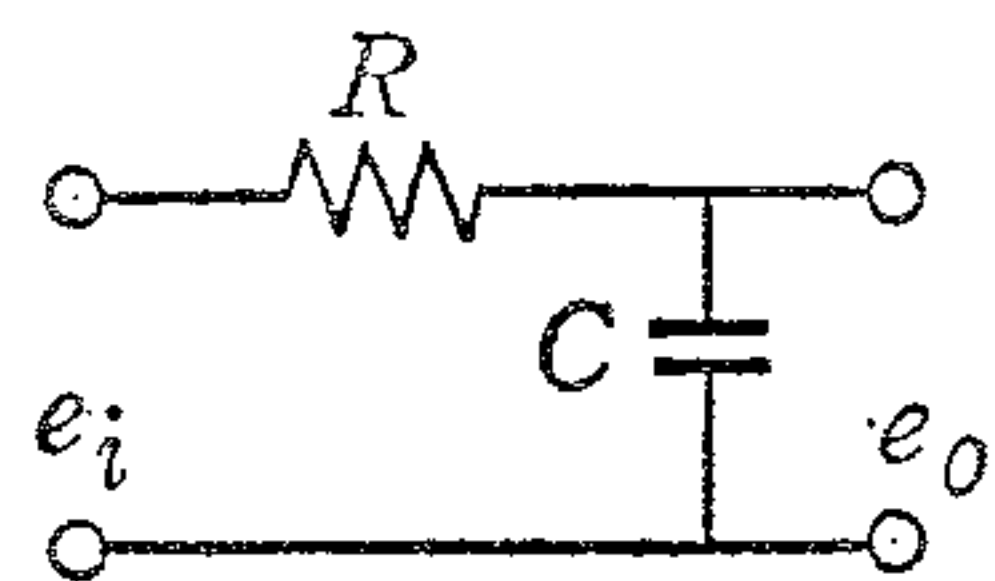
となる。

【問題 9-1】

本書の72頁の5-5-3の他励発電機の例において、入力を e_o 、出力を e_i として伝達関数をMASONの法則より求めよ。

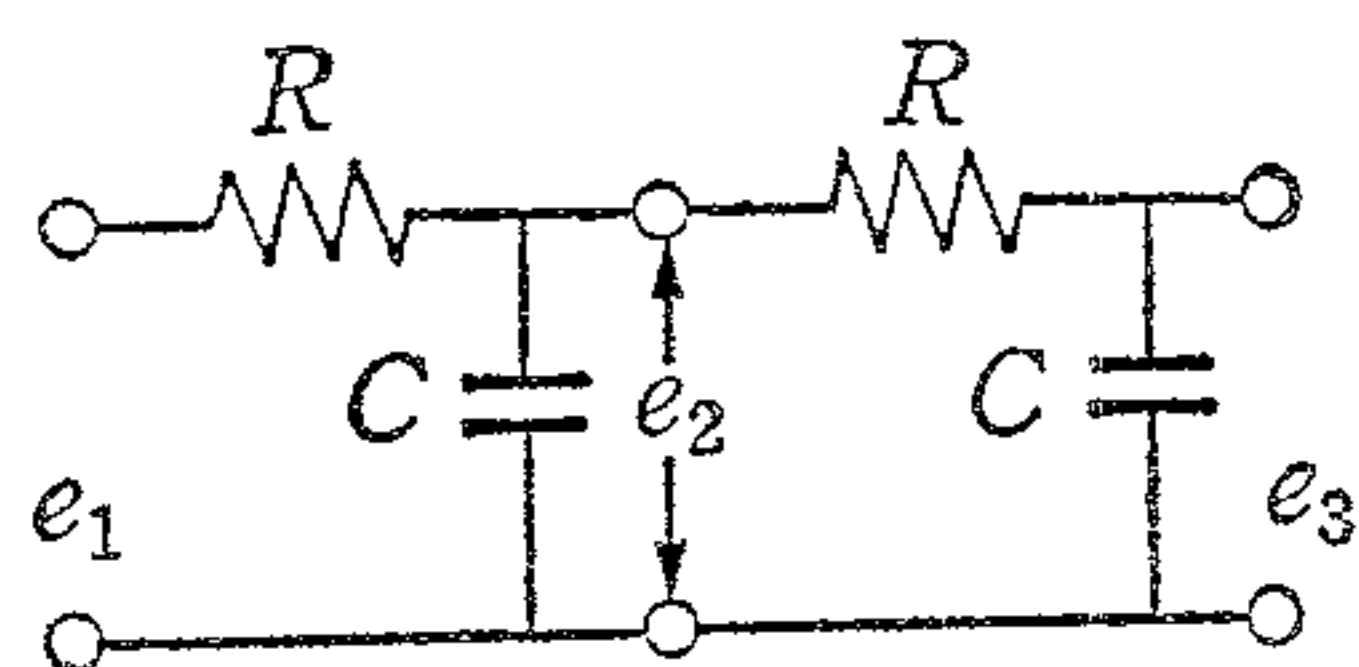
【問題 9-2】

次の回路の伝達関数をMASONの法則より求めよ。



【問題 9-3】

次の回路の伝達関数をMASONの法則より求めよ。



【問題 9-4】

本書の62頁の5-3の図5-16の回路の伝達関数をMASONの法則より求めよ。

問題の解答

(2-1)

$$1) \quad 2/s^3 \qquad 2) \quad \frac{s/\omega^2}{1+s^2/\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$3) \quad \frac{5/2}{1+s/2} = \frac{5}{s+2} \qquad 4) \quad \frac{s+\omega}{\sqrt{2}(s^2+\omega^2)}$$

(2-2)

$$1) \quad s^4 F(s) - s^3 f(0) - s^2 f^{(1)}(0) - s f^{(2)}(0) - f^{(3)}(0) \\ s^5 F(s) - s^4 f(0) - s^3 f^{(1)}(0) - s^2 f^{(2)}(0) - s f^{(3)}(0) - f^{(4)}(0)$$

$$2) \quad \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s+a}$$

$$(2-3) \quad \frac{s/\omega}{1+s^2/\omega^2} = \frac{\omega s}{s^2+\omega^2}$$

(3-1)

$$1)-(i) \quad \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$1)-(ii) \quad \frac{-4}{s+2} + \frac{2}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{2}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2)-(i) \quad \varepsilon^{-t} - 2\varepsilon^{-2t} + \varepsilon^{-3t}$$

$$2)-(ii) \quad -4\varepsilon^{-2t} + 4\varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(3-2)

$$1)-(i) \quad \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+2}$$

$$1)-(ii) \quad \frac{-5}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+3}$$

$$2)-(i) \quad 4\varepsilon^{-\frac{t}{2}} - \left(4 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)\varepsilon^{-t}$$

$$2)-(ii) \quad 1 - \frac{1}{9}\varepsilon^{-2t} - \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3} + t\right)\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$$

(3-3)

$$1) \text{-(i)} \quad 5, -1 \pm j \quad \text{(ii)} \quad -1, 4, 7 \quad \text{(iii)} \quad -8, \frac{-1 \pm j \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{(iv)} \quad -16, 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{(v)} \quad -3.5 \frac{1 \pm j \sqrt{7}}{2} \quad \text{(vi)} \quad -6, 3 \pm \sqrt{6}$$

$$2) \text{-(ii)} \quad -1 \quad \text{(iv)} \quad \doteq 1 - \sqrt{3} \quad \text{(vi)} \quad \doteq 3 - \sqrt{6}$$

$$3) \text{-(i)} \quad (s^2 + 2s + 2)(s^2 - 4s + 7)$$

$$\text{(ii)} \quad (s^2 - s + 3)(s^2 - 2s + 11)$$

$$\text{(iii)} \quad (s^2 - s + 1)(s^2 + s + 6)$$

$$\text{(iv)} \quad (s^2 - 4s + 2)(s^2 + 2s + 12)$$

$$\text{(v)} \quad (s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 2)$$

(4-1)

$$1) \quad \frac{1+s+s^2}{s(1+s)^2} \quad 2021 \text{ B}$$

$$2) \quad \frac{1-2s^2-s^3}{2s^2(1+s)(1+s/2)} \quad 3022$$

$$3) \quad \frac{2(1+s/6+s^2/6+s^3/24)}{(1+s)(1+s/3)(1+s^2/4)} \quad 3120$$

$$4) \quad \frac{3(1+s/2+s^2/12)}{(1+s)(1+s/2)^2} \quad 2030 \text{ B}$$

$$5) \quad \frac{1+6s+6s^2+2s^3}{2s(1+s/2)(1+s^2)} \quad 3111$$

$$6) \quad \frac{1+7s^2+s^3}{8s^2(1+s/2)^3} \quad 3032$$

$$7) \quad \frac{1+3s+s^2}{4(1+s/2)(1+s+s^2/2)} \quad 2110 \text{ A}$$

$$8) \quad \frac{1-s+s^2}{4s(1+s^2/2)^2} \quad 2201$$

(4-2)

$$1) \text{-(i)} \quad 2 + 2\epsilon^{-t} - 4\epsilon^{-\frac{t}{2}}$$

$$\text{(ii)} \quad 1 - (1+2t)\epsilon^{-2t}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{10}{3}\epsilon^{-2t} + \frac{20}{3}\epsilon^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 30^\circ\right)$$

$$(iv) \quad t - \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$(v) \quad 1 - 3\epsilon^{-\frac{t}{2}} + \sqrt{5} \epsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2} + 116.57^\circ\right)$$

$$(vi) \quad -\frac{1}{13} \epsilon^t + \frac{1}{2\sqrt{13}} \epsilon^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{t}{4} + 146.31^\circ\right)$$

$$2)-1) \quad 1 - t\epsilon^{-t} \quad 4) \quad 7\epsilon^{-t} - (4t+6)\epsilon^{-2t}$$

$$7) \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \epsilon^{-t} \sin(t + 108.43^\circ) - \frac{1}{2} \epsilon^{-2t}$$

(4-3)

$$1)-2) \quad \frac{t}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \epsilon^{-2t}$$

$$3) \quad \frac{23}{10} \epsilon^{-t} - \frac{21}{26} \epsilon^{-3t} + \frac{4}{\sqrt{65}} \sin(2t - 97.12^\circ)$$

$$5) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \epsilon^{-2t} + \sqrt{\frac{41}{5}} \cos(t - 65.23^\circ)$$

$$6) \quad \frac{t}{8} - \frac{3}{16} + \left(\frac{3}{16} + \frac{5}{4}t + \frac{21}{8}t^2\right) \epsilon^{-2t}$$

$$8) \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t + \cos \sqrt{2}t\right)$$

$$2)-(i) \quad 2 + \epsilon^{-t} - \frac{11}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} + \frac{2}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 90^\circ\right)$$

$$(ii) \quad \frac{5}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} - 2\epsilon^{-t} + \frac{2}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 210^\circ\right)$$

$$(iii) \quad 1 + \frac{16}{17} \epsilon^{-\frac{t}{2}} - \frac{128}{65} \epsilon^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{\sqrt{1105}} \cos(2t - 158.84^\circ)$$

$$(iv) \quad 1 - \left(\frac{33}{25} + \frac{2}{5}t\right) \epsilon^{-2t} - 2t\epsilon^{-t} + \frac{2}{5} \cos(t - 36.87^\circ)$$

(5-1)

$$1) \quad 10 - 10\epsilon^{-50t} \cos 50t$$

$$2)-(i) \quad 1 + 5\epsilon^{-12t} \quad (ii) \quad 6 - 5\epsilon^{-2t}$$

$$3) \quad 5.10\epsilon^{-t} + 5.83\epsilon^{-25t} \sin(25\sqrt{3}t - 119^\circ)$$

$$4) - (i) \quad 5 + 5\sqrt{2}\epsilon^{-1000t} \sin(1000t - 45^\circ)$$

$$(ii) \quad \frac{10}{\sqrt{3}}\epsilon^{-500t} \sin(500\sqrt{3}t + 120^\circ)$$

$$5) - (i) \quad 6\epsilon^{-500t} \sin 500t$$

$$(ii) \quad -4\sqrt{3}\epsilon^{-500t} \sin 500\sqrt{3}t$$

$$6) - (i) \quad 10 + 5\sqrt{2}\epsilon^{-50t} \sin(50t - 135^\circ)$$

$$(ii) \quad 10 + \frac{20}{\sqrt{3}}\epsilon^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t + 60^\circ)$$

(5-2)

$$1) \quad \frac{1}{1 + 3sCR + (sCR)^2}$$

$$2) \quad \frac{sCR}{1 + 3sCR + (sCR)^2}$$

$$3) \quad \frac{(1 + sCR)^2}{2 + 5sCR + (sCR)^2}$$

$$4) \quad \frac{(1 + sCR)^2}{1 + 5sCR + 2(sCR)^2}$$

$$5) \quad \frac{1 + sCR}{3 + sCR}$$

$$6) \quad \frac{6sCR + 5(sCR)^2 + (sCR)^3}{1 + 6sCR + 5(sCR)^2 + (sCR)^3}$$

$$7) \quad \frac{1 + s + 0.5s^2}{1 + 2s + 0.5s^2}$$

$$8) \quad \frac{1 + 10^{-3}s}{1 + 10^{-3}s + 10^{-6}s^2/2}$$

(5-3)

$$1) \quad \frac{sCR}{(1 - A) + 3sCR + (sCR)^2}$$

$$2) \quad \frac{1}{1 + (1 - A)sCR}$$

$$3) \quad \frac{1}{1 + (3 - A)sCR + (sCR)^2}$$

$$4) \quad \frac{A}{1 + (3 - A)sCR + (sCR)^2}$$

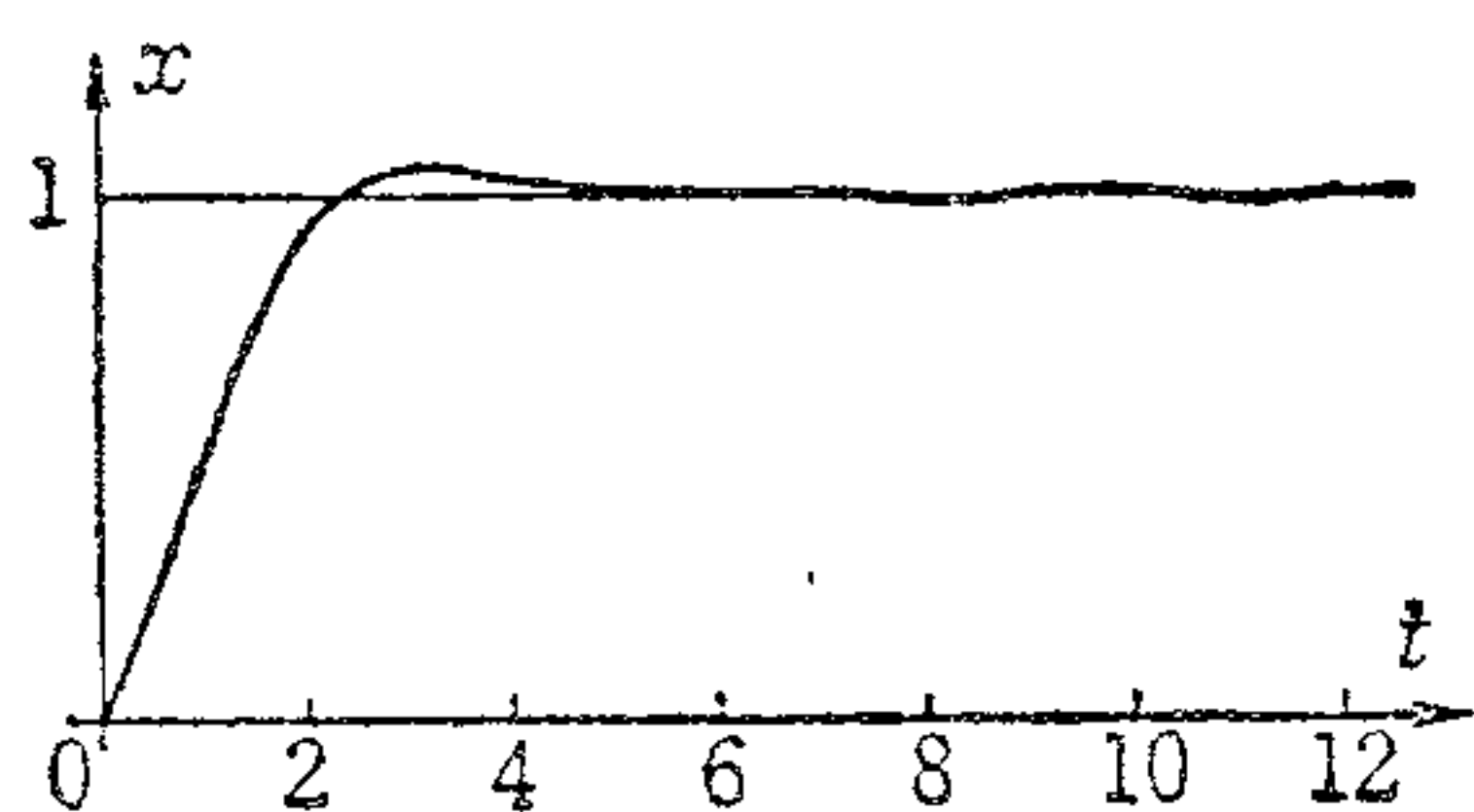
(5-4)

$$1) \quad -10.1 \sin(10t - 90^\circ) - 0.116\epsilon^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t + 60.5^\circ)$$

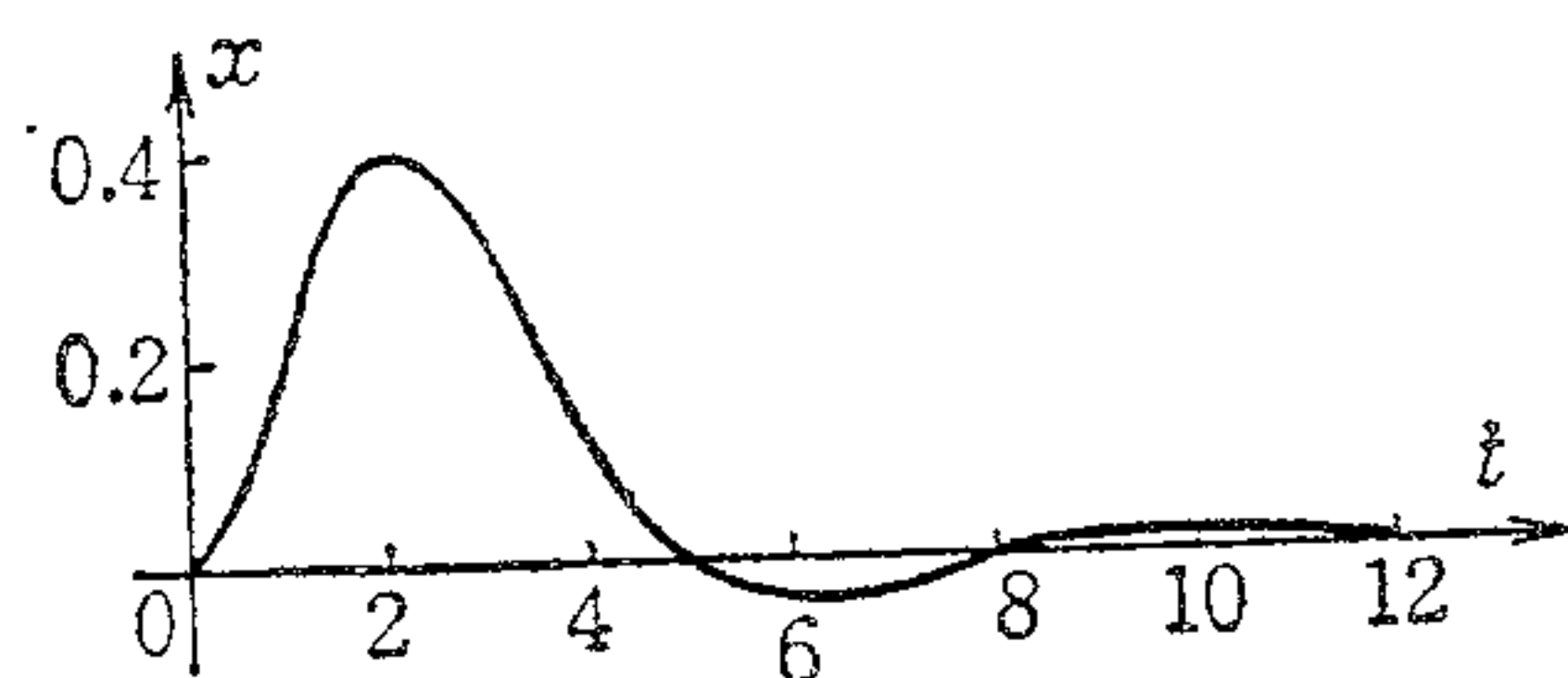
$$2) \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin(1000t - 18.43^\circ) + \frac{\sqrt{10}}{5} \epsilon^{-1000t} \sin(1000t + 153.43^\circ)$$

(7-1)

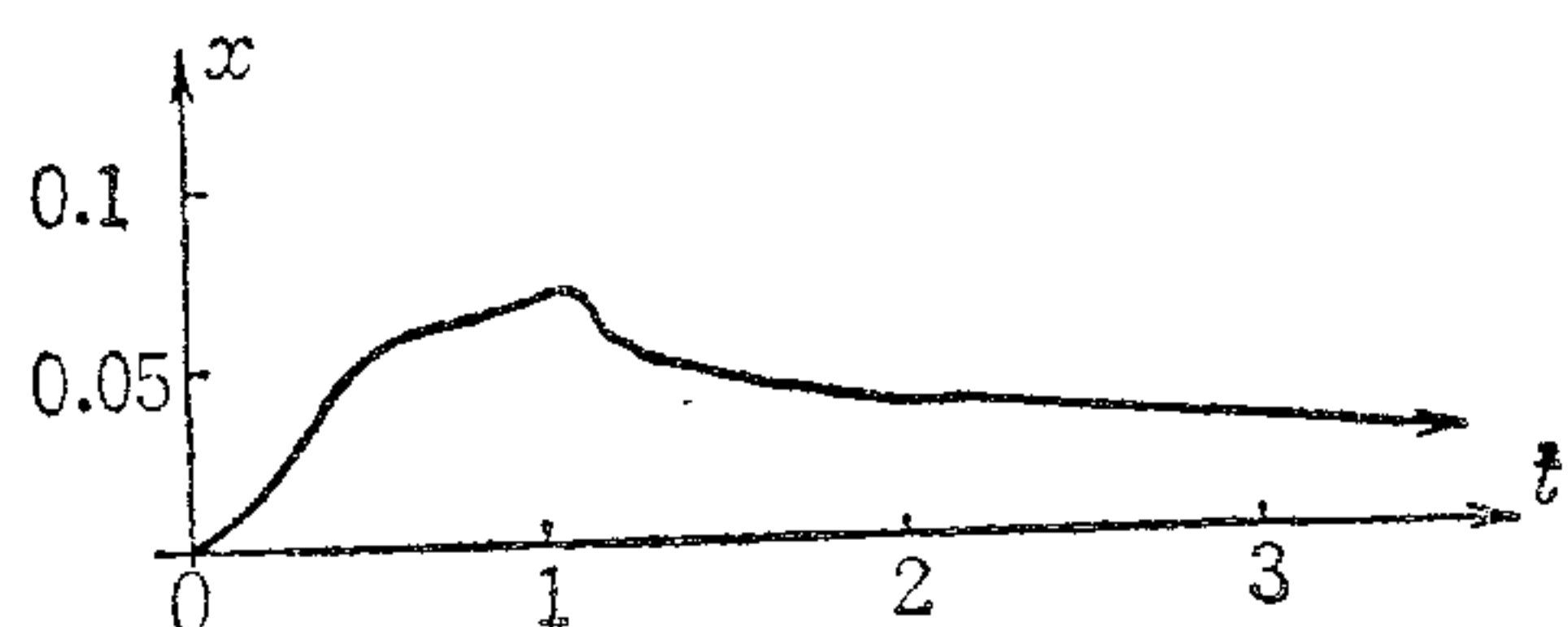
$$1) \quad 1 + \sqrt{2}\epsilon^{-t} \sin(t - 135^\circ)$$



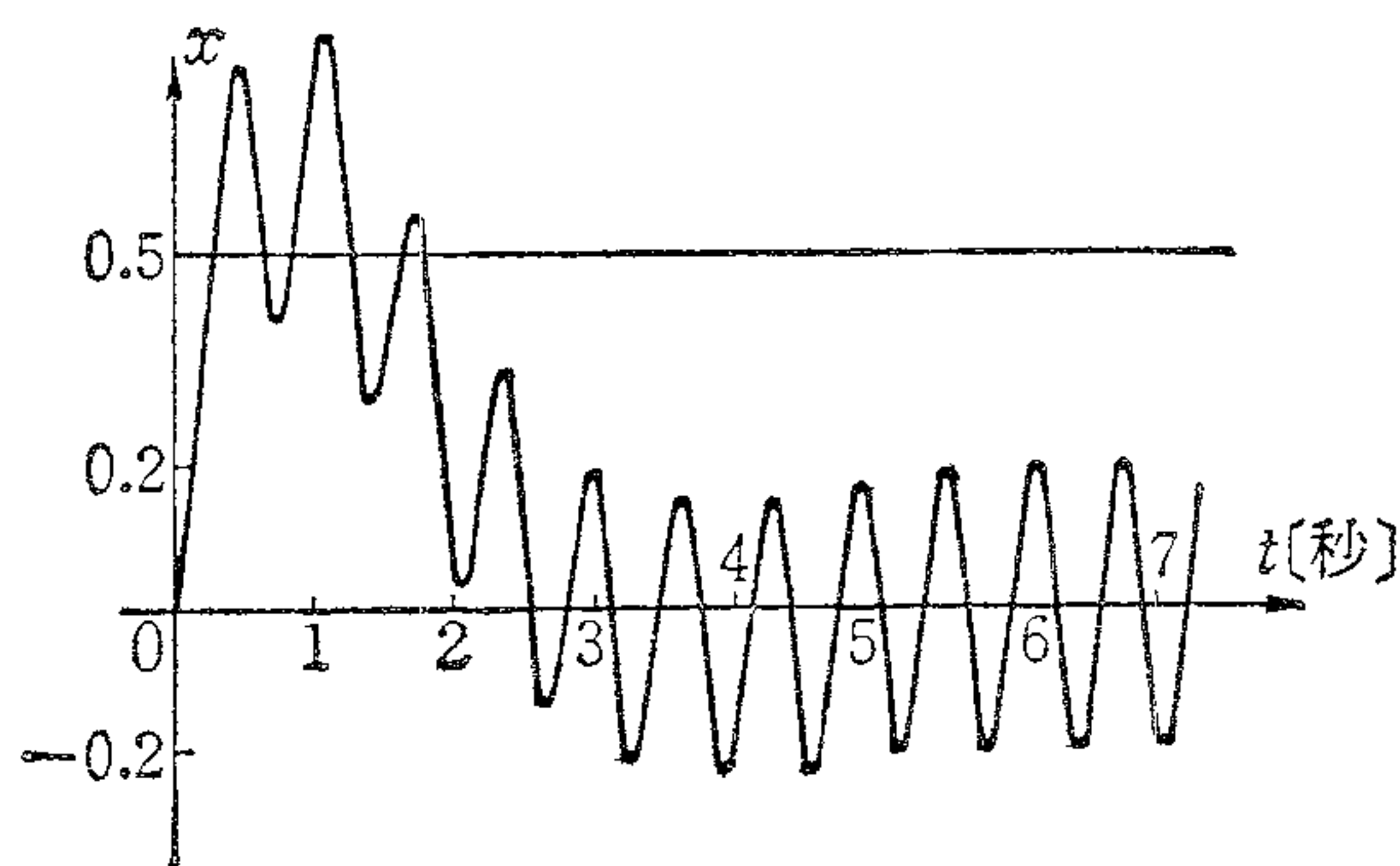
$$2) \quad \varepsilon^{-t} + \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 60^\circ\right)$$



$$3) \quad 0.0664\varepsilon^{-\frac{t}{4}} + 0.0744\varepsilon^{-2t} \sin(2\sqrt{3}t - 116.8^\circ)$$



$$4) \quad 0.2 \sin(10t - 168.5^\circ) + 2\varepsilon^{-t} \sin(t - 1.15^\circ)$$



(8-1)

$$1) \quad \text{(i)} \quad \frac{1 - \varepsilon^{-as}}{s} E \quad \text{(ii)} \quad \frac{(1 - \varepsilon^{-as})^2}{s^2} E$$

$$2) \quad \text{(i)} \quad \frac{2\varepsilon^{-as}}{s^3} \quad \text{(ii)} \quad \frac{\frac{\pi}{2} \varepsilon^{-2s}}{s^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\varepsilon^{-3s}}{s+2} \quad \text{(iv)} \quad \frac{s\varepsilon^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}$$

$$3) \quad \text{(i)} \quad \frac{1}{5+4s+s^2} \quad \text{(ii)} \quad \frac{1+s}{5+2s+s^2}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{4}{(1+2s)^2} \quad \text{(iv)} \quad \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+1}$$

$$4) \quad \text{(i)} \quad 1 - (1+t)\varepsilon^{-t} + (1-t)\varepsilon^{-(t-1)}$$

$$(ii) \quad -1 + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^4) \varepsilon^{-2t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \frac{16 + \pi}{4}\right) \right]$$

(8-2)

$$1) \quad (i) \quad \frac{1}{2\pi(1 + s^2/4\pi^2)}$$

$$(ii) \quad \frac{2\pi^2}{s^3}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{s + \pi}$$

$$(iv) \quad \frac{4s}{4s^2 + \pi^2}$$

$$2) \quad (i) \quad \frac{1}{4}(1 - \varepsilon^{-t/4})$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-t/2} - \varepsilon^{-t/4}$$

$$(iii) \quad \frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}$$

(8-3)

$$1) \quad (i) \quad \frac{1}{s(1 + \varepsilon^{-s})}$$

$$(ii) \quad \frac{1 - (1 + s)\varepsilon^{-s}}{s^2(1 - \varepsilon^{-s})} \cdot E$$

$$(iii) \quad \frac{1 - \varepsilon^{-as}}{s^2(1 + \varepsilon^{-as})}$$

$$2) \quad (i) \quad \frac{-2s(3 - s^2)}{(1 + s^2)^3}$$

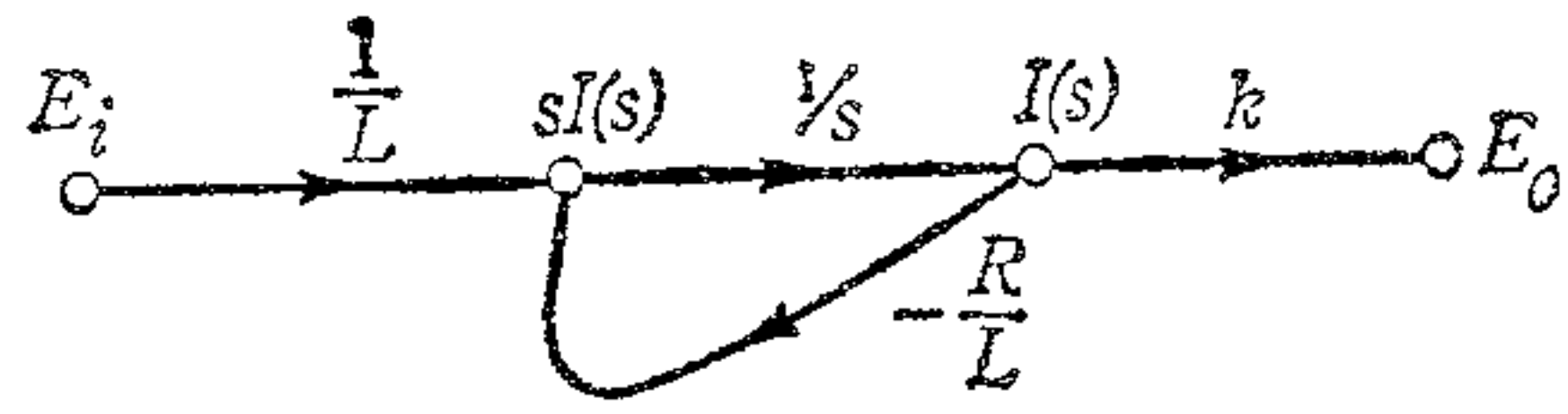
$$(ii) \quad \frac{s}{4(1 + s^2/4)^2}$$

$$(iii) \quad -s \frac{dX}{ds} - X$$

$$(iv) \quad s^2 \frac{d^2X}{ds^2} + 4s \frac{dX}{ds} + 2X$$

$$3) \quad (iv) \quad \frac{\omega_1^2}{BT} \varepsilon^{-t/T} - \frac{\omega_1^3}{\sqrt{B}} \sin(\omega_1 t - \phi)$$

(9-1)



$$P_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} \cdot k = \frac{k}{sL}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{R}{sL}$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{k}{sL}}{1 + \frac{R}{sL}} = \frac{k}{sL + R}$$

(9-2)

基本式

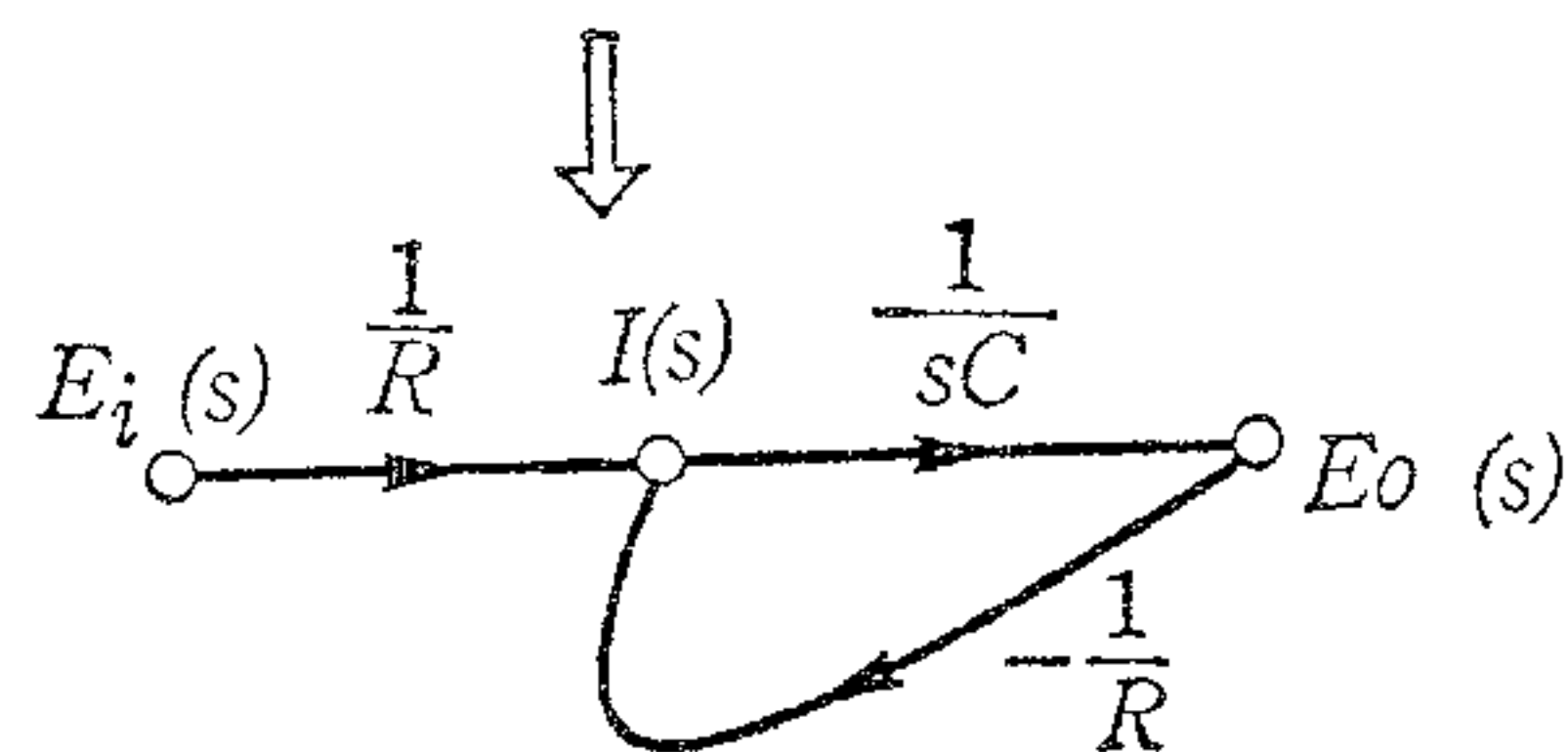
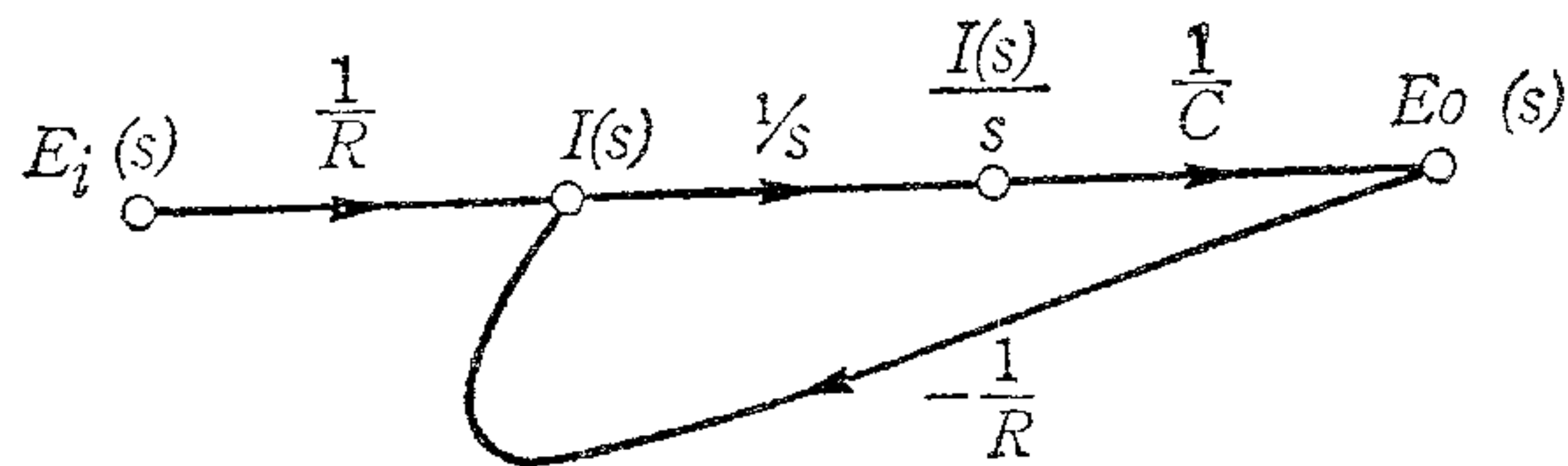
$$\begin{cases} e_i = Ri + \frac{1}{C} \int i dt = Ri + e_o \\ e_o = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases}$$

より

$$E_i(s) = RI(s) + E_o(s)$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

となり、シグナルフローグラフは



$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$P_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{sC} = \frac{1}{sRC}$$

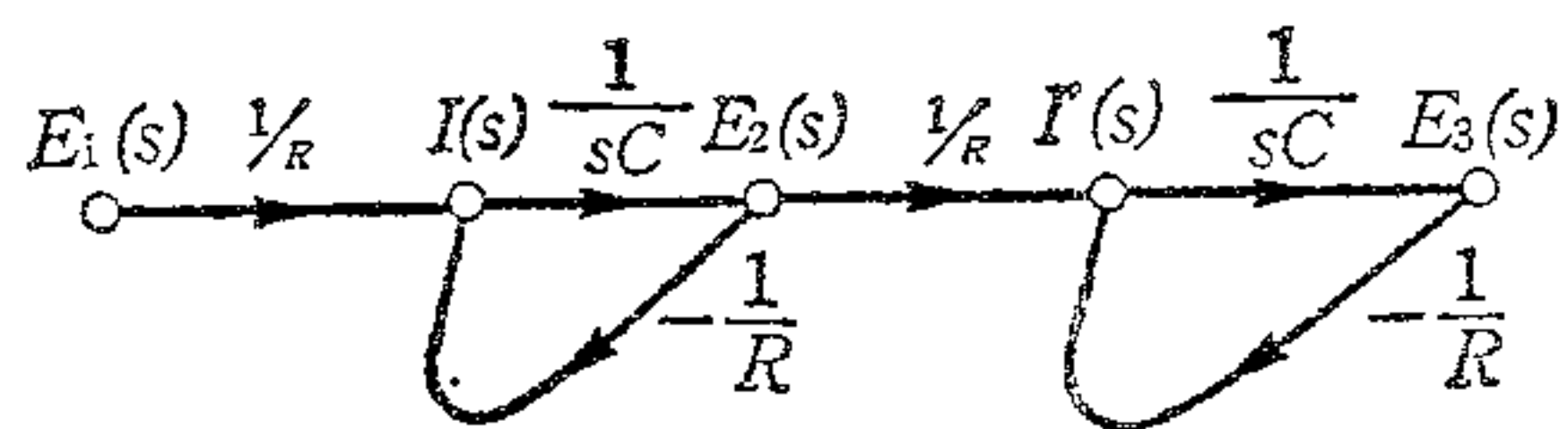
$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{1}{sRC}$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{1}{sRC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

(9-3)

この回路のシグナルフローグラフは前の9-2の問題のシグナルフローグラフの縦列接続となるので、次のようになる。



T の計算は、

$$T = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \cdot \frac{E_3(s)}{E_2(s)} = \frac{E_3(s)}{E_1(s)}$$

となり。

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{E_3(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{1 + sCR}$$

であるので、

$$T = \frac{1}{(1 + sCR)^2}$$

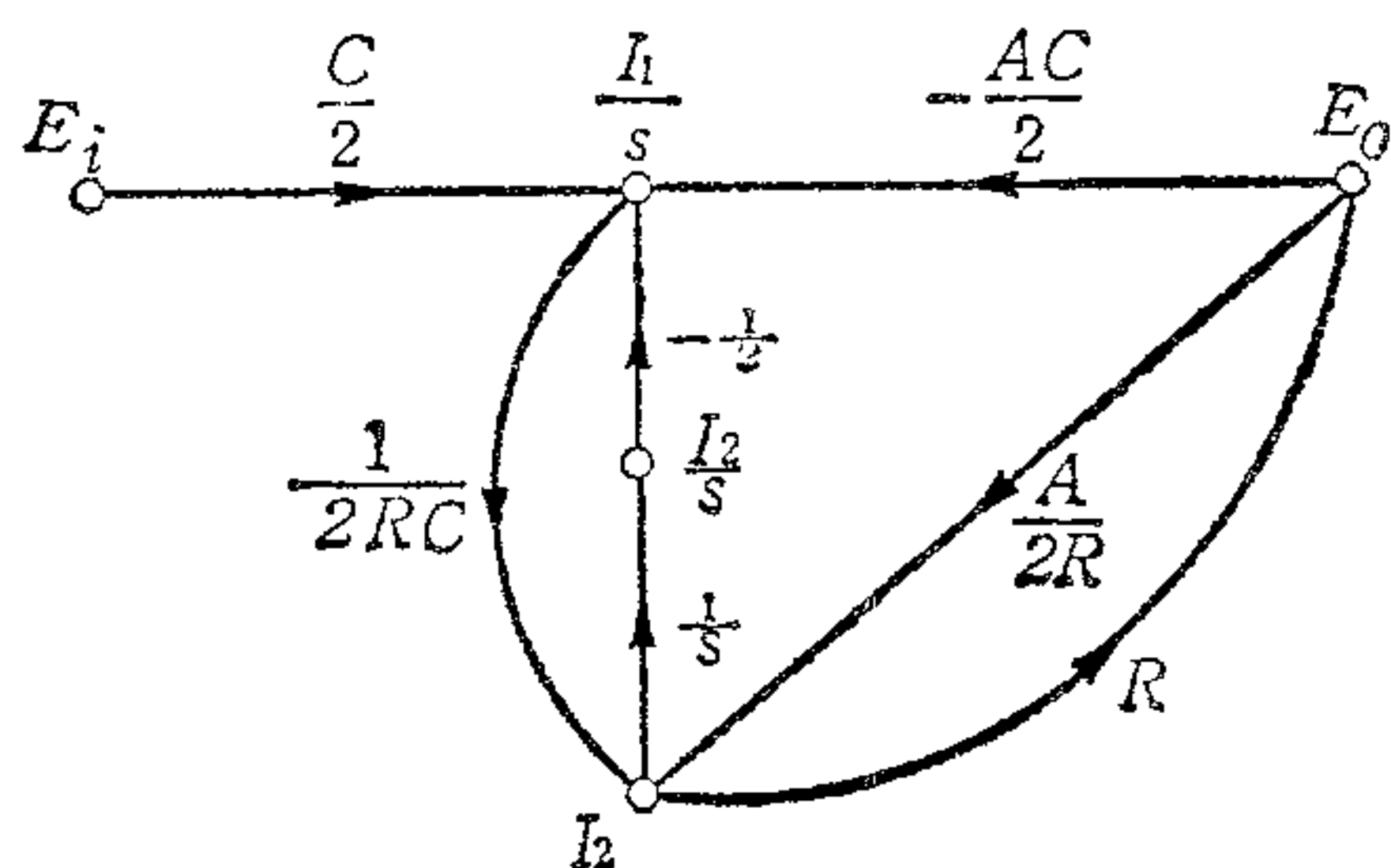
となる。

(9-4)

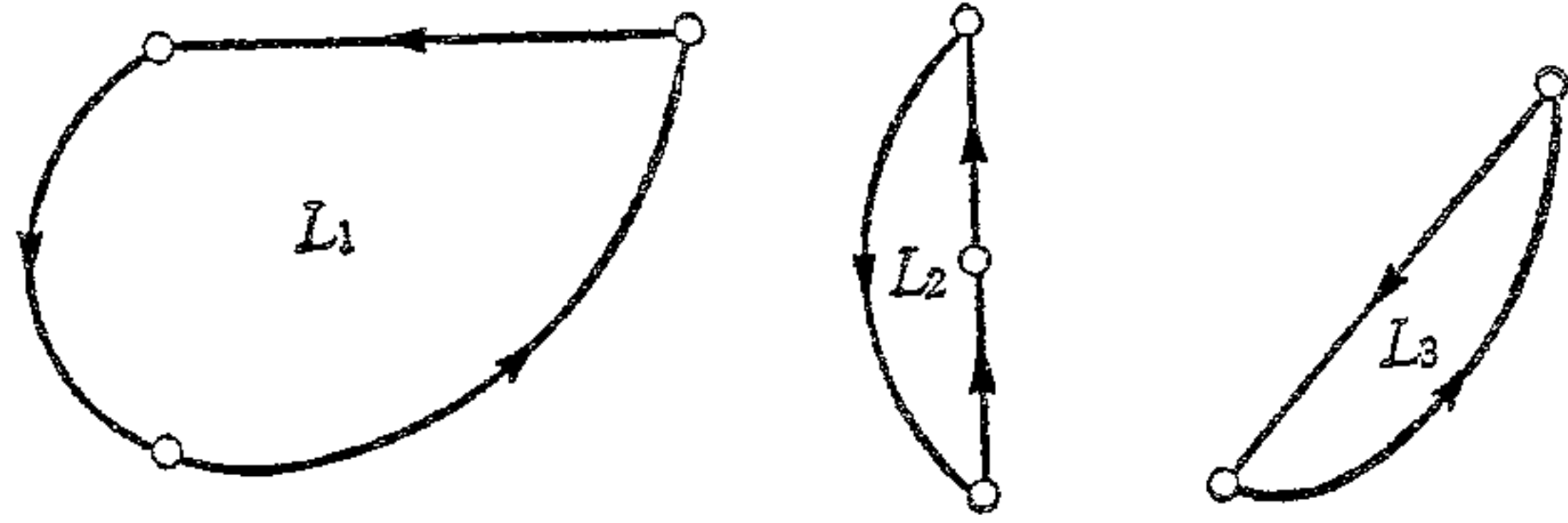
基本式を変形すると、(s)を省略する) 次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{I_1}{s} = \frac{CE_i}{2} - \frac{I_2}{2s} - \frac{ACE_o}{2} \\ I_2 = \frac{AE_o}{2R} + \frac{I_1}{2sRC} \\ E_o = RI_2 \end{cases}$$

シグナルフローグラフは次のように示される。



ループは外側および右より L_1, L_2, L_3 とする。すなわち



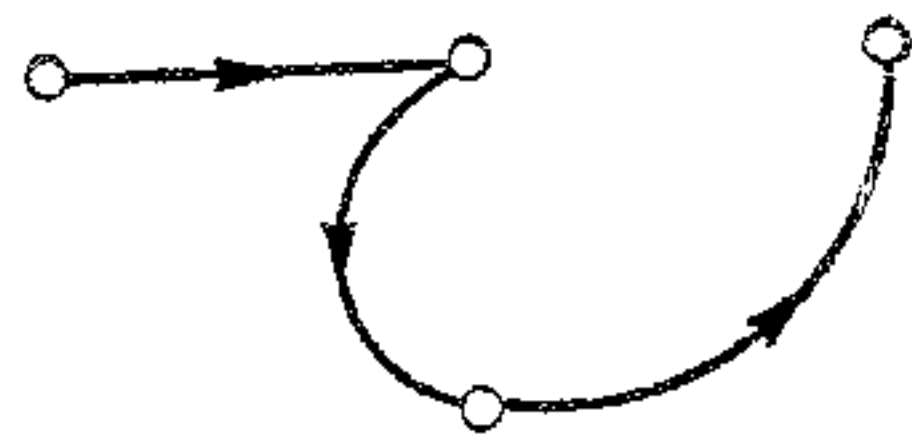
とすれば,

$$L_1 = -\frac{A}{4}$$

$$L_2 = -\frac{1}{4sCR}$$

$$L_3 = \frac{A}{2}$$

また, E_i から E_o までのパスは,



と唯一つ存在する。

$$P_1 = \frac{1}{4}$$

したがって

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 = 1 - \frac{A}{4} + \frac{1}{4sRC}$$

$$\Delta_1 = 1$$

となるので, 伝達関数は,

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{A}{4} + \frac{1}{4sRC}} = \frac{sRC}{1 + (4-A)sRC}$$

となる。



付録 I 関係のある数学公式

A) 三角関数

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\varepsilon^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

$$\sin x = \frac{\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{\varepsilon^{jx} + \varepsilon^{-jx}}{2}$$

$$(\cos x \pm j \sin x)^n = \varepsilon^{\pm jnx} = \cos nx \pm j \sin nx$$

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \phi)$$

$$\text{ただし } \phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

B) 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-x}}{\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}}$$

この定義は、 $\sin x$ の場合から j を除いた関数と考えるとよい。cosech sech coth の
逆数関係も三角関数と同じ。

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x > 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x| < 1$$

C) 級数

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

D) 微分 (u, v は t の関数)

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \times u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \times u'$$

$$(\tan u)' = \sec^2 u \times u'$$

$$(\cot u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \times u'$$

$$(\sin^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(\cos^{-1} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad 0 \leq \cos^{-1} u \leq \pi$$

$$(\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cot^{-1} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

E) 積 分

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int f(x) dt = \int \frac{f(x) dx}{(dx/dt)}$$

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \log t + c \quad t > 0$$

$$\int \varepsilon^t dt = \varepsilon^t + c$$

$$\int u^n dt = \frac{u^{n+1}}{u'(n+1)} + c$$

$$\int \frac{1}{u} dt = \frac{\log |u|}{u'} + c$$

$$\int \varepsilon^u dt = \frac{\varepsilon^u}{u'} + c$$

$$\int \sin u dt = -\frac{\cos u}{u'} + c$$

$$\int \cos u dt = \frac{\sin u}{u'} + c$$

$$\int \tan u dt = \frac{1}{u'} (\log \sec u) + c$$

$$\int \cot u dt = \frac{1}{u'} (\log \sin u) + c$$

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + c$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + c$$

$$\int \sec^2 t dt = \tan t + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 t dt = -\cot t + c$$

$$\int \tan^2 t dt = \tan t - t + c$$

$$\int \cot^2 t dt = -\cot t - t + c$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{t}{a} + c$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{t-a}{t+a} \right) \quad u^2 > a^2$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left(\frac{a-t}{a+t} \right) \quad u^2 < a^2$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{t}{|a|} + c \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \log (t + \sqrt{t^2 \pm a^2}) + c \quad t > 0$$

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t \sqrt{a^2 - t^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{t}{a} \right) + c$$

$$\int \sqrt{t^2 \pm a^2} dt = \frac{1}{2} \left[t \sqrt{t^2 \pm a^2} \pm a^2 \log (t + \sqrt{t^2 \pm a^2}) \right] + c$$

積分の公式はきわめて多くあるので、これ以上の分については、数学の公式集を参照されたい。

付録Ⅱ ラプラス変換公式

A 理論式

| No. | $f(t)$ | $F(s)$ | メ モ |
|-----|---|---|---------|
| 1. | $\int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t) dt$ | $F(s)$ | 定義式 |
| 2. | $kf(t)$ | $kF(s)$ | 線形性 |
| 3. | $f(t) \pm g(t)$ | $F(s) \pm G(s)$ | " " " |
| 4. | $f(t-a)$ | $\varepsilon^{-as} F(s)$ | 変時定理 |
| 5. | $\varepsilon^{\pm bt} f(t)$ | $F(s \mp b)$ | 変移定理 |
| 6. | $f(at)$ | $1/a \cdot F(s/a)$ | 相似定理 |
| 7. | $f(t/a)$ | $a \cdot F(as)$ | " " " " |
| 8. | $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ | $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$ | 最終値定理 |
| 9. | $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ | $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$ | 初期値定理 |
| 10. | $f_1(t)$ の周期関数 | $\frac{F_1(s)}{1 - \varepsilon^{-Ts}}$ | T: 周期 |
| 11. | $tf(t)$ | $-\frac{d}{ds} F(s)$ | |
| 12. | $t^n f(t)$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ | |
| 13. | $\frac{1}{t} f(t)$ | $\int_s^{\infty} F(s) ds$ | |
| 14. | $\frac{1}{t^n} f(t)$ | $\int \int_n \square \int_s^{\infty} F(s) ds^n$ | |
| 15. | $\frac{d}{dt} f(t)$ | $s \cdot F(s)$ | |
| 16. | $\int_0^t f(t) dt$ | $\frac{F(s)}{s}$ | |

B. 基本公式

| No. | $f(t)$ | $F(s)$ |
|--------|--|--|
| I | 1 | $1/s$ |
| II | t | $1/s^2$ |
| III | t^n | $n!/s^{n+1}$ |
| IV | $\frac{1}{T} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{1+Ts}$ |
| IV' | ε^{-at} | $\frac{1}{a+s}$ |
| V | $\omega_1 \sin \omega_1 t$ | $\frac{1}{1+s^2/\omega_1^2}$ |
| V' | $\sin \omega_1 t$ | $\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2}$ |
| VI | $\omega_1 \cos \omega_1 t$ | $\frac{s/\omega_1}{1+s^2/\omega_1^2}$ |
| VI' | $\cos \omega_1 t$ | $\frac{s}{s^2+\omega_1^2}$ |
| VII | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - s^{n-1} f_{(0)} - s^{n-2} f_{(0)}^{(1)} - \dots - s f_{(0)}^{(n-2)} - f_{(0)}^{(n-1)}$ |
| VII-a | $f^{(1)}(t)$ | $sF(s) - f_{(0)}$ |
| VII-b | $f^{(2)}(t)$ | $s^2 F(s) - s f_{(0)} - f_{(0)}^{(1)}$ |
| VII-c | $f^{(3)}(t)$ | $s^3 F(s) - s^2 f_{(0)} - s f_{(0)}^{(1)} - f_{(0)}^{(2)}$ |
| VIII | $f^{(-n)}(t)$ | $\frac{F(s)}{s^n} + \frac{f_{(0)}^{(-1)}}{s^n} + \frac{f_{(0)}^{(-2)}}{s^{n-1}} + \dots + \frac{f_{(0)}^{(-n+1)}}{s^2} + \frac{f_{(0)}^{(-n)}}{s}$ |
| VIII-a | $f^{(-1)}(t)$ | $\frac{F(s)}{s} + \frac{[\int f(t) dt]_0}{s}$ |
| VIII-b | $f^{(-2)}(t)$ | $\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f_{(0)}^{(-1)}}{s^2} + \frac{f_{(0)}^{(-2)}}{s}$ |

C. 一般公式

(I) 公式の番号について。

一般公式は主として、逆変換用であるが、 $F(s)$ の形によって容易に見つけ出せるように番号をつけてある。一般に

$$F(s) = \frac{(s \text{ の } k \text{ 次式})}{s^n (m \text{ 個の一次因数})(l \text{ 個の二次因数})} \quad \begin{array}{c} k \text{ ---} \\ \downarrow \\ n \leftarrow m \leftarrow l \end{array}$$

の形であるから、公式番号を $k \ l \ m \ n$ とし、 s^n が分子にある場合、つまり n が負のときには、番号の前に $(-)$ をつけた。

(II) 集約記号について。

公式の中には、同じ形の部分が繰り返し出てくるので、その中の繁雑なものを記号で示すことにした。これらは主として二次因数に関するものである。

頻繁に公式を利用するときには、この記号表を別のカードに転記しておくとう利である。

集約記号表

| 記号 | 式 | 例 |
|----|--|---|
| A | $1 - 2Td\omega_1 + T^2\omega_1^2$ | $A_2 = 1 - 2T_2d\omega_1 + T_2^2\omega_1^2$ |
| | | $A_{02} = 1 - 2Td_2\omega_2 + T^2\omega_2^2$ |
| B | $1 + T^2\omega_1^2$ | $B_2 = 1 + T_2^2\omega_1^2$ |
| C | $1 - Td\omega_1$ | $C_2 = 1 - T_2d\omega_1$ |
| D | $\sqrt{1 - d^2}$ | $D_2 = \sqrt{1 - d_2^2}$ |
| G | $\omega_1^2 - \omega_2^2$ | |
| H | $d_2\omega_2 - d_1\omega_1$ | |
| J | $2d\omega_1\omega_2$ | |
| K | $G^2 + 4GHd\omega_1 + 4H^2\omega_1^2$ | $K_2 = G^2 + 4GHd_2\omega_2 + 4H^2\omega_2^2$ |
| M | $b - aT + T^2$ | $M_2 = b - aT_2 + T_2^2$ |
| N | $2bd\omega_1 - a$ | $N_2 = 2bd_2\omega_2 - a$ |
| P | $1 + a^2\omega_1^2$ | $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a \rightarrow T \text{ のとき } \left[\begin{array}{l} B \\ C \\ A \end{array} \right] \text{ に対応}$ |
| Q | $1 - ad\omega_1$ | |
| R | $1 - 2ad\omega_1 + a^2\omega_1^2$ | |
| Y | $1 - ad\omega_1 + 2bd^2\omega_1^2 - b\omega_1^2$ | |
| Z | $(1 - b\omega_1^2)^2 + a^2\omega_1^2$ | |

| No. | $F(s)$ | $f(t)$ |
|--------------|---------------------------------|--|
| 0000 | 1 | $t=0$ における <i>unit impulse</i> |
| 0001 | $1/s$ | 1 |
| 0002 | $1/s^2$ | t |
| 000 <i>n</i> | $1/s^n$ | $t^{n-1}/(n-1)!$ |
| 0010 | $\frac{1}{1+Ts}$ | $\frac{1}{T}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0011 | $\frac{1}{s(1+Ts)}$ | $1-\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0012 | $\frac{1}{s^2(1+Ts)}$ | $t-T+T\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0020A | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $\frac{1}{T_1-T_2}(\epsilon^{-\frac{t}{T_1}}-\epsilon^{-\frac{t}{T_2}})$ |
| 0020B | $\frac{1}{(1+Ts)^2}$ | $\frac{t}{T^2}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0020C | $\frac{1}{1-s^2/\omega_1^2}$ | $-\omega_1 \sinh \omega_1 t$ |
| 0021A | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $1-\frac{1}{T_1-T_2}(T_1\epsilon^{-\frac{t}{T_1}}-T_2\epsilon^{-\frac{t}{T_2}})$ |
| 0021B | $\frac{1}{s(1+Ts)^2}$ | $1-\frac{T+t}{T}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0022A | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $t-T_1-T_2-\frac{1}{T_1-T_2}(T_2^2\epsilon^{-\frac{t}{T_2}}-T_1^2\epsilon^{-\frac{t}{T_1}})$ |
| 0022B | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^2}$ | $t-2T+(t+2T)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0023A | $\frac{1}{s^3(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $\frac{t^2}{2}-(T_1+T_2)t-\frac{T_2^3(1-\epsilon^{-\frac{t}{T_2}})-T_1^3(1-\epsilon^{-\frac{t}{T_1}})}{T_1-T_2}$ |
| 0023B | $\frac{1}{s^3(1+Ts)^2}$ | $\frac{t^2}{2}-2Tt+6T^2-T(t-3T)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|---|
| 0030A | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $\frac{T_1 \varepsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{T_2 \varepsilon^{-t/T_2}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} + \frac{T_3 \varepsilon^{-t/T_3}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| 0030B | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $\frac{T_1}{(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{(T_2-T_1)t - T_1 T_2}{T_2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 0030C | $\frac{1}{(1+Ts)^3}$ | $\frac{t^2}{2T^3} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 00n0 | $\frac{1}{(1+Ts)^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)! T^n} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0031A | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $1 - \frac{T_1^2 \varepsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} - \frac{T_2^2 \varepsilon^{-t/T_2}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} - \frac{T_3^2 \varepsilon^{-t/T_3}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| 0031B | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $1 - \frac{T_1^2 \varepsilon^{-t/T_1}}{(T_2-T_1)^2} + \left[\frac{t}{T_1-T_2} + \frac{T_2(2T_1-T_2)}{(T_1-T_2)^2} \right] \varepsilon^{-t/T_2}$ |
| 0031C | $\frac{1}{s(1+Ts)^3}$ | $1 - \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{2T^2}\right) \varepsilon^{-t/T}$ |
| 0032A | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $t - (T_1+T_2+T_3) - \frac{1}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)} \times \left[T_1^3(T_2-T_3) \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + T_2^3(T_3-T_1) \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}} + T_3^3(T_1-T_2) \varepsilon^{-\frac{t}{T_3}} \right]$ |
| 0032C | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^3}$ | $t - 3T + \left(3T + 2t + \frac{t^2}{2T}\right) \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 0100A | $\frac{1}{1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2}$ | $\frac{\omega_1}{D} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin \omega_1 D t$ |
| 0100B | $\frac{1}{1+s^2/\omega_1^2}$ | $\omega_1 \sin \omega_1 t$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|---|
| 0101A | $\frac{1}{s(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{1}{D} \epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0101B | $\frac{1}{s(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \cos \omega_1 t$ |
| 0102A | $\frac{1}{s^2(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1 D} \epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)$ $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0102B | $\frac{1}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t$ |
| 0103A | $\frac{1}{s^3(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{t^2}{2} - \frac{2dt}{\omega_1} + \frac{1-4d^2}{\omega_1^2} + \frac{\epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{\omega_1^2 D}$ $\phi = 3 \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0103B | $\frac{1}{s^3(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t)$ |
| 0110A | $\frac{1}{(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{T\omega_1^2}{A} \epsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\omega_1 \epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{D\sqrt{A}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 0110B | $\frac{1}{(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{T\omega_1^2}{B} \epsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B}}$ $\phi = \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 0111A | $\frac{1}{s(1+Ts)}$ $\times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{T^2\omega_1^2}{A} \epsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{D\sqrt{A}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d} + \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|---|
| 0111B | $\frac{1}{s(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \frac{T^2\omega_1^2}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B}}$ $\phi = \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 0112A | $\frac{1}{s^2(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - T - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{T^3\omega_1^2}{A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{\omega_1 D \sqrt{A}}$ $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d} + \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 0112B | $\frac{1}{s^2(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - T + \frac{T^3\omega_1^2}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{\sin(\omega_1 t - \phi)}{\omega_1 \sqrt{B}}$ $\phi = \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 0120A | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^2\omega_1^2}{A_1(T_1-T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2\omega_1^2}{A_2(T_2-T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $+ \frac{\omega_1 \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{D \sqrt{A_1 A_2}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1 D}{C_1} + \tan^{-1} \frac{T_2\omega_1 D}{C_2}$ |
| 0120B | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^2\omega_1^2}{B_1(T_1-T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2\omega_1^2}{B_2(T_2-T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $+ \frac{\omega_1}{\sqrt{B_1 B_2}} \sin(\omega_1 t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} T_1\omega_1 + \tan^{-1} T_2\omega_1$ |

| No. | $F(s)$ | $f(t)$ |
|-------|--|---|
| 0120C | $\frac{1}{(1+Ts)^2(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2}{A} \left[\left(t + \frac{2TC}{A} \right) \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{\omega_1 D} \right]$ $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 0120D | $\frac{1}{(1+Ts)^2(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2}{B} \left[\left(t + \frac{2T}{B} \right) \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\sin(\omega_1 t - \phi)}{\omega_1} \right]$ $\phi = 2 \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 0121A | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s) \times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{T_1^3 \omega_1^2}{A_1(T_2 - T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^3 \omega_1^2}{A_2(T_1 - T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{D\sqrt{A_1 A_2}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1 \omega_1 D}{C_1} + \tan^{-1} \frac{T_2 \omega_1 D}{C_2} + \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0121B | $\frac{1}{s(1+Ts)^2 \times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \frac{T\omega_1^2 t}{A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{T^2 \omega_1^2 (A+2C)}{A^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 Dt - \phi)}{AD}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d} + 2 \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 0121C | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s) \times (1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{T_1^3 \omega_1^2}{B_1(T_2 - T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^3 \omega_1^2}{B_2(T_1 - T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $\frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1 B_2}}$ $\phi = \tan^{-1} T_1 \omega_1 + \tan^{-1} T_2 \omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|--|
| 0121D | $\frac{1}{s(1+Ts)^2(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \frac{T\omega_1^2 t}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{T_1^2 \omega_1^2 (B+2)}{B^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $\frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{B}$ $\phi = 2 \tan^{-1} T \omega_1$ |
| 0122A | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s) \times (1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)}$ | $t - T_1 - T_2 - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{T_1^4 \omega_1^2}{A_1(T_1 - T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}}$ $+ \frac{T_2^4 \omega_1^2}{A_2(T_2 - T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{\omega_1 D \sqrt{A_1 A_2}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1 \omega_1 D}{C_1} + \tan^{-1} \frac{T_2 \omega_1 D}{C_2} + 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0122B | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^2 \times (1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)}$ | $t - 2T - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{T^2 \omega_1^2 t}{A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{2T^3 \omega_1^2 (A+C)}{A^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{\omega_1 A D}$ $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d} + 2 \tan^{-1} \frac{T \omega_1 D}{C}$ |
| 0122C | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s) \times (1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - T_1 - T_2 + \frac{T_1^4 \omega_1^2}{B_1(T_1 - T_2)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}}$ $+ \frac{T_2^4 \omega_1^2}{B_2(T_2 - T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{\sin(\omega_1 t - \phi)}{\omega_1 \sqrt{B_1 B_2}}$ $\phi = \tan^{-1} T_1 \omega_1 + \tan^{-1} T_2 \omega_1$ |
| 0122D | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^2(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - 2T + \frac{T^2 \omega_1^2 t}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{2T^3 \omega_1^2 (B+1)}{B^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{\sin(\omega_1 t - \phi)}{\omega_1 B}$ $\phi = 2 \tan^{-1} T \omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0130A | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^3\omega_1^2\varepsilon^{-\frac{t}{T_1}}}{A_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{T_2^3\omega_1^2\varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}}{A_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $+ \frac{T_3^3\omega_1^2\varepsilon^{-\frac{t}{T_3}}}{A_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ $+ \frac{\omega_1\varepsilon^{-d\omega_1 t}}{D\sqrt{A_1A_2A_3}} \sin(\omega_1Dt-\phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1D}{C_1} + \tan^{-1} \frac{T_2\omega_1D}{C_2} + \tan^{-1} \frac{T_3\omega_1D}{C_3}$ |
| 0130B | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2} \times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^3\omega_1^2}{A_1(T_1-T_2)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2\omega_1^2 t}{A_2(T_2-T_1)} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $- \frac{T_2^2\omega_1^2[A_2T_1+2C_2(T_1-T_2)]}{A_2^2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $+ \frac{\omega_1\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1Dt-\phi)}{A_2D\sqrt{A_1}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1D}{C_1} + 2 \tan^{-1} \frac{T_2\omega_1D}{C_2}$ |
| 0130C | $\frac{1}{(1+Ts)^3(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2 t^2}{2AT} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + \frac{2\omega_1^2 C}{A^2} t \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{T\omega_1^2(4C^2-A)}{A^3} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{\omega_1\varepsilon^{-d\omega_1 t}}{AD\sqrt{A}} \sin(\omega_1Dt-\phi)$ $\phi = 3 \tan^{-1} \frac{T\omega_1D}{C}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|--|
| 0130D | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^3\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{T_2^3\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $+ \frac{T_3^3\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_3}}{B_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)} + \frac{\omega_1\sin(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1B_2B_3}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + \tan^{-1}T_2\omega_1 + \tan^{-1}T_3\omega_1$ |
| 0130E | $\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2} \times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^3\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)^2} + \frac{T_2\omega_1^2 t \varepsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)}$ $- \frac{T_2^2\omega_1^2[T_1(B_2+2)-2T_2]}{B_2^2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-t/T_2}$ $+ \frac{\omega_1\sin(\omega_1 t - \phi)}{B_2\sqrt{B_1}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + 2\tan^{-1}T_2\omega_1$ |
| 0130F | $\frac{1}{(1+Ts)^3(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2 t^2 \varepsilon^{-t/T} + \frac{2\omega_1^2 t \varepsilon^{-t/T}}{B^2}}{2BT} + \frac{T\omega_1^2(4-B)}{B^3} \varepsilon^{-t/T} + \frac{\omega_1\sin(\omega_1 t - \phi)}{B\sqrt{B}}$ $\phi = 3\tan^{-1}T\omega_1$ |
| 0131A | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \times (1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{T_1^4\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_1}}{A_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} - \frac{T_2^4\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_2}}{A_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $- \frac{T_3^4\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_3}}{A_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)} + \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{D\sqrt{A_1A_2A_3}}$ $\phi = \tan^{-1}\frac{T_1\omega_1 D}{C_1} + \tan^{-1}\frac{T_2\omega_1 D}{C_2}$ $+ \tan^{-1}\frac{T_3\omega_1 D}{C_3} + \tan^{-1}\frac{D}{-d}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0131B | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ $\times(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{T_1^4 \omega_1^2 \varepsilon^{-t/T_1}}{A_1(T_1-T_2)^2} - \frac{T_2^2 \omega_1^2 t \varepsilon^{-t/T_2}}{A_2(T_2-T_1)}$ $- \frac{T_2^3 \omega_1^2 [A_2(2T_1-T_2)+2C_2(T_1-T_2)]}{A_2^2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{A_2 D \sqrt{A_1}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1 \omega_1 D}{C_1} + 2 \tan^{-1} \frac{T_2 \omega_1 D}{C_2} + \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0131C | $\frac{1}{s(1+Ts)^3}$ $\times(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{\omega_1^2 t^2}{2A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \frac{T \omega_1^2 (A+2C)t}{A^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $- \frac{T^2 \omega_1^2 [5A+(B-2)^2-6C^2(1-C)]}{A^3} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{AD \sqrt{A}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d} + 3 \tan^{-1} \frac{T \omega_1 D}{C}$ |
| 0131D | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ $\times(1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{T_1^4 \omega_1^2 \varepsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} - \frac{T_2^4 \omega_1^2 \varepsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $- \frac{T_3^4 \omega_1^2 \varepsilon^{-t/T_3}}{B_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)} - \frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1 B_2 B_3}}$ $\phi = \tan^{-1} T_1 \omega_1 + \tan^{-1} T_2 \omega_1 + \tan^{-1} T_3 \omega_1$ |
| 0131E | $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ $\times(1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 - \frac{T_1^4 \omega_1^2 \varepsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)^2} - \frac{T_2^2 \omega_1^2 t \varepsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)}$ $+ \frac{T_2^2 \omega_1^2 [2(T_1-T_2)+B_2(2T_1-T_2)]}{B_2^2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ $- \frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{B_2 \sqrt{B_1}}$ $\phi = \tan^{-1} T_1 \omega_1 + 2 \tan^{-1} T_2 \omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|---|
| 0131F | $\frac{1}{s(1+Ts)^3(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \frac{\omega_1^2 t^2}{2B} \varepsilon^{-t/T} - \frac{T\omega_1^2(B+2)t}{B^2} \varepsilon^{-t/T}$ $- \frac{T^2\omega_1^2(B^2+B+4)}{B^3} \varepsilon^{-t/T} - \frac{\cos(\omega_1 t - \phi)}{B\sqrt{B}}$ $\phi = 3\tan^{-1}T\omega_1$ |
| 0132A | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ $\times (1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)$ | $t - T_1 - T_2 - T_3 - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{T_1^5\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_1}}{A_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$ $+ \frac{T_2^5\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_2}}{A_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)} + \frac{T_3^5\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_3}}{A_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)}{\omega_1 D \sqrt{A_1 A_2 A_3}}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1 D}{C_1} + \tan^{-1} \frac{T_2\omega_1 D}{C_2}$ $+ \tan^{-1} \frac{T_3\omega_1 D}{C_3} + 2\tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 0132B | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ $\times (1+2ds/\omega_1 + s^2/\omega_1^2)$ | $t - T_1 - 2T_2 - \frac{2d}{\omega_1} + \frac{T_1^5\omega_1^2\varepsilon^{-t/T_1}}{A_1(T_1-T_2)^2}$ $+ \frac{T_2^3\omega_1^2 t}{A_2(T_2-T_1)} \varepsilon^{-t/T_2}$ $+ \frac{T_2^4\omega_1^2 [2C_2(T_2-T_1) - A_2(3T_1-2T_2)]}{A_2^2(T_2-T_1)^2} \varepsilon^{-t/T_2}$ $+ \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t}}{A_2\omega_1 D \sqrt{A_1}} \sin(\omega_1 D t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T_1\omega_1 D}{C_1} + 2\tan^{-1} \frac{T_2\omega_1 D}{C_2} + 2\tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|--|
| 0132C | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^3(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t-3T-\frac{2d}{\omega_1}+\frac{T\omega_1^2 t^2}{2A}\epsilon^{-t/T}$ $+\frac{2T^2\omega_1^2(A+C)t}{A^2}\epsilon^{-t/T}$ $+\frac{T^3\omega_1^2[15A+3(B-2)^2-24C^2+16C^3]}{A^3}\epsilon^{-t/T}$ $+\frac{\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt-\phi)}{A\omega_1 D\sqrt{A}}$ $\phi=2\tan^{-1}\frac{D}{-d}+3\tan^{-1}\frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 0132D | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ $\times(1+s^2/\omega_1^2)$ | $t-T_1-T_2-T_3+\frac{T_1^5\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$ $+\frac{T_2^5\omega_1^2\epsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}+\frac{T_3^5\omega_1^2\epsilon^{-t/T_3}}{B_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ $\frac{\sin(\omega_1 t-\phi)}{\omega_1\sqrt{B_1B_2B_3}}$ $\phi=\tan^{-1}T_1\omega_1+\tan^{-1}T_2\omega_1+\tan^{-1}T_3\omega_1$ |
| 0132E | $\frac{1}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ $\times(1+s^2/\omega_1^2)$ | $t-T_1-2T_2+\frac{T_1^5\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)^2}+\frac{T_2^3\omega_1^2 t\epsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)}$ $+\frac{T_2^4\omega_1^2[2(T_2-T_1)-B_2(3T_1-2T_2)]}{B_2^2(T_2-T_1)^2}\epsilon^{-t/T_2}$ $\frac{\sin(\omega_1 t-\phi)}{B_2\omega_1\sqrt{B_1}}$ $\phi=\tan^{-1}T_1\omega_1+2\tan^{-1}T_2\omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0132F | $\frac{1}{s^2(1+Ts)^3(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t-3T+\frac{T\omega_1^2 t^2}{2B}\epsilon^{-\frac{t}{T}}+\frac{2T^2\omega_1^2(B+1)t}{B^2}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{T^3\omega_1^2(3B^2+3B+4)}{B^3}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $\frac{\sin(\omega_1 t-\phi)}{B\omega_1\sqrt{B}}$ $\phi=3\tan^{-1}T\omega_1$ |
| 0200A | $\frac{1}{(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ $\times(1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $\frac{\omega_1\omega_2^2\epsilon^{-d_1\omega_1 t}\sin(\omega_1 D_1 t-\phi_1)}{D_1\sqrt{K_1}}$ $+\frac{\omega_1^2\omega_2\epsilon^{-d_2\omega_2 t}\sin(\omega_2 D_2 t-\phi_2)}{D_2\sqrt{K_2}}$ $\phi_1=\tan^{-1}\frac{2\omega_1 D_1 H}{-(G+2d_1\omega_1 H)}$ $\phi_2=-\tan^{-1}\frac{2\omega_2 D_2 H}{G+2d_2\omega_2 H}$ |
| 0200B | $\frac{1}{(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1}{2D^3}\epsilon^{-d\omega_1 t}(\sin\omega_1 Dt-\omega_1 Dt\cos\omega_1 Dt)$ |
| 0200C | $\frac{1}{(1+s^2/\omega_1^2)}$ $\times(1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\sqrt{G^2+J^2}}\left[\frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t-\phi_1)\right.$ $\left.+\frac{\epsilon^{-d\omega_2 t}}{\omega_2 D}\sin(\omega_2 Dt-\phi_2)\right]$ $\phi_1=\tan^{-1}\frac{J}{-G}$ $\phi_2=\tan^{-1}\frac{-2d\omega_2^2 D}{G+2d^2\omega_2^2}$ |
| 0200D | $\frac{1}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{\omega_1\omega_2}{G}(\omega_1\sin\omega_2 t-\omega_2\sin\omega_1 t)$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0200E | $\frac{1}{(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $\frac{\omega_1}{2}(\sin \omega_1 t - \omega_1 t \cos \omega_1 t)$ |
| 0201A | $\frac{1}{s(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $1 + \frac{\omega_2^2 \varepsilon^{-d_1\omega_1 t} \sin(\omega_1 D_1 t - \phi_1)}{D_1 \sqrt{K_1}}$ $+ \frac{\omega_1^2 \varepsilon^{-d_2\omega_2 t} \sin(\omega_2 D_2 t - \phi_2)}{D_2 \sqrt{K_2}}$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{D_1}{-d_1} + \tan^{-1} \frac{2\omega_1 D_1 H}{-(G+2d_1\omega_1 H)}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{D_2}{-d_2} - \tan^{-1} \frac{2\omega_2 D_2 H}{G+2d_2\omega_2 H}$ |
| 0201B | $\frac{1}{s(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $1 - \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t}}{2D} \left[\frac{\omega_1 t}{D} \cos(\omega_1 D t - \phi_1) \right.$ $\left. + \sqrt{4-3d^2} \sin(\omega_1 D t - \phi_2) \right]$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ $\phi_2 = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d} + \tan^{-1} \frac{2D}{d}$ |
| 0201C | $\frac{1}{s(1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $1 + \frac{1}{\sqrt{G^2+J^2}} \left[\frac{\omega_1^2 \varepsilon^{-d\omega_2 t}}{D} \sin(\omega_2 D t - \phi_2) \right.$ $\left. - \omega_2^2 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right]$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{J}{-G}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{D}{-d} - \tan^{-1} \frac{2d\omega_2^2 D}{G+2d^2\omega_2^2}$ |
| 0201D | $\frac{1}{s(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $1 + \frac{1}{G}(\omega_2^2 \cos \omega_1 t - \omega_1^2 \cos \omega_2 t)$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0201E | $\frac{1}{s(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \cos \omega_1 t - \frac{\omega_1}{2} t \sin \omega_1 t$ |
| 0202A | $\frac{1}{s^2(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $t - \frac{2d_1}{\omega_1} - \frac{2d_2}{\omega_2} + \frac{\omega_2^2 \varepsilon^{-d_1 \omega_1 t} \sin(\omega_1 D_1 t - \phi_1)}{\omega_1 D_1 \sqrt{K_1}}$ $+ \frac{\omega_1^2 \varepsilon^{-d_2 \omega_2 t} \sin(\omega_2 D_2 t - \phi_2)}{\omega_2 D_2 \sqrt{K_2}}$ $\phi_1 = 2 \tan^{-1} \frac{D_1}{-d_1} + \tan^{-1} \frac{2\omega_1 D_1 H}{-(G+2d_1 \omega_1 H)}$ $\phi_2 = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d_2} - \tan^{-1} \frac{2\omega_2 D_2 H}{G+2d_2 \omega_2 H}$ |
| 0202B | $\frac{1}{s^2(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t - \frac{4d}{\omega_1} - \frac{\varepsilon^{-d\omega_1 t}}{2D^2} \left[t \cos(\omega_1 D t - \phi_1) \right.$ $\left. + \frac{\sqrt{9-8d^2}}{\omega_1 D} \sin(\omega_1 D t - \phi_2) \right]$ $\phi_1 = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ $\phi_2 = 3 \tan^{-1} \frac{D}{-d} + \tan^{-1} \frac{3D}{d}$ |
| 0202C | $\frac{1}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $t - \frac{2d}{\omega_2} + \frac{1}{\sqrt{G^2+J^2}} \left[\frac{\omega_1^2}{\omega_2 D} \varepsilon^{-d\omega_2 t} \sin(\omega_2 D t - \phi_2) \right.$ $\left. - \frac{\omega_2^2}{\omega_1} \sin(\omega_1 t - \phi_1) \right]$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{J}{-G}$ $\phi_2 = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d} - \tan^{-1} \frac{2d\omega_2^2 D}{G+2d^2\omega_2^2}$ |
| 0202D | $\frac{1}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $t + \frac{1}{G} \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_1^2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right)$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 0202E | $\frac{1}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $t + \frac{t}{2}\cos\omega_1 t - \frac{3}{2\omega_1}\sin\omega_1 t$ |
| 1011 | $\frac{1+as}{s(1+Ts)}$ | $1 + \frac{a-T}{T}\epsilon^{-t/T}$ |
| 1012 | $\frac{1+as}{s^2(1+Ts)}$ | $t + a - T - (a-T)\epsilon^{-t/T}$ |
| 1013 | $\frac{1+as}{s^3(1+Ts)}$ | $\frac{t^2}{2} + (a-T)(t-T) + T(a-T)\epsilon^{-t/T}$ |
| 1020A | $\frac{1+as}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $\frac{T_1-a}{T_1(T_1-T_2)}\epsilon^{-t/T_1} - \frac{T_2-a}{T_2(T_1-T_2)}\epsilon^{-t/T_2}$ |
| 1020B | $\frac{1+as}{(1+Ts)^2}$ | $\left(\frac{T-a}{T^3}t + \frac{a}{T^2}\right)\epsilon^{-t/T}$ |
| 1021A | $\frac{1+as}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $1 - \frac{T_1-a}{T_1-T_2}\epsilon^{-t/T_1} + \frac{T_2-a}{T_1-T_2}\epsilon^{-t/T_2}$ |
| 1021B | $\frac{1+as}{s(1+Ts)^2}$ | $1 + \left[\frac{a-T}{T^2}t - 1\right]\epsilon^{-t/T}$ |
| 1022 | $\frac{1+as}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $t - T_1 - T_2 + a + \frac{T_1(T_1-a)}{T_1-T_2}\epsilon^{-t/T_1}$ $- \frac{T_2(T_2-a)}{T_1-T_2}\epsilon^{-t/T_2}$ |
| 1030A | $\frac{1+as}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $\frac{(T_1-a)\epsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{(T_2-a)\epsilon^{-t/T_2}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $+ \frac{(T_3-a)\epsilon^{-t/T_3}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| 1030B | $\frac{1+as}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $\frac{T_1-a}{(T_1-T_2)^2}\epsilon^{-t/T_1}$ $- \left[\frac{T_2-a}{T_2^2(T_1-T_2)}t + \frac{T_1-a}{(T_1-T_2)^2}\right]\epsilon^{-t/T_2}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|--|
| 1030C | $\frac{1+as}{(1+Ts)^3}$ | $\left(\frac{T-a}{2T^4}t^2 + \frac{a}{T^3}t\right)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 1031A | $\frac{1+as}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \times (1+T_3s)$ | $1 - \frac{T_1(T_1-a)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}\epsilon^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2(T_2-a)}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}\epsilon^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_3(T_3-a)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\epsilon^{-\frac{t}{T_3}}$ |
| 1031B | $\frac{1+as}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $1 - \frac{T_1(T_1-a)}{(T_1-T_2)^2}\epsilon^{-\frac{t}{T_1}} + \left[\frac{T_2-a}{T_2(T_1-T_2)}t + \frac{T_1(T_1-a)}{(T_1-T_2)^2} - 1\right]\epsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 1100A | $\frac{1+as}{1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2}$ | $\frac{\omega_1\sqrt{R}}{D}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{a\omega_1 D}{Q}$ |
| 1100B | $\frac{1+as}{1+s^2/\omega_1^2}$ | $\omega_1\sqrt{P}\sin(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}a\omega_1$ |
| 1101A | $\frac{1+as}{s(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{\sqrt{R}}{D}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{a\omega_1 D}{Q} - \tan^{-1}\frac{D}{-d}$ |
| 1101B | $\frac{1+as}{s(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \sqrt{P}\cos(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}a\omega_1$ |
| 1102B | $\frac{1+as}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t + a - \frac{\sqrt{P}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}a\omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|---|
| 1110A | $\frac{1+as}{(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2(T-a)}{A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{\omega_1}{D} \sqrt{\frac{R}{A}} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_1 D}{Q} - \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 1110B | $\frac{1+as}{(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2(T-a)}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} + \omega_1 \sqrt{\frac{P}{B}} \sin(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} a\omega_1 - \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 1111A | $\frac{1+as}{s(1+Ts)}$ $\times (1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $1 + \frac{T\omega_1^2(a-T)}{A} \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{1}{D} \sqrt{\frac{R}{A}} \varepsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_1 D}{Q} - \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C} - \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 1111B | $\frac{1+as}{s(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{T\omega_1^2(a-T)}{B} \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - \sqrt{\frac{P}{B}} \cos(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} a\omega_1 - \tan^{-1} T\omega_1$ |
| 1200C | $\frac{1+as}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{G^2+J^2}} \left\{ \omega_2 \sqrt{P_1} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \right.$ $\left. + \frac{\omega_1}{D} \sqrt{R_2} \varepsilon^{-d\omega_2 t} \sin(\omega_2 D t + \phi_2) \right\}$ $\phi_1 = \tan^{-1} a\omega_1 - \tan^{-1} \frac{J}{-G}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{a\omega_2 D}{Q_2} - \tan^{-1} \frac{-2d\omega_2^2 D}{G+2d^2\omega_2^2}$ |

| NO, | F(s) | f(t) |
|-------|---|---|
| 2012 | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+Ts)}$ | $t+a-T+\frac{M}{T}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2021A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $1-\frac{M_1}{T_1(T_1-T_2)}\epsilon^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{M_2}{T_2(T_1-T_2)}\epsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 2021B | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+Ts)^2}$ | $1-\left(1-\frac{b}{T^2}+\frac{M}{T^3}t\right)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2022A | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $t+a-T_1-T_2+\frac{M_1}{T_1-T_2}\epsilon^{-\frac{t}{T_1}}$ $-\frac{M_2}{T_1-T_2}\epsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 2022B | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+Ts)^2}$ | $t+a-2T+\left(\frac{M}{T^2}t+2T-a\right)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2030A | $\frac{1+as+bs^2}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $\frac{M_1\epsilon^{-t/T_1}}{T_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)}+\frac{M_2\epsilon^{-t/T_2}}{T_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $+\frac{M_3\epsilon^{-t/T_3}}{T_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| 2030B | $\frac{1+as+bs^2}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $\frac{M_1}{T_1(T_1-T_2)^2}\epsilon^{-\frac{t}{T_1}}$ $+\left[\frac{M_2t}{T_2^3(T_2-T_1)}+\frac{bT_1-2bT_2-T_1T_2^2+aT_2^2}{T_2^2(T_2-T_1)^2}\right]\epsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 2030C | $\frac{1+as+bs^2}{(1+Ts)^3}$ | $\left(\frac{b}{T^3}+\frac{aT-2b}{T^4}t+\frac{Mt^2}{2T^5}\right)\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2031A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ $\times(1+T_3s)$ | $1-\frac{M_1\epsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}-\frac{M_2\epsilon^{-t/T_2}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $-\frac{M_3\epsilon^{-t/T_3}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|--|
| 2031B | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $1 - \frac{M_1}{(T_1-T_2)^2} \epsilon^{-\frac{t}{T_1}}$ $+ \left[\frac{M_2 t}{T_2^2(T_1-T_2)} + \frac{M_1}{(T_1-T_2)^2} - 1 \right] \epsilon^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| 2031C | $\frac{1+as+bs^2}{(1+Ts)^3}$ | $1 - \left(1 - \frac{b-T^2}{T^3} t + \frac{M}{2T^4} t^2 \right) \epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2032A | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)}$ $\times (1+T_3s)$ | $T+a-T_1-T_2-T_3$ $+ \frac{T_1 M_1 \epsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$ $+ \frac{T_2 M_2 \epsilon^{-t/T_2}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} + \frac{T_3 M_3 \epsilon^{-t/T_3}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| 2032C | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+Ts)^3}$ | $t+a-3T + \left[3T-a + \frac{2T-a}{T} t + \frac{M t^2}{2T^3} \right] \epsilon^{-\frac{t}{T}}$ |
| 2101A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 + \frac{[Y^2 + \omega_1^2 D^2 N^2]^{\frac{1}{2}}}{D} \epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-\omega_1 D N}{Y} - \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| 2101B | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1 - \sqrt{Z} \cos(\omega_1 t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_1}{1-b\omega_1^2}$ |
| 2102A | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t+a-\frac{2d}{\omega_1}$ $+ \frac{[Y^2 + \omega_1^2 D^2 N^2]^{\frac{1}{2}}}{\omega_1 D} \epsilon^{-d\omega_1 t} \sin(\omega_1 D t - \phi)$ $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{D}{-d} + \tan^{-1} \frac{\omega_1 D N}{Y}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|--|---|
| 2102B | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $t+a-\frac{\sqrt{Z}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{a\omega_1}{1-b\omega_1^2}$ |
| 2110A | $\frac{1+as+bs^2}{(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2 M}{TA}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{\omega_1[Y^2+\omega_1^2 D^2 N^2]^{\frac{1}{2}}}{D\sqrt{A}}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{-\omega_1 DN}{Y}-\tan^{-1}\frac{T\omega_1 D}{C}$ |
| 2110B | $\frac{1+as+bs^2}{(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2 M}{TB}\epsilon^{-\frac{t}{T}}+\omega_1\sqrt{\frac{Z}{B}}\sin(\omega_1 t+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{a\omega_1}{1-b\omega_1^2}-\tan^{-1}T\omega_1$ |
| 2111A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1-\frac{\omega_1^2 M}{A}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{[Y^2+\omega_1^2 D^2 N^2]^{\frac{1}{2}}}{D\sqrt{A}}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{D}{-d}+\tan^{-1}\frac{T\omega_1 D}{C}+\tan^{-1}\frac{\omega_1 DN}{Y}$ |
| 2111B | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $1-\frac{\omega_1^2 M}{B}\epsilon^{-\frac{t}{T}}-\sqrt{\frac{Z}{B}}\cos(\omega_1 t+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{a\omega_1}{1-b\omega_1^2}-\tan^{-1}T\omega_1$ |
| 2112A | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $t+a-T\frac{2d}{\omega_1}+\frac{T\omega_1^2 M}{A}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{[Y^2+\omega_1^2 D^2 N^2]^{\frac{1}{2}}}{\omega_1 D\sqrt{A}}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{T\omega_1 D}{C}+2\tan^{-1}\frac{D}{-d}+\tan^{-1}\frac{\omega_1 DN}{Y}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 2200C | $\frac{1+as+bs^2}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2}{D} \left[\frac{Y^2 + \omega_1^2 D^2 N_2^2}{G^2 + J^2} \right]^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-d\omega_2 t} \sin(\omega_2 D t + \phi_1)$ $+ \omega_1 \omega_2^2 \left[\frac{Z_1}{G^2 + J^2} \right]^{\frac{1}{2}} \sin(\omega_1 t + \phi_2)$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{-\omega_2 D N_2}{Y_2} - \tan^{-1} \frac{-2d\omega_2^2 D}{G + 2d^2 \omega_2^2}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{a\omega_1}{1 - b\omega_1^2} - \tan^{-1} \frac{J}{-G}$ |
| 2201A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ $\times (1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $1 + \frac{\omega_2^2 [Y_1^2 + \omega_1^2 D_1^2 N_1^2]^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-d_1 \omega_1 t} \sin(\omega_1 D_1 t - \phi_1)}{D_1 [(G + 2d_1 \omega_1 H)^2 + 4\omega_1^2 D_1^2 H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $+ \frac{\omega_1^2 [Y_2^2 + \omega_2^2 D_2^2 N_2^2]^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-d_2 \omega_2 t} \sin(\omega_2 D_2 t - \phi_2)}{D_2 [(G + 2d_2 \omega_2 H)^2 + 4\omega_2^2 D_2^2 H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{D_1}{-d_1} + \tan^{-1} \frac{\omega_1 D_1 N_1}{Y_1}$ $- \tan^{-1} \frac{-2\omega_1 D_1 H}{-(G + 2d_1 \omega_1 H)}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{D_2}{-d_2} + \tan^{-1} \frac{\omega_2 D_2 N_2}{Y_2}$ $- \tan^{-1} \frac{\omega_2 D_2 H}{G + 2d_2 \omega_2 H}$ |
| 2201F | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $1 - \frac{\omega_1 \sqrt{Z}}{2} t \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ $- \frac{\sqrt{P+3}}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_2)$ $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{a\omega_1}{1 - b\omega_1^2}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{a\omega_1}{2}$ |

| No | F(s) | f(t) |
|-------|---|--|
| 2202A | $\frac{1+as+bs^2}{s^2(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ $\times(1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $t+a-\frac{2d_1}{\omega_1}-\frac{2d_2}{\omega_2}$ $+\frac{\omega_2^2[Y_1^2+\omega_1^2D_1^2N_1^2]^{\frac{1}{2}}\epsilon^{-d_1\omega_1t}\sin(\omega_1D_1t-\phi_1)}{\omega_1D_1[(G+2d_1\omega_1H)^2+4\omega_1^2D_1^2H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $+\frac{\omega_1^2[Y_2^2+\omega_2^2D_2^2N_2^2]^{\frac{1}{2}}\epsilon^{-d_2\omega_2t}\sin(\omega_2D_2t-\phi_2)}{\omega_2D_2[(G+2d_2\omega_2H)^2+4\omega_2^2D_2^2H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $\phi_1=2\tan^{-1}\frac{D_1}{-d_1}+\tan^{-1}\frac{\omega_1D_1N_1}{Y_1}$ $-\tan^{-1}\frac{-2\omega_1D_1H}{-(G+2d_1\omega_1H)}$ $\phi_2=2\tan^{-1}\frac{D_2}{-d_2}+\tan^{-1}\frac{\omega_2D_2N_2}{Y_2}-\tan^{-1}\frac{2\omega_2D_2H}{G+2d_2\omega_2H}$ |
| 2211A | $\frac{1+as+bs^2}{s(1+Ts)}$ $\times(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ $\times(1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $1-\frac{T^2\omega_1^2\omega_2^2M}{A_{01}A_{02}}\epsilon^{-\frac{t}{T}}$ $+\frac{\omega_2^2[Y_1^2+\omega_1^2D_1^2N_1^2]^{\frac{1}{2}}\epsilon^{-d_1\omega_1t}\sin(\omega_1D_1t-\phi_1)}{D_1\sqrt{A_{01}}[(G+2d_1\omega_1H)^2+4\omega_1^2D_1^2H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $+\frac{\omega_1^2[Y_2^2+\omega_2^2D_2^2N_2^2]^{\frac{1}{2}}\epsilon^{-d_2\omega_2t}\sin(\omega_2D_2t-\phi_2)}{D_2\sqrt{A_{02}}[(G+2d_2\omega_2H)^2+4\omega_2^2D_2^2H^2]^{\frac{1}{2}}}$ $\phi_1=\tan^{-1}\frac{D_1}{-d_1}+\tan^{-1}\frac{T\omega_1D_1}{C_1}$ $+\tan^{-1}\frac{\omega_1D_1N_1}{Y_1}+\tan^{-1}\frac{2\omega_1D_1H}{-(G+2d_1\omega_1H)}$ $\phi_2=\tan^{-1}\frac{D_2}{-d_2}+\tan^{-1}\frac{T\omega_2D_2}{C_2}$ $+\tan^{-1}\frac{\omega_2D_2N_2}{Y_2}+\tan^{-1}\frac{-2\omega_2D_2H}{G+2d_2\omega_2H}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|--------|---|---|
| -0021A | $\frac{s}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ | $\frac{1}{T_1T_2(T_1-T_2)}(T_1\varepsilon^{-t/T_2}-T_2\varepsilon^{-t/T_1})$ |
| -0021B | $\frac{\dot{s}}{(1+Ts)^2}$ | $\frac{1}{T^3}(T-t)\varepsilon^{-t/T}$ |
| -0031A | $\frac{s}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $\frac{(T_2-T_3)\varepsilon^{-t/T_1}+(T_3-T_1)\varepsilon^{-t/T_2}}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)} + \frac{(T_1-T_2)\varepsilon^{-t/T_3}}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)}$ |
| -0031B | $\frac{\dot{s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)^2}$ | $-\frac{\varepsilon^{-t/T_1}}{(T_1-T_2)^2} + \left[\frac{1}{(T_1-T_2)^2} + \frac{t}{T_2^2(T_1-T_2)} \right] \varepsilon^{-t/T_2}$ |
| -0031C | $\frac{s}{(1+Ts)^3}$ | $\left(\frac{t}{T^3} - \frac{t^2}{2T^4} \right) \varepsilon^{-t/T}$ |
| -0101A | $\frac{s}{1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2}$ | $\frac{\omega_1^2}{D}\varepsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt+\phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| -0101B | $\frac{s}{1+s^2/\omega_1^2}$ | $\omega_1^2 \cos \omega_1 t$ |
| -0111A | $\frac{s}{(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $-\frac{\omega_1^2}{A}\varepsilon^{-t/T} + \frac{\omega_1^2}{D\sqrt{A}}\varepsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1 Dt-\phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C} - \tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |
| -0111B | $\frac{s}{(1+Ts)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $-\frac{\omega_1^2}{B}\varepsilon^{-t/T} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{B}}\cos(\omega_1 t-\phi)$ $\phi = \tan^{-1} T\omega_1$ |
| -0112A | $\frac{s^2}{(1+Ts)(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{\omega_1^2}{AT}\varepsilon^{-t/T} + \frac{\omega_1^3}{D\sqrt{A}}\sin(\omega_1 Dt-\phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_1 D}{C} - 2\tan^{-1} \frac{D}{-d}$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|--------|--|--|
| -0121B | $\frac{s}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+s^2/\omega_1^2)}$ | $\frac{T_1\omega_1^2}{B_1(T_2-T_1)}\epsilon^{-t/T_1} + \frac{T_2\omega_1^2}{B_2(T_1-T_2)}\epsilon^{-t/T_2}$ $+ \frac{\omega_1^2\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1B_2}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + \tan^{-1}T_2\omega_1$ |
| -0122B | $\frac{s^2}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ $\times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)} + \frac{\omega_1^2\epsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)}$ $\frac{\omega_1^3\sin(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1B_2}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + \tan^{-1}T_2\omega_1$ |
| -0123B | $\frac{s^3}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ $\times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{B_1T_1(T_2-T_1)} + \frac{\omega_1^2\epsilon^{-t/T_2}}{B_2T_2(T_1-T_2)}$ $\frac{\omega_1^4\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1B_2}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + \tan^{-1}T_2\omega_1$ |
| -0131B | $\frac{s}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ $\times (1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{T_1^2\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{B_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} - \frac{T_2^2\omega_1^2\epsilon^{-t/T_2}}{B_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $- \frac{T_3^2\omega_1^2\epsilon^{-t/T_3}}{B_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)} + \frac{\omega_1^2\cos(\omega_1 t - \phi)}{\sqrt{B_1B_2B_3}}$ $\phi = \tan^{-1}T_1\omega_1 + \tan^{-1}T_2\omega_1 + \tan^{-1}T_3\omega_1$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|--------|--|--|
| -0201A | $\frac{s}{(1+2d_1s/\omega_1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2d_2s/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2^2\varepsilon^{-d_1\omega_1 t}}{D_1\sqrt{K_1}}\sin(\omega_1 D_1 t - \phi_1) + \frac{\omega_1^2\omega_2^2\varepsilon^{-d_2\omega_2 t}}{D_2\sqrt{K_2}}\sin(\omega_2 D_2 t - \phi_2)$ $\phi_1 = -\tan^{-1}\frac{D_1}{-d_1} + \tan^{-1}\frac{2\omega_1 D_1 H}{-(G+2d_1\omega_1 H)}$ $\phi_2 = -\tan^{-1}\frac{D_2}{-d_2} - \tan^{-1}\frac{2\omega_2 D_2 H}{G+2d_2\omega_2 H}$ |
| -0201C | $\frac{s}{(1+s^2/\omega_1^2)} \times (1+2ds/\omega_2+s^2/\omega_2^2)$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\sqrt{G^2+J^2}}\left\{\cos(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{\varepsilon^{-d\omega_2 t}}{D}\sin(\omega_2 D t - \phi_2)\right\}$ $\phi_1 = \tan^{-1}\frac{J}{-G}$ $\phi_2 = -\tan^{-1}\frac{D}{-d} - \tan^{-1}\frac{2d\omega_2^2 D}{G+2d^2\omega_2^2}$ |
| -0201D | $\frac{s}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{-\omega_1^2\omega_2^2}{G}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$ |
| -0201E | $\frac{s}{(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $\frac{\omega_1^3}{2}t\sin\omega_1 t$ |

| No. | F(s) | f(t) |
|--------|--|---|
| -0202D | $\frac{s^2}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{G}(\omega_1\sin\omega_1 t - \omega_2\sin\omega_2 t)$ |
| -0202E | $\frac{s^2}{(1+s^2/\omega_1^2)^2}$ | $\frac{\omega_1^3}{2}(\sin\omega_1 t + \omega_1 t \cos\omega_1 t)$ |
| -0203D | $\frac{s^3}{(1+s^2/\omega_1^2)(1+s^2/\omega_2^2)}$ | $\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{G}(\omega_1^2\cos\omega_1 t - \omega_2^2\cos\omega_2 t)$ |
| -1031A | $\frac{s(1+as)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ | $\frac{(a-T_1)\epsilon^{-t/T_1}}{T_1(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{(a-T_2)\epsilon^{-t/T_2}}{T_2(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$ $+ \frac{(a-T_3)\epsilon^{-t/T_3}}{T_3(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| -2121A | $\frac{s(1+as+bs^2)}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ $\times(1+2ds/\omega_1+s^2/\omega_1^2)$ | $\frac{M_1\omega_1^2\epsilon^{-t/T_1}}{A_1T_1(T_2-T_1)} + \frac{M_2\omega_1^2\epsilon^{-t/T_2}}{A_2T_2(T_1-T_2)}$ $+ \omega_1^2\left[\frac{Y^2+\omega_1^2D^2N^2}{A_1A_2}\right]^{\frac{1}{2}}\epsilon^{-d\omega_1 t}\sin(\omega_1Dt-\phi)$ $\phi = -\tan^{-1}\frac{D}{-d} + \tan^{-1}\frac{T_1\omega_1D}{C_1}$ $+ \tan^{-1}\frac{T_2\omega_1D}{C_2} + \tan^{-1}\frac{\omega_1DN}{Y}$ |

MEMO

検印省略

ラプラス変換とシグナルフロー・グラフ 定価 1,800 円

昭和 50 年 11 月 15 日 発行
昭和 62 年 8 月 1 日 増補 1

©著者 中川馨
松田稔
発行 者 原田守

印刷所 (株)工友会印刷

製本所 秋山製本所

発行所

株式会社 パワー社

〒171 東京都豊島区長崎 3-29-2

振替口座 東京 3-164767 番
TEL 東京 03 (972) 6811 (代)

ISBN4-8277-2016-9