

# ベクトル解析

西尾和弘

吉井書店

# は し が き

本書は、大学理工系（とくに工学部）初年級用のベクトル解析のテキストである。

線形代数と微積分とが、美しく融合されたベクトル解析（Vector Analysis）は、本来は19世紀末に、電磁気学、流体力学、熱力学などのために生まれた応用数学であったが、今では、当時の古典的なスタイルから、多様体上の微積分として現代化されたスタイルに至る、さまざまな取扱い方がなされている。

本書では、内容をしぼり、古典的な取扱いにより、初学者が、短期間（半年程度の講義）で、ベクトル解析において、もっとも基本的な、勾配・発散・回転の概念を把握し、また、線積分・面積分について、ひとつおりの知識を習得することを目標としている。

本書による学習上の前提としては、簡単な行列式、微積分および微分方程式の知識を必要とするが、これらについては、同時出版される

飯尾 力・堀田和久共著『微分方程式』（吉井書店）

を参照されれば十分である。

本書に続く内容の参考書としては、

岩堀長慶著『ベクトル解析』（裳華房）

などを勉強されるとよいであろう。

終りに、本書の執筆にあたり、終始緊密な御協力を頂いた飯尾力氏をはじめ、いろいろと貴重な御助言を頂いた、関東学院大学工学部数学教室の関谷昭氏、塩原浩氏、堀田和久氏と、本書出版に際し、ひとかたならずお世話になった集文社・吉井書店の吉井克明氏に、深甚なる謝意を表する次第である。

1985年1月

著 者

# 目 次

はしがき

第 I 章	ベクトルの代数	1
§ 1	ベクトル	1
	スカラーとベクトル (1)	ベクトル (1)
	ベクトルの和とスカラー倍 (2)	正射影 (3)
	ベクトルの成分 (5)	
§ 2	ベクトルの内積と外積	7
	内積 (スカラー積) (7)	外積 (ベクトル積) (9)
	スカラー 3 重積 (13)	
§ 3	面積ベクトル	17
	面積ベクトル (17)	柱体の体積 (19)
問題 I		21
第 II 章	ベクトルの微積分	22
§ 1	ベクトルの微積分	22
	ベクトル関数 (22)	ベクトル関数の導関数 (23)
	高次導関数 (27)	偏導関数 (28) 微分・全微分 (29)
	ベクトル関数の積分 (30)	
§ 2	空間曲線	33
	空間曲線の長さ (33)	曲率とねじれ率 (36)
	点の運動 (39)	
§ 3	曲面積	42
	曲面の面積 (42)	
問題 II		47

第Ⅲ章 勾配・発散・回転 .....	49
§ 1 スカラー場とベクトル場 .....	49
スカラー場とベクトル場 (49)	スカラー場の等位面 (49)
ベクトル場の流線 (50)	方向微分係数 (51)
§ 2 勾配 .....	53
スカラー場の勾配 (53)	
§ 3 発散 .....	58
ベクトル場の発散 (58)	
§ 4 回転 .....	63
ベクトル場の回転 (63)	
§ 5 ポテンシャル .....	69
勾配・発散・回転の合成 (69)	
ポテンシャルとベクトル・ポテンシャル (71)	
問題Ⅲ .....	75
第Ⅳ章 線積分と面積分 .....	76
§ 1 線積分 .....	76
定積分と線積分 (76)	平面上の線積分 (78)
空間における線積分 (79)	ベクトルの線積分 (81)
その他の線積分 (84)	
§ 2 面積分 .....	86
スカラーの面積分 (86)	ベクトルの面積分 (89)
その他の面積分 (91)	
§ 3 積分定理 .....	93
発散定理 (93)	ストークスの定理 (96)
グリーンの定理 (98)	その他の積分公式 (99)
勾配・発散・回転の積分表示 (101)	付. 平均値の定理 (103)

問題IV .....	105
問題解答 .....	106
索引 .....	113
人名 .....	116

# 第 I 章 ベクトルの代数

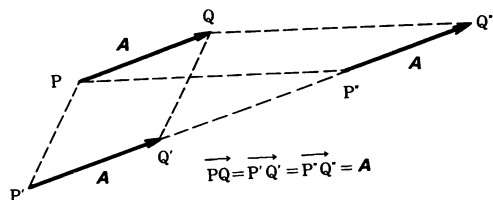
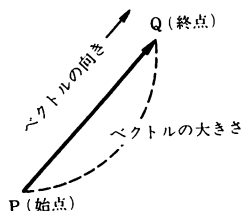
## § 1 ベクトル

### スカラーとベクトル

長さ、面積、体積、質量、温度などのように、（それらを測る単位を指定するとき、）その大きさを示す1つの実数だけで表現することができる量をスカラー (scalar) とよぶ。(本書では、単に実数のことをスカラーということもある。) これに対して、速度、加速度、力、変位 (点の位置の変化) などのように、大きさを示す1つの実数 ( $\geq 0$ ) のほかに、向きをもつ量をベクトル (vector) という。

### ベクトル

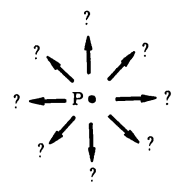
幾何学的には、空間における2点  $P$ ,  $Q$  を結ぶ線分に、 $P$  から  $Q$  への (矢じるしで示す) 向きをつけたものを、 $P$  を始点、 $Q$  を終点とするベクトルといい、記号  $\overrightarrow{PQ}$  で表わす。なお、 $\overrightarrow{PQ}$  の大きさとは、線分  $PQ$  の長さのことである。始点が異っていても、同じ大きさで、同じ向きのベクトルは等しいものとみなす。



ベクトルを1つの文字で表わすときは、肉太の文字 ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\dots$  など) を使い、これに対して、スカラーには、細文字 ( $A$ ,  $B$ ,  $\dots$ ,  $S$ ,  $\dots$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\dots$ ,  $r$ ,  $\dots$  など) を用いる。

2 第I章 ベクトルの代数

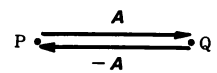
ベクトル  $\mathbf{A}$  の大きさは、負でないスカラーであるが、これを  $|\mathbf{A}|$  で表わす。大きき 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ。また大きき 0 のベクトルを零ベクトルといい、 $\mathbf{0}$  で表わす。零ベクトルの向きは、必要に応じて任意としておく。



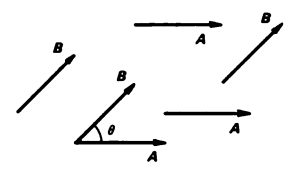
$\mathbf{A}$  と大ききが等しく、逆向きのベクトルを  $-\mathbf{A}$  で表わす。すなわち、 $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$  とすれば、 $-\mathbf{A} = \overrightarrow{QP}$  である。

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{PP}$$

2つのベクトル  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  の (向き) のなす角は、 $0$  から  $\pi$  ( $0^\circ$  から  $180^\circ$ ) までの範囲で計ることとするが、これを  $\angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  で表わすことにする。



$\angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0^\circ$  または  $180^\circ$ 、すなわち、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  が同じ向きをもつか、または逆向きであることを、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は平行であるといい、 $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$  で表わす。



$$\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

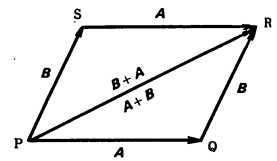
$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$

また、 $\angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 90^\circ$  のとき、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は垂直であるといい、 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  で表わす。

ベクトルの和とスカラー倍

2つのベクトル  $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ ,  $\mathbf{B} = \overrightarrow{QR}$  に対して、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  の和を

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \overrightarrow{PR}$$



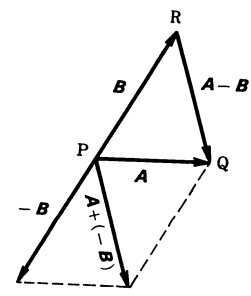
で定義する。このとき、平行4辺形 PQRS (つぶれて P, Q, R, S が同一直線上にある場合もふくむ) を考えれば、

①  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

となることがわかる。つまり、 $\mathbf{A} + \mathbf{B} (= \mathbf{B} + \mathbf{A})$  は、 $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ ,  $\mathbf{B} = \overrightarrow{PS}$  を2辺とする平行4辺形 PQRS の対角線  $\overrightarrow{PR}$  であるということもできる。

なお、 $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$  のことを

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}$$



と書き、 $A$ と $B$ の差という。 $A = \overrightarrow{PQ}$ ,  $B = \overrightarrow{PR}$ とすれば、 $A - B = \overrightarrow{RQ}$ である。

実数(スカラー) $c$ とベクトル $A$ に対して  
その積(ベクトルのスカラー倍)

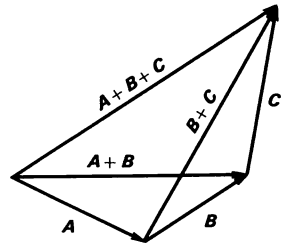
$$cA$$

をつぎのような、大きさ $|c||A|$ をもつベクトルとして定義する。

- (イ)  $c > 0$  ならば $A$ と同じ向きで、大きさ $c|A|$ のベクトル
- (ロ)  $c < 0$  ならば $A$ と逆向きで、大きさ $(-c)|A|$ のベクトル
- (ハ)  $c = 0$  ならば $0$ (零ベクトル)

ベクトルの和とスカラー倍について、つぎのような関係がある。(  $A, B, C$  はベクトル,  $a, b, c$  はスカラー.) 図を描いて確かめてみること。(ここでは、②の図だけ示しておく.)

- ②  $(A+B)+C = A+(B+C)$  ( $=A+B+C$  とかく)
- ③  $0+A = A+0 = A$
- ④  $A+(-A) (=A-A) = 0$
- ⑤  $1A = A, (-1)A = -A$
- ⑥  $c(A+B) = cA + cB$
- ⑦  $(a+b)A = aA + bA$
- ⑧  $(ab)A = a(bA)$



また、ベクトルの大きさについては、つぎの不等式が成り立つ。

$$\textcircled{9} \quad |A+B| \leq |A| + |B|, \quad |A+B+C| \leq |A| + |B| + |C|$$

### 正射影

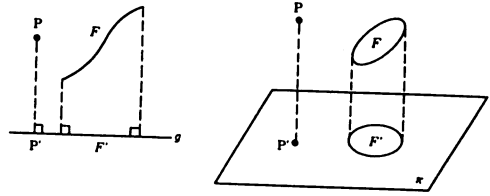
1点 $P$ から直線 $g$ または平面 $\pi$ に下した垂線の足 $P'$ を、 $P$ の $g$ または $\pi$ 上への正射影という。(  $P$ が最初から $g$ または $\pi$ 上であれば、その正射影は $P$ 自身である.) また、図形 $F$ 上のすべての点の、 $g$ または $\pi$ 上への正射影全体でできる図



4 第1章 ベクトルの代数

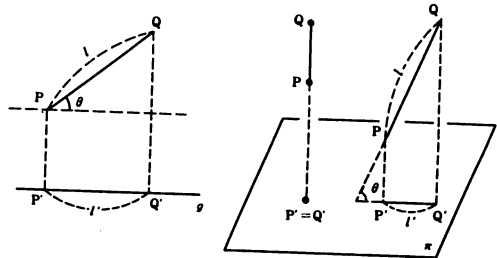
形  $F'$  を,  $F$  の  $g$  または  $\pi$  の上への正射影という.

とくに長さ  $l$  の線分  $PQ$  の  $g$  または  $\pi$  上への正射影が, 長さ  $l'$  の線分  $P'Q'$  (1点  $P'=Q'$  となるときは  $l'=0$ ) となるとき,  $PQ$  と  $P'Q'$  とのなす角を  $\theta$  とすれば,

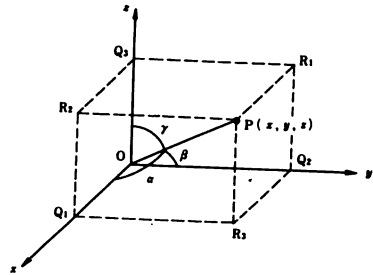


⑩  $l' = l \cos \theta$

の関係がある. なお, 有向線分の有向直線上への正射影の場合は負の長さも扱い,  $0 \leq \theta \leq \pi$  とする.



直交座標系  $O - xyz$  において, 点  $P(x, y, z)$  の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸;  $yz$  平面,  $zx$  平面,  $xy$  平面上への正射影を, それぞれ  $Q_1(x, 0, 0)$ ,  $Q_2(0, y, 0)$ ,  $Q_3(0, 0, z)$ ;  $R_1(0, y, z)$ ,  $R_2(x, 0, z)$ ,  $R_3(x, y, 0)$  とするとき, たとえば, 有向線分  $OP$  の  $x$  軸への正射影



は  $OQ_1$ ,  $xy$  平面への正射影は  $OR_3$  などである.  $OP$  の長さを  $r$  とし,  $OP$  が  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸の正の向きとなす角を, それぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とすれば,

⑪  $x = r \cos \alpha, y = r \cos \beta, z = r \cos \gamma$

であり, また

$$r^2 = OP^2 = OR_3^2 + R_3P^2 = OQ_1^2 + Q_1R_3^2 + R_3P^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

より

$$(12) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(13) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

が得られる.

### ベクトルの成分

空間に右手系直交座標系  $O-xyz$  を固定する. 右手系とは, 右手の親指, 人差し指, 中指を互いに垂直になるようにしたとき,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸の正の向きが, それぞれ親指, 人差し指, 中指のさす向きで表わされることをいう. この  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸の正の向きをもつ単位ベクトルを, それぞれ  $i, j, k$  で表わし, 基本ベクトルとよぶ.

いま,  $i, j, k$  の始点を原点  $O$  にとれば, 終点の座標は, それぞれ  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  で与えられる. 一般に, 始点を原点  $O$  に固定したベクトル  $r = \overrightarrow{OP}$  を, 点  $O$  に対する  $P$  の位置ベクトルといい, その終点  $P$  の位置を表わすために用いられる. 点  $P$  の座標が  $(x, y, z)$  であるとき,  $P$  の  $x$  軸および  $xy$  平面への正射影を, それぞれ  $Q(x, 0, 0)$ ,  $R(x, y, 0)$  とすれば,  $\overrightarrow{OQ} = xi$ ,  $\overrightarrow{QR} = yj$ ,  $\overrightarrow{RP} = zk$  であり,  $r = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$  であるから,

$$(14) \quad r = xi + yj + zk$$

が得られる.

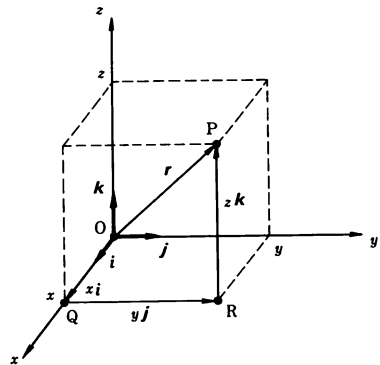
一般のベクトル  $A$  に対しても, その始点を  $O$  にとるときの終点  $A$  は一意的に定まり, その座標を  $(A_x, A_y, A_z)$  とするとき,  $A_x, A_y, A_z$  を, それぞれ  $A$  の  $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分とよぶ.

もちろん,

$$(15) \quad A = A_x i + A_y j + A_z k$$

であるが, このことを簡単に,

$$A = (A_x, A_y, A_z)$$

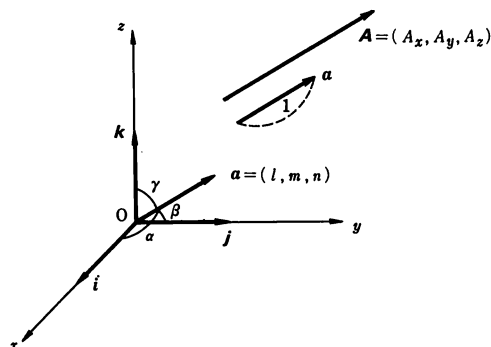


とも書く.

$\mathbf{A} (\neq \mathbf{0})$  と同じ向き の 単位ベクトル  
を

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

とするとき, その成分  $(l, m, n)$  を  
 $\mathbf{A}$  の方向余弦という.  $-\mathbf{A}$  の方向余弦  
は  $(-l, -m, -n)$  である.



$\mathbf{A}$  (したがって  $\mathbf{a}$ ) と  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とのなす角を, それぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とすれば

$$\textcircled{16} \quad l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$

$$\textcircled{17} \quad A_x = |\mathbf{A}| \cos \alpha, \quad A_y = |\mathbf{A}| \cos \beta, \quad A_z = |\mathbf{A}| \cos \gamma$$

である.

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , スカラー  $c$  に対して, ベクトルの  
和とスカラー倍などは, つぎのような成分をもつ.

$$\textcircled{18} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$\textcircled{19} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

$$\textcircled{20} \quad c\mathbf{A} = (cA_x, cA_y, cA_z), \quad -\mathbf{A} = (-A_x, -A_y, -A_z)$$

問1 4面体 ABCD において  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$  を証明せよ.

問2 正六角形  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  において  $\overrightarrow{P_1 P_2} = \mathbf{a}, \overrightarrow{P_2 P_3} = \mathbf{b}$  とするとき,  
他のベクトル  $\overrightarrow{P_i P_j} (i < j)$  をすべて  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  で表わせ.

問3  $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$  とする.

(1)  $\mathbf{A} + 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$  および  $\frac{1}{3}(5\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})$  を求めよ.

(2)  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  の方向余弦を求めよ.

§ 2 ベクトルの内積と外積

内積（スカラー積）

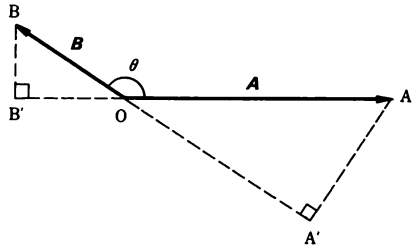
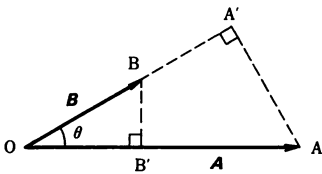
2つのベクトル  $A, B$  に対して、 $\angle(A, B) = \theta$  とするとき、

①  $A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$

を  $A, B$  の内積またはスカラー積といい、 $A \cdot B$  のかわりに  $(A, B)$  で表わすこともある。ベクトルの内積はスカラーである。

いま、 $A = \overrightarrow{OA}$ 、 $B = \overrightarrow{OB}$  とし、点  $A$  の直線  $OB$  上への正射影を  $A'$ 、点  $B$  の直線  $OA$  上への正射影を  $B'$  とすれば、

$$A \cdot B = \begin{cases} OA' \cdot OB = OA \cdot OB' & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ -OA' \cdot OB = -OA \cdot OB' & (\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi) \end{cases}$$



とくに、

$$A \parallel B \Rightarrow A \cdot B = \pm OA \cdot OB \quad (+ \text{は } \theta = 0, - \text{は } \theta = \pi \text{ のとき})$$

また、

②  $A \perp B \iff A \cdot B = 0$

の関係は重要である。

定義から明らかに、

③  $A \cdot B = B \cdot A$

④  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

⑤  $A \cdot A = |A|^2 (= A^2 \text{ と書くことがある}), |A| = \sqrt{A \cdot A}$

$$\textcircled{6} \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \quad (\mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0}, \theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$$

その他, ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  およびスカラー  $c$  について, つぎの関係がある.

$$\textcircled{7} \quad (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\textcircled{8} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

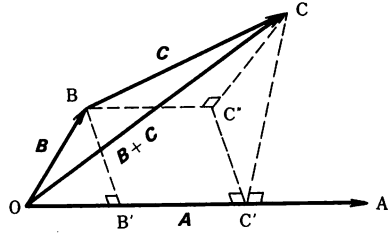
$$\textcircled{9} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$\textcircled{9}$ は, たとえば, 右の図の場合には,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \text{OA} \cdot \text{OC}'$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{OA} \cdot \text{OB}'$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \text{OA} \cdot \text{B}'\text{C}'$$



であることからわかる.

つぎに, 2つのベクトルの内積を, それらの成分を用いて表わしてみよう. まず, 基本ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は, 互いに垂直な単位ベクトルであるから,

$$\textcircled{10} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

である. よって,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  の内積は,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + A_x A_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + A_y B_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + A_z B_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

すなわち,

$$\textcircled{11} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

である. これから, つぎの公式が直ちに得られる.

$$\textcircled{12} \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\textcircled{13} \quad \max\{|A_x|, |A_y|, |A_z|\} \leq |\mathbf{A}| \leq |A_x| + |A_y| + |A_z|$$

$$\textcircled{14} \quad \cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (\mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0})$$

$$\quad (\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$$

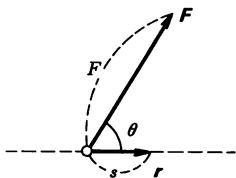
$$\textcircled{15} \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \iff A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

⑯  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x, \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y, \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z$

なお、一般の単位ベクトル  $\mathbf{u}$  に対しても、内積  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = A_u$  を  $\mathbf{A}$  の  $\mathbf{u}$  成分ということがある。

例1 力のなす仕事

質点（物体をその大きさ、形状を無視して、単に質量を持つ点とみなしたもの）に、大きさ  $F$  (dyne) の力が作用して、その力の向きに距離  $s$  (cm) だけ動くとき、この力が質点になす仕事は  $W = Fs$  (erg) である。



一般に、質点が、力  $\mathbf{F}$  (大きさ  $F$ ) に作用されて、変位  $\mathbf{r}$  (大きさ  $s$ ) の移動をするとき、 $\mathbf{F}$  のなす仕事  $W$  は、つぎの内積で与えられる。

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = Fs \cos \theta \quad (\theta \text{ は } \mathbf{F}, \mathbf{r} \text{ のなす角})$$

外積 (ベクトル積)

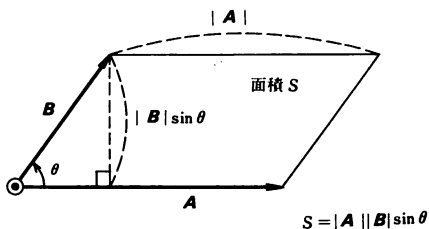
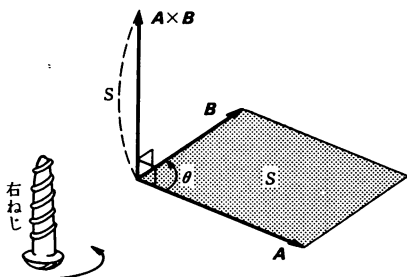
2つのベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に対して、つぎの大きさと向きをもつベクトルを、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の外積またはベクトル積といい、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  または  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  で表わす。

- (イ) 大きさ ……  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  を2辺とする平行4辺形の面積。
- (ロ) 向き …… (イ)の平行4辺形に垂直で、 $\mathbf{A}$  を  $180^\circ$  以内回転して  $\mathbf{B}$  に重ねるとき、同じ回転によって右ねじの進む向き。

したがって、

⑰  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$

⑱  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{A}, \mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{B}$



外積については、つぎの関係がある。

⑰  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

⑱  $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

㉑  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

㉒  $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$

さらに、ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  とスカラー  $c$  について

㉓  $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

㉔  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

㉕  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

が成り立つ。㉔、㉕のうち、一方が証明されれば、他方は直ちに導かれる。

(㉕の証明)

$\mathbf{A} = \overrightarrow{OA}$ ,  $|\mathbf{A}| = a$  として、 $O$  を通り  $\mathbf{A}$  に垂直な平面  $\pi$  をとる。  $\mathbf{B} = \overrightarrow{OB}$  に対し、 $B$  の  $\pi$  上への正射影を  $B'$  とし、 $\mathbf{A}$  を上からみて  $OB'$  を左まわりに  $90^\circ$  回転して  $a$  倍したものを  $OB''$  とおけば、図の平行4辺形  $OAEB$ , 長方形  $OAE'B'$  の面積はともに  $a \cdot OB'$  であるから

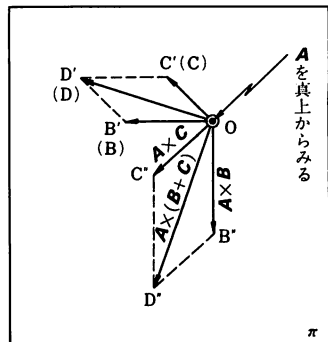
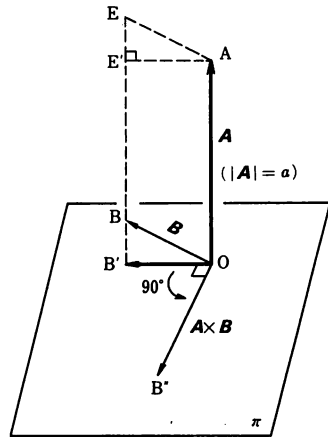
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB''}$$

である。同様に  $\mathbf{C} = \overrightarrow{OC}$ ,  $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \overrightarrow{OD}$  とし、 $OC$ ,  $OD$  の  $\pi$  上への正射影  $OC'$ ,  $OD'$  を  $90^\circ$  回転して  $a$  倍したものを、それぞれ  $OC''$ ,  $OD''$  とすれば、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC''}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD''}$$

である。ところで、4辺形  $OB''D''C''$  は平行4辺形  $OB'D'C'$  ( $OBDC$  の  $\pi$  上への正射影) に相似であるから、やはり平行4辺形であり、



$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$  すなわち

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

が成り立つ。

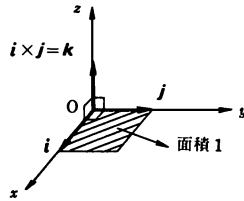
(24 の証明)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -(\mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \end{aligned}$$

### 外積の成分

右手系直交座標系  $O-xyz$  の基本ベクトル  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  の間の外積は

$$\textcircled{26} \begin{cases} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \end{cases}$$



であるから,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  に対しては,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + A_y B_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + A_z B_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

この結果を行列式のような形で表わしておく覚えやすい。

$$\begin{aligned} \textcircled{27} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$



これから、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  を2辺にもつ平行4辺形の面積は

$$\textcircled{28} \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \\ = \sqrt{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2}$$

で与えられる. また,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  を2辺にもつ3角形の面積は, この半分である.

例2  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  を2辺とする平行4辺形の面積は, つぎの式で求めることもできる.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &= \sqrt{|\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2} \\ &= \sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2} \end{aligned}$$

(証明)  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$

$$\begin{aligned} &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi \text{ で } \sin \theta \geq 0) \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \right)^2} \\ &= \sqrt{|\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2} \end{aligned}$$

例3 2つのベクトル

$$\mathbf{A} = \sqrt{3} \mathbf{i} - \sqrt{6} \mathbf{j} + \sqrt{2} \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{6} \mathbf{j} - \sqrt{3} \mathbf{k}$$

について, いろいろと調べてみよう.

(i) それぞれの大きさ  $|\mathbf{A}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$ ,

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{11}$$

(ii) 内積  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sqrt{3} \sqrt{2} + (-\sqrt{6}) \sqrt{6} + \sqrt{2} (-\sqrt{3}) = -6$

(iii) 外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= \{(-\sqrt{6})(-\sqrt{3}) - \sqrt{2} \sqrt{6}\} \mathbf{i} \\ &\quad + \{\sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{3}(-\sqrt{3})\} \mathbf{j} + \{\sqrt{3} \sqrt{6} - (-\sqrt{6}) \sqrt{2}\} \mathbf{k} \\ &= (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \mathbf{i} + 5 \mathbf{j} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

(iv)  $\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  とするとき,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{-6}{\sqrt{11} \sqrt{11}} = -\frac{6}{11} = -0.54\dot{5}$$

数表によれば、 $\theta = 123^\circ 03'$  であることがわかる。

(v)  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  を2辺とする(2等辺)3角形の面積  $S$

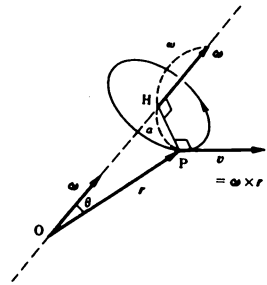
$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{11})^2 (\sqrt{11})^2 - (-6)^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

(vi)  $\mathbf{A}$  にも  $\mathbf{B}$  にも垂直な ( $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  と同じ向きをもつ) 単位ベクトル  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{85}} \{ (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \mathbf{k} \} \end{aligned}$$

#### 例4 角速度

剛体(力が加えられても変形しない物体)がある軸のまわりに回転しているときの角速度を、その大きさ(回転角の時間に対する変化率)  $\omega$  と、同じ回転により右ねじが進む向きをもつベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  で表わす。



この回転によって、回転軸上の点  $H$  を中心とし、半径  $a$  の円周上を動いている(剛体内の)点  $P$  の速度を、大きさ  $a\omega$  で半径  $HP$  に垂直な(進行方向への)向きをもつベクトル  $\mathbf{v}$  で表わし、回転軸上の点  $O$  に対する点  $P$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  とするとき

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

の関係がある。何故ならば、 $\angle(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \theta$  とすれば

$$|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin \theta = \omega a$$

であり、また、 $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ 、 $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$  で、 $\mathbf{v}$  は  $\boldsymbol{\omega}$  を  $\theta$  だけ回転して  $\mathbf{r}$  の上に重ねるとき、右ねじの進む向きをとるからである。

#### スカラー3重積

3つのベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  に対して、内積と外積を組合せた

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

は、どちらをとっても、結局同じスカラーとなることが、すぐあとに示される。  
いずれも  $A, B, C$  のスカラー 3 重積といい、 $[ABC]$  (グラスマンの記号) または  $|ABC|$  で表わす。すなわち、

$$\textcircled{29} \quad [ABC] = A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$$

である。

いま、 $A = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $B = (B_x, B_y, B_z)$ ,  $C = (C_x, C_y, C_z)$

とすれば、

$$\begin{aligned} & A \cdot (B \times C) \\ &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot \left( \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} k \right) \\ &= A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \\ &= A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ & (A \times B) \cdot C = C \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

よって、

$$\textcircled{30} \quad [ABC] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

また、つぎの関係がある。

$$\begin{aligned} \textcircled{31} \quad [ABC] &= [BCA] = [CAB] \\ &= -[ACB] = -[BAC] = -[CBA] \end{aligned}$$

例5 (i)  $[ijk] = 1$

(ii)  $[AB0] = 0$

(iii)  $[ABB] = 0$

(証明)

(i)  $i \cdot (j \times k) = i \cdot i = 1$

(ii)  $(A \times B) \cdot 0 = 0$

(iii)  $A \cdot (B \times B) = A \cdot 0 = 0$

もちろん、行列式を用いて証明してもよい。(各自試みよう.)

つぎに、スカラー3重積の幾何学的意味を考えてみよう。

いま、 $A = \overrightarrow{OA}$ ,  $B = \overrightarrow{OB}$ ,  $C = \overrightarrow{OC}$  を3辺とする平行6面体の体積を  $V$  とし、 $OA$ ,  $OB$  を2辺とする平行4辺形の面積を  $S$ ,  $C$  から平面  $OAB$  に下した垂線の長さを  $h$  とするとき、

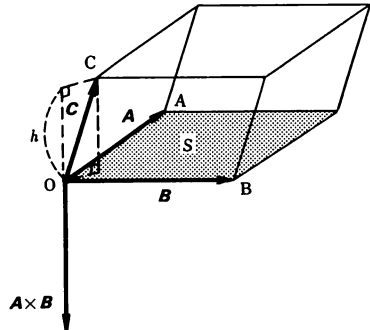
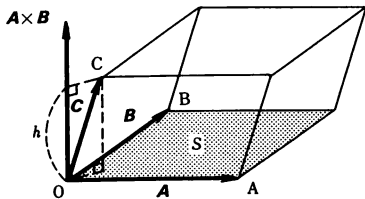
$$\begin{aligned} [ABC] &= (A \times B) \cdot C \\ &= |A \times B| |C| \cos \theta \\ &= S \cdot (\pm h) \\ &= \pm V \end{aligned}$$

ただし、 $\theta = \angle(A \times B, C)$  で、複号は  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき+,  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  のとき-

をとる。すなわち

$$\textcircled{2} \quad |[ABC]| = V$$

が得られる。なお、§3で述べるように、負の体積も扱うことにすれば、左辺の絶対値をはずしてよい。



問4  $A \cdot B$  および  $A \times B$  を求めよ.

(1)  $A = 4i - 3j, B = 2j + k$

(2)  $A = 8i + 9j + 10k, B = 6i - 2j + 7k$

(3)  $A = i \cos \alpha + j \sin \alpha, B = -i \sin \alpha + j \cos \alpha$

(4)  $A = i \sin \theta \cos \varphi + j \cos \theta \cos \varphi - k \sin \varphi$

$$B = i \sin \theta \sin \varphi + j \cos \theta \sin \varphi + k \cos \varphi$$

問5  $A, B$  のなす角  $\theta$ , および  $A, B$  の双方に垂直な単位ベクトルを求めよ.

(1)  $A = i - j + k, B = i + j - k$

(2)  $A = 4i + 2j + 2k, B = 3i + 6j - 3k$

(3)  $A = 3i + 2j - 4k, B = 2i + 7j + 5k$

問6  $A = -i + 2j + 3k$

$$B = 2i - 3j + k$$

$$C = 3i + j - 2k$$

$$D = 3i + 2j + k$$

について, つぎの計算をおこなえ.

(1)  $[ABC]$

(2)  $A \times (B \times C)$

(3)  $(A \times B) \times C$

(4)  $(A \times B) \cdot (C \times D)$

(5)  $(A \times B) \times (C \times D)$

(6)  $(A \times B) \times (B \times C)$

(7)  $[A \quad A+B \quad A+B+C]$

(8)  $[A \times B \quad B \times C \quad C \times A]$

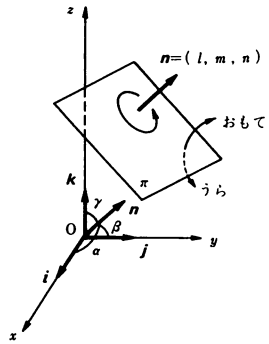
(9)  $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B)$

### § 3 面積ベクトル

#### 面積ベクトル

1つの平面に対して、そのおもてとうらとを定めたものを有向平面という。有向平面であることを示すために、平面上に回転の向きを図示することがある。これが正の回転（左まわり）に見える方が、おもてである。

有向平面  $\pi$  に垂直で、その平面の正の向きをもつ（うらからおもてに向かう）単位ベクトル



$$\textcircled{1} \quad \mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とのなす角)

を平面  $\pi$  の単位法線ベクトルといい、 $\mathbf{n}$  の方向余弦

$$(l, m, n) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

を平面  $\pi$  の方向余弦という。

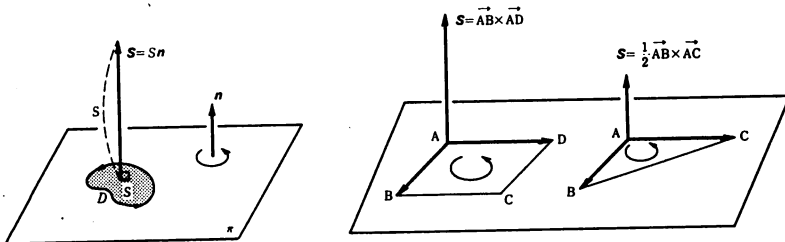
有向平面  $\pi$  上に、面積  $S$  の図形  $D$  があるとき、ベクトル

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{S} = S\mathbf{n}$$

を  $D$  の面積ベクトルという。

たとえば、平行4辺形 ABCD (左まわり) の面積ベクトルは  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$  であり、

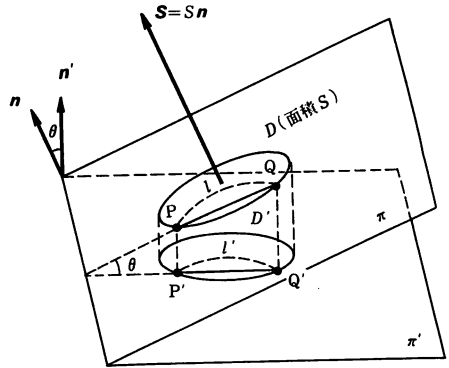
3角形 ABC (左まわり) の面積ベクトルは  $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  である。



有向線分の長さのときのように、有向平面上の図形の面積にも正負の区別をつけることがある。もちろん、平面と図形の向き（おもてとうら）が一致するとき正、逆のとき負と考えるのである。

2つの有向平面  $\pi, \pi'$  に対して  $\pi$  上の面積  $S$  の図形  $D$  の  $\pi'$  上への正射影を  $D'$  とし、その面積を  $S'$  とする。 $\pi, \pi'$  のなす角、すなわち、それぞれの単位法線ベクトル  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  のなす角を  $\theta$  とすれば、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad S' &= S \cos \theta \\ &= S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}' \end{aligned}$$



の関係がある。（ $\pi, \pi'$  の双方に直交する平面と、 $D, D'$  の交わりの対応する部分の長さ  $l, l'$  の間に  $l' = l \cos \theta$  の関係があるから。）つまり、 $S'$  は  $D$  の面積ベクトル  $\mathbf{S}$  の  $\mathbf{n}'$  成分である。

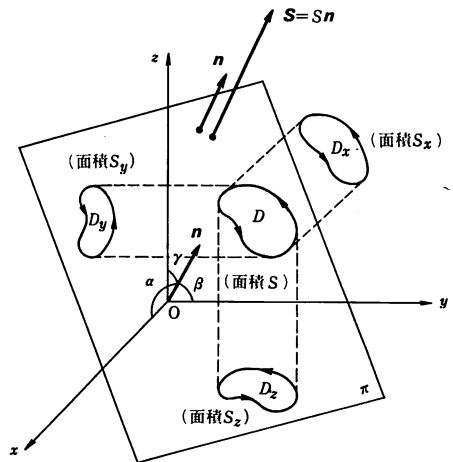
とくに、方向余弦が  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  である平面  $\pi$  上の図形  $D$  の  $yz$  平面、 $zx$  平面、 $xy$  平面（単位法線ベクトルは、それぞれ  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ）上への正射影  $D_x, D_y, D_z$  の面積

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} S_x = \mathbf{S} \cdot \mathbf{i} = S \cos \alpha \\ S_y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{j} = S \cos \beta \\ S_z = \mathbf{S} \cdot \mathbf{k} = S \cos \gamma \end{cases}$$

は、それぞれ  $\mathbf{S}$  の  $x$  成分、 $y$  成分、 $z$  成分となり、

$$\textcircled{5} \quad \mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z) = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} + S_z \mathbf{k}$$

である。



柱体の体積

有向平面上の図形  $D$  を底面にもち、ベクトル  $\mathbf{A}$  を母線とする柱体で、 $D$  の面積ベクトルを  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  とし、 $\angle(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \theta$  とすれば、

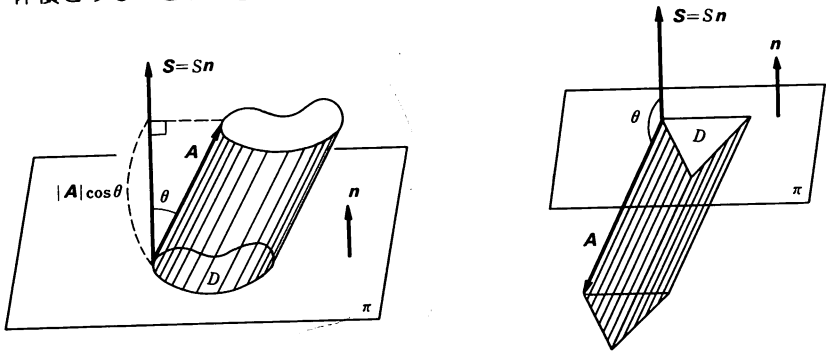
$$\textcircled{6} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{A}| |\mathbf{S}| \cos \theta = S \cdot |\mathbf{A}| \cos \theta$$

となるが、 $|\mathbf{A}| \cos \theta$  はこの柱体の高さであるから、柱体の体積  $V$  は

$$V = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$$

で表わされることになる。ただし、ここでは、負の体積も扱うことにする。 $\theta$  が鈍角のとき  $V < 0$  である。

スカラー3重積  $[ABC]$  も、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  を3辺にもつ平行6面体の(符号付きの)体積とみることができる。

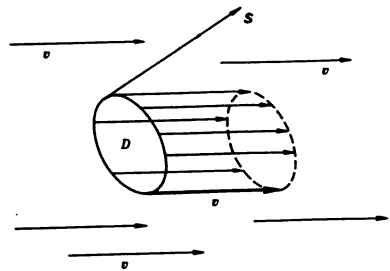


例6 水の流量

一様な水の流れの速度の(大きさと同じ向きをもつ)ベクトルを  $\mathbf{v}$  とする。この水の流れの中に、面積ベクトル  $\mathbf{S}$  をもつ平面領域  $D$  があるとき、内積  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$  は、単位時間内に  $D$  のうらからおもてへ通過する水の体積(単位時間当りの流量)  $V$  を表わす。すなわち、

$$V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$$

である。





例7 四面体の各面の（内から外に向けた）

面積ベクトルの和は  $\mathbf{0}$  である。

（証明）四面体を  $P_1P_2P_3P_4$  とし、頂点  $P_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) の対面の面積ベクトルを  $\mathbf{S}_i$  とする。なお、 $P_1, P_2, P_3$  は外から見て左まわりの順に並ぶようにしておく。

$$P_i P_j = \mathbf{r}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

とおけば、

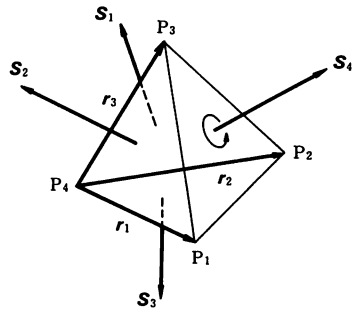
$$\begin{aligned} \mathbf{S}_4 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 \\ &= -\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4 = \mathbf{0}$$

（注意）一般に、任意の（凸）多面体において、各面の（外向きの）面積ベクトルの和は  $\mathbf{0}$  である。その理由を、たとえば4角すい（1つの4角形と4つの3角形で囲まれた5面体）を2つの四面体に分割して考えてみよう。なお、直方体であれば、6つの四面体に分割すればよい。

問7 つぎの3点  $A, B, C$  を順に左まわりに見る方の面をおもてとする3角形  $ABC$  の面積  $S$ 、面積ベクトル  $\mathbf{S}$  および単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を求めよ。

- (1)  $A(1, 2, 0), B(9, 2, 0), C(5, 9, 0)$
- (2)  $A(0, 2, 4), B(0, 6, 10), C(0, 8, 12)$
- (3)  $A(0, 0, 0), B(1, 3, 5), C(2, 4, 6)$
- (4)  $A(1, 4, 1), B(4, 2, 3), C(3, 6, 7)$



## 問題 I

1. つぎの等式を証明せよ.

$$(1) (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = |\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2$$

$$(2) |\mathbf{A} \pm \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \pm 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{複号同順})$$

$$(3) (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$(4) [\mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad \mathbf{C} + \mathbf{A}] = 2[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]$$

$$(5) \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0} \text{ のとき, } \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

2. 有向線分 AB を  $m:n$  に分ける点を C とする. 点 O に対する A, B, C の位置ベクトルを, それぞれ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  とするとき, 次式を証明せよ.

$$\mathbf{c} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n}$$

3. 点 O に対する 4 点 A, B, C, D の位置ベクトルを, それぞれ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  とする. 3 角形 ABC, 4 面体 ABCD の重心の位置ベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  は, それぞれ つぎの式で与えられることを証明せよ.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$$

4. つぎの不等式を証明せよ.

$$(1) |\mathbf{A}| \sim |\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A} \pm \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

$$(2) |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

5. つぎの等式を証明せよ.

$$(1) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$(2) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

$$(3) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

$$(4) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{D}]\mathbf{B} - [\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}]\mathbf{A} \\ = [\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{D}]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]\mathbf{D}$$

$$(5) [\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad \mathbf{C} \times \mathbf{A}] = [\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]^2$$

## 第Ⅱ章 ベクトルの微積分

### § 1 ベクトルの微積分

#### ベクトル関数

変化する実数 (変数)  $t$  の値に対応して、ベクトル  $\mathbf{A}$  が決まるとき、 $\mathbf{A}$  を  $t$  のベクトル関数といい、 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  で表わす。これに対して、いままでの、スカラー (実数) の値をとる関数は、スカラー関数ともよばれる。

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

とすれば、 $A_x, A_y, A_z$  が、それぞれに  $t$  の値に対応して決まるから、 $A_x, A_y, A_z$  は、それぞれ  $t$  の (スカラー) 関数

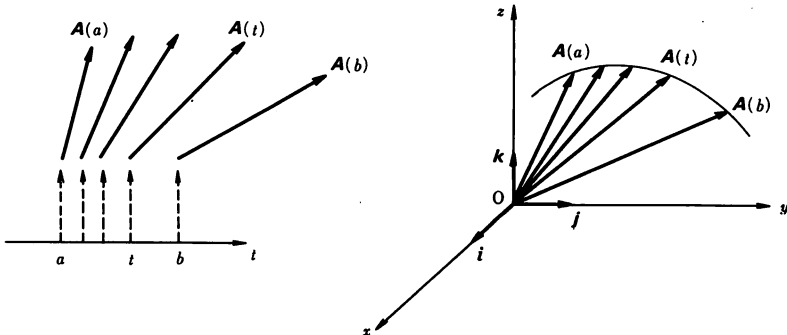
$$A_x = A_x(t), \quad A_y = A_y(t), \quad A_z = A_z(t)$$

となり、

$$\mathbf{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t)) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k}$$

すなわち、 $t$  のベクトル関数は、 $t$  の3つのスカラー関数を1組にまとめたものと見ることができる。

ベクトル関数  $\mathbf{A}(t)$  の大きさと向きとが、 $t$  の変化にともなって連続的に変化するとき、 $\mathbf{A}(t)$  は連続であるという。連続な  $\mathbf{A}(t)$  の始点を原点  $O$  に固定し、 $t$  を連続的に動かすとき、 $\mathbf{A}(t)$  の終点は一般的には空間曲線をえがく。



## ベクトル関数の極限

ベクトル関数  $\mathbf{A}(t)$  に対して、定ベクトル (大きさと向きが定まっているベクトル)  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$  があって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} |\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}| \\ = \lim_{t \rightarrow a} |(A_x(t) - B_x)\mathbf{i} + (A_y(t) - B_y)\mathbf{j} + (A_z(t) - B_z)\mathbf{k}| = 0 \end{aligned}$$

が成り立つとき、 $\mathbf{B}$  を  $t \rightarrow a$  のときの  $\mathbf{A}(t)$  の極限といい、

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{A}(t) = \mathbf{B}$$

と書く。不等式

$$\begin{aligned} \max \{ |A_x(t) - B_x|, |A_y(t) - B_y|, |A_z(t) - B_z| \} &\leq |\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}| \\ &\leq |A_x(t) - B_x| + |A_y(t) - B_y| + |A_z(t) - B_z| \end{aligned}$$

より (p. 8 ⑬), これは

$$\textcircled{1} \quad \lim_{t \rightarrow a} A_x(t) = B_x, \quad \lim_{t \rightarrow a} A_y(t) = B_y, \quad \lim_{t \rightarrow a} A_z(t) = B_z$$

が同時に成り立つことと同値である。

$\mathbf{A}(t)$  が ( $t =$ )  $a$  において、連続であるとは、

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(a)$$

が成り立つことであり、 $\mathbf{A}(t)$  が  $t$  のある区間で連続とは、 $\mathbf{A}(t)$  がその区間のすべての  $t$  において連続なことを意味する。

## ベクトル関数の導関数

ベクトル関数  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  について、変数  $t$  の増分  $\Delta t$  に対する  $\mathbf{A}$  の増分  $\Delta \mathbf{A}$  とは、ベクトル

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \\ &= \{A_x(t + \Delta t) - A_x(t)\}\mathbf{i} + \{A_y(t + \Delta t) - A_y(t)\}\mathbf{j} \\ &\quad + \{A_z(t + \Delta t) - A_z(t)\}\mathbf{k} \\ &= \Delta A_x \mathbf{i} + \Delta A_y \mathbf{j} + \Delta A_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

のことである。

いま、 $\mathbf{A}(t)$  がなめらかな ( $\mathbf{A}(t) = \overrightarrow{OP}$  の終点  $P$  が、なめらかな曲線  $C$  をえがく) 場合、 $t$  のある 1 つの値における  $\mathbf{A}$  の増分  $\Delta \mathbf{A}$  を  $\Delta t (\neq 0)$  で割ったベク

トルの,  $\Delta t \rightarrow 0$  のときの極限 (のベクトル)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta A_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \mathbf{k} \right) \\ &= \mathbf{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \end{aligned}$$

を,  $t$  における  $\mathbf{A}$  の微分係数といひ, また, おのおのの  $t$  の値に対する微分係数を対応させることによって得られるベクトル関数を,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  の導関数とよび, (微分係数, 導関数とも)

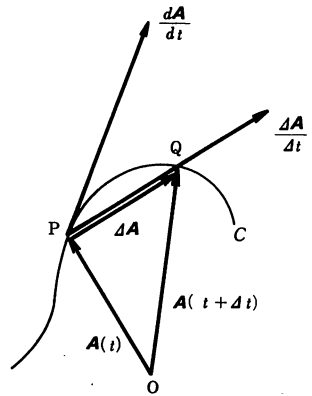
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \mathbf{A}'(t), \mathbf{A}', \dot{\mathbf{A}}$$

などで表わされる。(  $\mathbf{A}', \dot{\mathbf{A}}$  は, §2 で見るように, 変数によって使いわけることがある.) 導関数  $\mathbf{A}'(t)$  を求めることを,  $\mathbf{A}(t)$  を ( $t$  について) 微分するという. ベクトル関数を微分するには,

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \left( \frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right) \\ &= \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt} \end{aligned}$$

のように, 成分ごとに微分すればよい.

なお,  $\mathbf{A}(t) = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{A}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OQ}$  とし, 点  $Q$  を限りなく点  $P$  に近づける ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) とし, 直線  $PQ$  ( $\Delta \mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$  と同じ向き, したがって,  $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$



に平行) は,  $\mathbf{A}(t)$  の終点の描く曲線  $C$  上の, 点  $P$  における接線に限りなく近くから, 微分係数  $\mathbf{A}'(t)$  はこの接線 ( $t$  の増加する向きを与える) と同じ向きをもつベクトルである.  $\mathbf{A}'(t)$  を, 曲線  $C$  の接線ベクトルとよぶ. 曲線  $C$  が “なめらか” とは, その接線ベクトルが連続的に変化すること, すなわち, 導関数  $\mathbf{A}(t)$  が連続であることを意味する. このことを, ベクトル関数  $\mathbf{A}(t)$  はなめらかであるという.  $\mathbf{A}(t)$  がなめらかでなくても,  $\mathbf{A}'(t)$  は②の極限として定義されるが,  $\mathbf{A}'(t)$  は存在するとは限らないし, 存在しても連続性が失われ

る.

定ベクトル  $\mathbf{K}$  を変数  $t$  のベクトル関数とみなした場合、 $\mathbf{K} = \overrightarrow{OP}$  とすれば、 $P$  は定点で、普通の曲線とはならず、もちろん接線も引けないが、便宜上、任意の向きの接線をもつと考えると、 $\mathbf{K}$  はなめらかであるとしておく。なお、つねに  $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{0}$  であるから、導関数も  $\mathbf{0}$  である。すなわち

$$\textcircled{4} \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{0}$$

ベクトル関数  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ 、定ベクトル  $\mathbf{K}$ 、スカラー関数  $f = f(t)$  およびスカラー  $c$  に対して

$$\textcircled{5} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{d}{dt} (c\mathbf{A}) = c \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} (f\mathbf{K}) = \frac{df}{dt} \mathbf{K}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{K} \times \mathbf{A}) = \mathbf{K} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{d}{dt} (f\mathbf{A}) = \frac{df}{dt} \mathbf{A} + f \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

が成り立つ。

(証明) ⑧と⑩を証明しておく。(他の証明は各自試みよ.)

$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$  とする。

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad (f\mathbf{A})' &= (fA_x \mathbf{i} + fA_y \mathbf{j} + fA_z \mathbf{k})' \\ &= (f'A_x + fA_x') \mathbf{i} + (f'A_y + fA_y') \mathbf{j} + (f'A_z + fA_z') \mathbf{k} \\ &= f' (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) + f (A_x' \mathbf{i} + A_y' \mathbf{j} + A_z' \mathbf{k}) \\ &= f' \mathbf{A} + f\mathbf{A}' \end{aligned}$$

⑩  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の成分ごとに微分してみればよい。結果的には、いわば、つぎのよう形式的な行列式を微分したことになる。(  $\mathbf{i}' = \mathbf{j}' = \mathbf{k}' = \mathbf{0}$  )

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B})' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}' \\
 &= \left( \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x' & A_y' & A_z' \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x' & B_y' & B_z' \end{vmatrix} \right) \\
 &= (\mathbf{0} +) \mathbf{A}' \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}'
 \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \\
 &= \{ \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \} \times \mathbf{B}(t + \Delta t) \\
 &\quad + \mathbf{A}(t) \times \{ \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t) \}
 \end{aligned}$$

を  $\Delta t$  で割って、 $\Delta t \rightarrow 0$  のときの極限をとってもよい。

例1 (i)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$  のとき、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (t^2)' \mathbf{i} + (t^3)' \mathbf{j} + (t^4)' \mathbf{k} = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 4t^3 \mathbf{k}$$

(ii)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta) = \mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k} \tan \theta$   $\left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

のとき、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{A}}{d\theta} &= \mathbf{i} (\sin \theta)' + \mathbf{j} (\cos \theta)' + \mathbf{k} (\tan \theta)' \\
 &= \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{k} \sec^2 \theta
 \end{aligned}$$

例2 (i)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  の向きが一定ならば、 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \parallel \mathbf{A}$

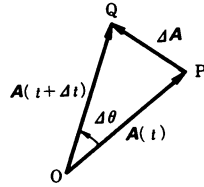
(ii)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  の大きさが一定ならば、

$$(イ) \frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$$

$$(ロ) \angle(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}(t+\Delta t)) = \Delta\theta \quad (\Delta t > 0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ とすれば,}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| = |\mathbf{A}| \frac{d\theta}{dt}$$



(証明) (i)  $\mathbf{A}$  と同じ向きの単位ベクトル  $\mathbf{a}$  は定ベクトルである。

$|\mathbf{A}| = A = A(t)$  とすれば,  $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$  であるから, ⑥ 右式より

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \mathbf{a} \quad \therefore \frac{d\mathbf{A}}{dt} \parallel \mathbf{a} \parallel \mathbf{A}$$

(ii) (イ)  $|\mathbf{A}| = A$  が定数であるから,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$  も定数. この両辺を  $t$  で微分して 2 で割れば, ⑨ 右式より

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \quad \therefore \frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$$

(ロ)  $\mathbf{A}(t) = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{A}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OQ}$  とすれば,  $OP = OQ = |\mathbf{A}| = A$ ,  $\angle POQ = \Delta\theta$  であるから,

$$|\Delta\mathbf{A}| = PQ = 2 OP \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 2A \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\therefore \left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( A \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \sin \frac{\Delta\theta}{2} / \frac{\Delta\theta}{2} \right) = A \frac{d\theta}{dt}$$

### 高次導関数

ベクトル関数  $\mathbf{A}(t)$  の導関数  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  の導関数,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)$  を  $\mathbf{A}(t)$  の第

2次導関数といい,

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}, \mathbf{A}''(t), \mathbf{A}'', \ddot{\mathbf{A}}$$



などで表わす.  $\mathbf{A}(t) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  を  $n$  回続けて微分して得られる第  $n$  次導関数は

$$\textcircled{11} \quad \frac{d^n \mathbf{A}}{dt^n} = \left( \frac{d^n A_x}{dt^n}, \frac{d^n A_y}{dt^n}, \frac{d^n A_z}{dt^n} \right) = \mathbf{i} \frac{d^n A_x}{dt^n} + \mathbf{j} \frac{d^n A_y}{dt^n} + \mathbf{k} \frac{d^n A_z}{dt^n}$$

である. 本書で扱うベクトル関数は, とくにことわらない限り, 必要なだけ微分を続けて行うことができ, また, 得られた導関数が連続であるものとしておく.

### 偏導関数

ベクトル  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  の3つの成分が, それぞれ2変数  $u, v$  の(スカラー)関数

$$A_x = A_x(u, v), \quad A_y = A_y(u, v), \quad A_z = A_z(u, v)$$

であるとき,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u, v) = A_x(u, v) \mathbf{i} + A_y(u, v) \mathbf{j} + A_z(u, v) \mathbf{k}$$

を, 2変数  $u, v$  のベクトル関数という.

2変数ベクトル関数  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u, v)$  の偏導関数とは, 結局その成分ごとの偏導関数を, それぞれ成分にもつベクトルのことである.

$$\begin{aligned} \textcircled{12} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(u + \Delta u, v) - \mathbf{A}(u, v)}{\Delta u} \\ &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial u}, \frac{\partial A_y}{\partial u}, \frac{\partial A_z}{\partial u} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial A_x}{\partial u} + \mathbf{j} \frac{\partial A_y}{\partial u} + \mathbf{k} \frac{\partial A_z}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(u, v + \Delta v) - \mathbf{A}(u, v)}{\Delta v} \\ &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial v}, \frac{\partial A_y}{\partial v}, \frac{\partial A_z}{\partial v} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial A_x}{\partial v} + \mathbf{j} \frac{\partial A_y}{\partial v} + \mathbf{k} \frac{\partial A_z}{\partial v} \end{aligned}$$

3変数ベクトル関数  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$  の偏導関数  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$  について

も同様であるから, くり返さない. なお, 本書で扱う2変数および3変数のベクトル関数はなめらか(偏導関数がすべて連続)であるものとする.

高次偏導関数については、たとえば、2変数の第2次偏導関数の場合、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v^2}$$

の3通りがある。(  $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v \partial u}$  は偏微分の順序が逆であるが、ともに連続であれば、両者が一致することがわかっているの、まとめて数えた.)

### 微分・全微分

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  の成分ごとの微分

$$dA_x = A_x'(t) dt = A_x'(t) dt$$

$$dA_y = A_y'(t) dt = A_y'(t) dt$$

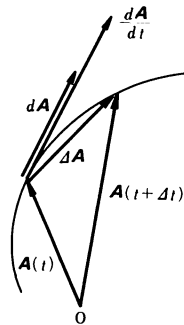
$$dA_z = A_z'(t) dt = A_z'(t) dt$$

を成分にもつベクトルを  $d\mathbf{A}$  で表わし、 $\mathbf{A}$  の微分という。すなわち

$$\textcircled{13} \quad d\mathbf{A} = dA_x \mathbf{i} + dA_y \mathbf{j} + dA_z \mathbf{k}$$

$$= \left( \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt} \right) dt \quad (\Delta t \text{ は } dt \text{ としてもよい})$$

$$= \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt = \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$$



である。  $\Delta t \approx 0$  のとき、 $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_y$ ,  $\Delta A_z$  は、それぞれ  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$  で近似されるから、 $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$  は  $d\mathbf{A}$  で近似される。よってつぎの近似式が得られる。

$$\textcircled{14} \quad \mathbf{A}(t + \Delta t) \approx \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t) \Delta t$$

同様に  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u, v)$  の全微分は、 $A_x = A_x(u, v)$  の全微分

$$dA_x = \frac{\partial A_x}{\partial u} du + \frac{\partial A_x}{\partial v} dv = \frac{\partial A_x}{\partial u'} du + \frac{\partial A_x}{\partial v} dv$$

などを用いて、

$$\textcircled{15} \quad d\mathbf{A} = dA_x \mathbf{i} + dA_y \mathbf{j} + dA_z \mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial A}{\partial v} \Delta v = \frac{\partial A}{\partial u} du + \frac{\partial A}{\partial v} dv$$

として定義される。  $\Delta u \approx 0$ ,  $\Delta v \approx 0$  のとき

$$\Delta A = A(u + \Delta u, v + \Delta v) - A(u, v)$$

は  $dA$  で近似される。すなわち、つぎの近似式が得られる。

$$\textcircled{16} \quad A(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx A(u, v) + \frac{\partial A}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial A}{\partial v} \Delta v$$

$A = A(x, y, z)$  についても全微分

$$\textcircled{17} \quad dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

が定義され、 $\Delta x \approx 0$ ,  $\Delta y \approx 0$ ,  $\Delta z \approx 0$  のとき  $\Delta A \approx dA$  である。

### ベクトル関数の積分

ベクトル関数の成分ごとの積分をまとめることによって、ベクトル関数の積分が得られる。

(i) 不定積分

$$\begin{aligned} \textcircled{18} \quad \int \mathbf{A}(t) dt &= \left( \int A_x(t) dt, \int A_y(t) dt, \int A_z(t) dt \right) \\ &= i \int A_x(t) dt + j \int A_y(t) dt + k \int A_z(t) dt \end{aligned}$$

$$\textcircled{19} \quad \mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}(t) \iff \int \mathbf{A}(t) dt = \mathbf{F}(t) + \mathbf{K} \quad (\mathbf{K} : \text{定ベクトル})$$

(ii) 定積分

$$\begin{aligned} \textcircled{20} \quad \int_a^b \mathbf{A}(t) dt &= \left( \int_a^b A_x(t) dt, \int_a^b A_y(t) dt, \int_a^b A_z(t) dt \right) \\ &= \left[ \int \mathbf{A}(t) dt \right]_a^b = \left[ \mathbf{F}(t) \right]_a^b = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) \end{aligned}$$

## (iii) 重積分

$\iint_D A(u, v) du dv$ ,  $\iiint_D A(x, y, z) dx dy dz$  についても, 成分ごと

の重積分をまとめればよい.

例3  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  についての微分方程式

$$(*) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} + P(t)\mathbf{r} = \mathbf{Q}(t) \quad (= Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

を, 成分ごとの微分方程式にわけると

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q_x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q_y(t)$$

$$\frac{dz}{dt} + P(t)z = Q_z(t)$$

となり, それぞれの一般解は, 任意定数を  $K_x, K_y, K_z$  として,

$$x = e^{-\int P(t) dt} \left( \int Q_x(t) e^{\int P(t) dt} dt + K_x \right)$$

$$y = e^{-\int P(t) dt} \left( \int Q_y(t) e^{\int P(t) dt} dt + K_y \right)$$

$$z = e^{-\int P(t) dt} \left( \int Q_z(t) e^{\int P(t) dt} dt + K_z \right)$$

となるから, 任意定ベクトル  $\mathbf{K} = K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}$  を用いて, (\*) の一般解はつぎのように書ける.

$$\mathbf{r} = e^{-\int P(t) dt} \left( \int \mathbf{Q}(t) e^{\int P(t) dt} dt + \mathbf{K} \right)$$

問1  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  を求めよ.

$$(1) \mathbf{A} = (5t^2 + 4t)\mathbf{i} + (3t^3 - 2t)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$(2) \mathbf{A} = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \log tk$$

$$(3) \mathbf{A} = \mathbf{i} \sin^2 t + \mathbf{j} \sin t \cos t + \mathbf{k} \cos^2 t$$

$$(4) \mathbf{A} = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$$

$$(5) \mathbf{A} = \mathbf{i} \sin^{-1} t - \mathbf{j} \cos^{-1} t + \mathbf{k} \tan^{-1} t$$

問2

$$(1) \mathbf{A} = (u^2 + v^2)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k} \text{ のとき,}$$

$$u^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^2} + 2uv \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v^2} = 2\mathbf{A}$$

となることを示せ.

$$(2) \mathbf{H} = e^{-\lambda x}(\mathbf{a} \sin \lambda y + \mathbf{b} \cos \lambda y) \quad (\lambda \text{ は定数, } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ は定ベクトル})$$

は次式を満足することを示せ.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} = \mathbf{0}$$

問3  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  についての, つぎの微分方程式を解け.

( $\mathbf{a}$  は定ベクトル,  $k$  は定数)

$$(1) (i) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a} \quad (ii) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}$$

$$(2) \frac{d\mathbf{r}}{dt} + k\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$(3) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + k\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

## § 2 空間曲線

### 空間曲線の長さ

空間における点  $P(x, y, z)$  が変数  $t$  の変化にともなって連続的に動くとき、点  $P$  は1つの空間曲線  $C$  を描く。このとき、点  $P$  の位置ベクトル  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  は変数  $t$  の連続なベクトル関数

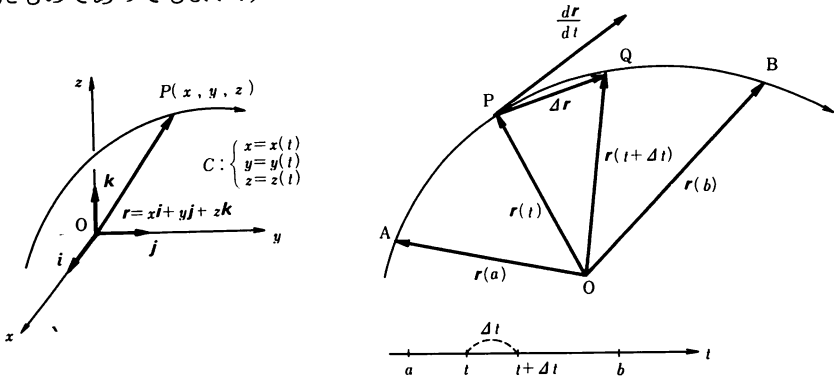
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

で表わされる。これを曲線  $C$  の(ベクトル)方程式という。もちろん、成分ごとにかければ

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

となり、これは  $t$  を助変数とする曲線  $C$  の助変数表示である。

本書で扱う曲線は、なめらか  $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ が連続}\right)$  で、特異点  $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0} \text{ となる点}\right)$  をもたないものとする。(なお、このような性質をもつ曲線弧をいくつか接続したものであってもよい。)



いま、この曲線  $C$  上での、 $t$  に対応する点  $P$  の近くに、 $t + \Delta t$  ( $\Delta t > 0$ ) に対応する点  $Q$  をとるとき、

$$\overrightarrow{PQ} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$$= \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$$

$$PQ = |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

となる. この微小な線分の長さを  $t = a$  から  $t = b$  まで加えて,  $\Delta t \rightarrow 0$  のときの極限をとったもの  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t=a}^b |\Delta \mathbf{r}|$  が, 曲線  $C$  の  $a \leq t \leq b$  の部分 (弧  $AB$ ) の長さ  $s$  であり, つぎの定積分で与えられる.

$$\textcircled{1} \quad s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

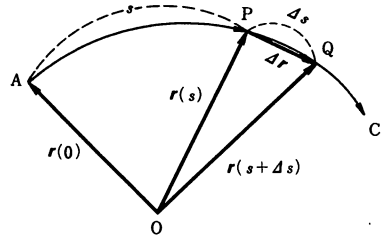
ここに,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  は曲線  $C$  の接線ベクトルである.

この定積分で,  $a$  を固定し,  $b$  の代りにあらためて変数  $t (t \geq a)$  を用いれば

$$s = s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

は  $t$  の関数で,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (> 0) \end{aligned}$$



よって, 弧長  $s$  の微分は

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad ds &= \frac{ds}{dt} dt = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = |d\mathbf{r}| \end{aligned}$$

となる. この  $ds$  を曲線の線素という.

ところで,  $s = s(t)$  は  $t$  の増加関数であるから, 逆に  $t$  は  $s$  の増加関数  $t(s)$  になって, 曲線  $C$  の方程式は, 曲線の長さ  $s$  を変数とする

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

で表わすこともできる.

このとき、曲線  $C$  の接線ベクトル  $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  の大きさは、 $\mathbf{r}(s) = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{r}(s + \Delta s) = \overrightarrow{OQ}$ ,  $\Delta\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$  として、

$$|\mathbf{t}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta s} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{PQ}{PQ} = 1$$

であることがわかる。この  $\mathbf{t}$  を曲線  $C$  の単位接線ベクトルという。なお、曲線  $C$  の方程式が  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  で与えられている場合に  $\mathbf{t}$  を求めるには、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \text{ を用いて}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

のように計算すればよい。

今後、この § では、 $s$  について微分するときには' (ダッシュ, prime),  $t$  について微分するときには  $\cdot$  (dot) を用いて

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}', \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}'', \quad \dots, \quad \frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{d^2x}{ds^2} = x'', \quad \dots$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \dots, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \dots$$

などのように表わすことにする。つぎに、これによって、いくつかの式を書いてみよう。

$$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

$$ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt, \quad \dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \quad |\mathbf{t}| = |\mathbf{r}'| = 1$$

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt = \mathbf{r}' ds = \mathbf{t} ds$$

例 4 つるまき線  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) の長さ  $s$  を求める。



(解)  $\dot{\mathbf{r}} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2}$$

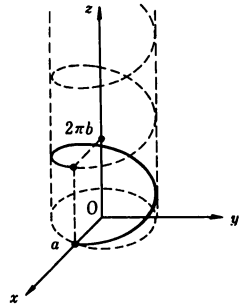
$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

であるから,

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

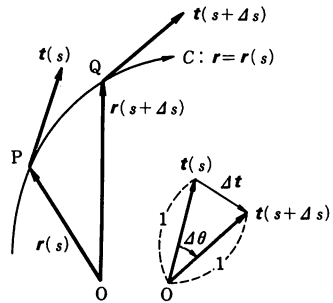
$$= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$



### 曲率とねじれ率

すでに述べたように、曲線  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  に対して、

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$



は  $C$  の単位接線ベクトルであり、 $|\mathbf{t}| = 1$  であるから、例 2 (ii) により

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}''$$

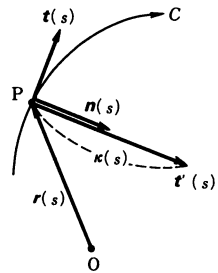
は  $\mathbf{t}$  に垂直で、かつ  $\Delta s$  に対する  $\mathbf{t}$  の回転角を  $\Delta\theta$  とすれば、

$$|\mathbf{t}'| = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

が成り立つ。これを  $\kappa$  とし、 $\mathbf{t}' \neq \mathbf{0}$ 、すなわち、

$\kappa \neq 0$  のとき、 $\mathbf{t}'$  と同じ向き単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  で表わせば、

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa}$$



である。 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$  を曲線  $C$  の (単位) 主法線ベクトルという。また、

$$\textcircled{5} \quad \kappa = \kappa(s) = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{r}''|$$

を、曲線  $C$  の曲率という。曲率の逆数を曲率半径といい  $\rho$  で表わす。曲率は、接線の向きの変化率、つまり曲線のまがり方の率を示す。曲率 0 の曲線は直線である。

つぎに、単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  と単位主法線ベクトル  $\mathbf{n}$  との外積

$$\textcircled{6} \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

をつくれれば、 $\mathbf{b}$  は  $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{n}$  の双方に垂直な単位ベクトルで、

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$$

の関係も成り立つ。この  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$  を (単位) 従法線ベクトルという。

曲線  $C$  上の点  $P$  を始点とする  $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{b}$  のうち、 $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{n}$  とをふくむ平面を、(曲線  $C$  の点  $P$  における) 接触平面、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{b}$  をふくむ平面を法平面、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{t}$  をふくむ平面を展直平面という。

さて、 $|\mathbf{b}| = 1$  より  $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$  であり、また、

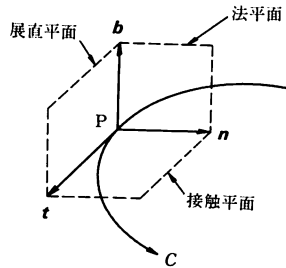
$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad \mathbf{b}' &= (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= (\kappa \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{0} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \end{aligned}$$

より  $\mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$  も成り立つから  $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n} (= \mathbf{b} \times \mathbf{t})$  である。そこで

$$\textcircled{8} \quad \mathbf{b}' = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

とおき、 $\tau = \tau(s)$  を曲線  $C$  のねじれ率または捩率(れいりつ)という。 $\mathbf{b}$  は接触平面に垂直であるから、ねじれ率は接触平面の回転の率を表わすものと考えられる。ねじれ率 0 の曲線は、(その接触平面が不変で、曲線はその平面上の) 平面曲線である。さらに、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' &= (\mathbf{b} \times \mathbf{t})' = \mathbf{b}' \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \mathbf{t}' \\ &= (-\tau \mathbf{n}) \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times (\kappa \mathbf{n}) \\ &= \tau (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) - \kappa (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} \end{aligned}$$



すなわち,

$$\textcircled{9} \quad \mathbf{n}' = \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

も成り立つ. ④, ⑨, ⑧をまとめると, つぎのきれいな公式が得られる.

フルネ・セレーの公式	
{	$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$

例5 つるまき線  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k}$  の  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$ .(解)  $\dot{\mathbf{r}} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$ 

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\textcircled{\circ} \quad \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{s}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k})$$

$$\dot{\mathbf{t}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j})$$

$$\mathbf{t}' = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\dot{s}} = -\frac{a}{a^2 + b^2} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j})$$

$$\textcircled{\circ} \quad \kappa = |\mathbf{t}'| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\textcircled{\circ} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

$$\textcircled{\circ} \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \sin ti - b \cos tj + ak)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} (\cos ti + \sin tj)$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\dot{s}} = \frac{b}{a^2+b^2} (\cos ti + \sin tj)$$

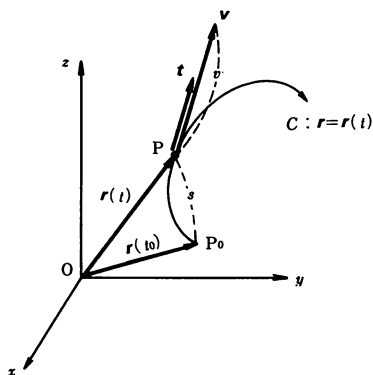
$$\textcircled{c} \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2} (\because \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n})$$

### 点の運動

点Oに対する動点Pの位置ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  が、時間  $t$  のベクトル関数  $\mathbf{r}(t)$  で表わされるとき、曲線  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  は点Pの運動していく道(軌道)である。

動点Pの速度は、ベクトル

$$\textcircled{10} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



で表わされ、時刻  $t_0$  から  $t$  までの間にPの動く距離(道のり)  $s$  は

$$\textcircled{11} \quad s = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}| dt$$

で与えられるから、 $\mathbf{v}$ の大きさ(速さ)を  $v$  とすれば、

$$\textcircled{12} \quad v = |\mathbf{v}| = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

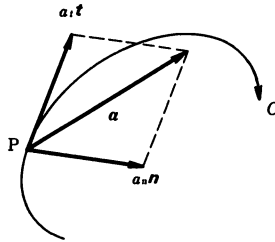
$$\textcircled{13} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \mathbf{r}' = v \mathbf{t} \quad (\mathbf{t} \text{ は単位接線ベクトル})$$

である。また、Pの加速度は、ベクトル

$$\textcircled{14} \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

で表わされるが、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} (v\mathbf{t}) \\
 &= \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} \\
 &= \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}} \\
 &= \dot{v}\mathbf{t} + v(\kappa\mathbf{n}) \\
 &= \dot{v}\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n} \\
 &= \ddot{s}\mathbf{t} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{n}
 \end{aligned}$$



( $\kappa$ は曲率,  $\mathbf{n}$ は単位主法線ベクトル)

であるから

⑬  $\mathbf{a} = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n}$

ただし,

$$a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \kappa v^2 = \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$$

の形に書くことができる。これは $\mathbf{a}$ が(Pを始点として)Cの接触平面内にあることを示している。 $a_t$ ,  $a_n$ を、それぞれ加速度 $\mathbf{a}$ の接線成分, 法線成分という。

例6 つるまき線をえがく運動

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k}$$

の速度 $\mathbf{v}$ , 加速度 $\mathbf{a}$ およびその接線成分 $a_t$ , 法線成分 $a_n$ .

(解) ①  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$

②  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = -a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j}$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k})$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (\text{例 5})$$

$$\mathbf{n} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad (\text{例 5})$$

$$\textcircled{C} \quad a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = 0$$

(あるいは  $a_t = \dot{v} = 0$ )

$$\textcircled{C} \quad a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a$$

(あるいは  $a_n = \kappa v^2 = a$ )

問 4 つぎの曲線の長さを求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{r} = (t^3 + 3t) \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + (t^3 - 3t) \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$(2) \quad \mathbf{r} = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j} + 4 \sin \frac{t}{2} \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$(3) \quad \mathbf{r} = 2\sqrt{2} t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2 \log t \mathbf{k} \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$(4) \quad \mathbf{r} = 2 \cos \theta \mathbf{i} + 2 \sin \theta \mathbf{j} + \theta^2 \mathbf{k} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

問 5 つぎの曲線について,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$  を求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 2t^3 \mathbf{k}$$

$$(2) \quad \mathbf{r} = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2} t \mathbf{k}$$

問 6 つぎの運動について, 速度  $\mathbf{v}$ , 加速度  $\mathbf{a}$  およびその接線成分  $a_t$ , 法線成分  $a_n$  を求めよ.

(1) 半径  $c$ , 角速度 (の大きさ)  $\omega$  の等速円運動

$$\mathbf{r} = c \cos \omega t \mathbf{i} + c \sin \omega t \mathbf{j}$$

(2) 半径  $c$  の一般の円運動

$$\mathbf{r} = c \cos \theta(t) \mathbf{i} + c \sin \theta(t) \mathbf{j}$$

(3)  $\mathbf{r} = (\sin t - t \cos t) \mathbf{i} + (\cos t + t \sin t) \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$

## § 3 曲面積

## 曲面の面積

空間における点  $P(x, y, z)$  が,  $uv$  平面においてあるひろがりをもつ領域  $D$  上の点  $(u, v)$  の変化にともなって動くとき, 点  $P$  は一般に曲面  $S$  を描く. 点  $P$  の位置ベクトル  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  は 2変数  $u, v$  のベクトル関数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

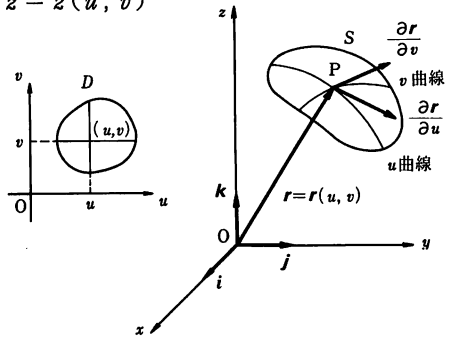
で表わされる. これを曲面  $S$  の (ベクトル) 方程式という. 成分ごとに書けば,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

である.

いま,  $uv$  平面上で,  $v$  を固定して,  $u$  だけを ( $u$  軸に平行に) 動かすと, 曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  上の点  $P$  は 1つの曲線を描く. この曲線を  $u$  曲線という. 同様に  $u$  を固定して,

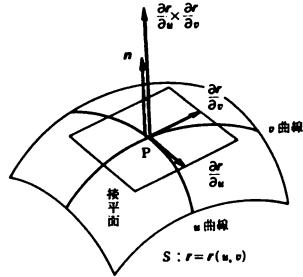
$v$  曲線が得られる. そして  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  は, それぞれ点  $P$  における  $u$  曲線,  $v$  曲線の接線ベクトルとなる.



本書で扱う曲面はなめらか  $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)$  とともに連続) で, かつ  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$  であるものとしておく. (あるいは, このような曲面をいくつか接続したものであってもよい.) なお, 曲面には, 有名なモービウスの帯 (細長い長方形の紙を 1 回ひねって両端をはりつければできる) のように, おもて側とうら側の区別ができないものもあるが, 本書では, 正の側 (おもて) と負の側 (うら) の区別がつけられる, いわゆる向きづけ可能な曲面だけを扱う.

曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  上の点  $P$  において,  $P$  を始点とする  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  をふく

む平面を、曲面  $S$  の点  $P$  における接平面という。  
 この接平面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を、(点  $P$  における) 曲面  $S$  の単位法線ベクトルという。 $\mathbf{n}$  は、 $S$  のうらからおもてに向けて引くものとする。ベクトル  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  は、接平面に垂直で

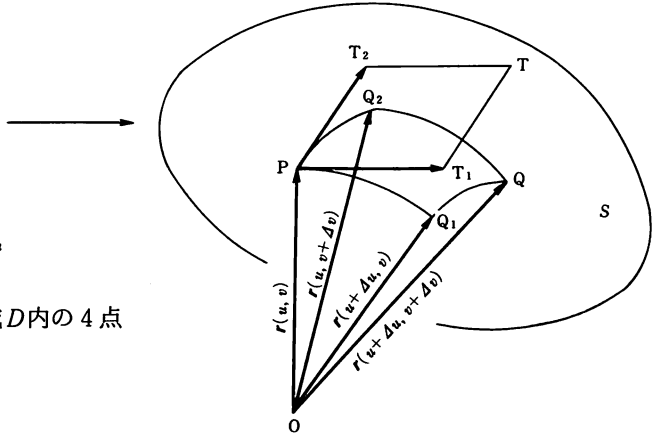
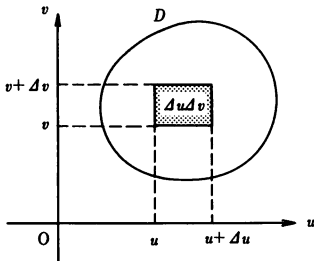


あるから、それが接平面 (したがって曲面  $S$ )

の正の向きをもつ (うらからおもてに向かう) [負の向きをもつ (おもてからうらに向かう)] ならば、曲面  $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \left[ \mathbf{n} = - \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \right]$$

で表わされる。



さて、 $uv$  平面上の領域  $D$  内の 4 点

- $(u, v)$ ,
- $(u + \Delta u, v)$ ,
- $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,
- $(u, v + \Delta v)$

を頂点とする、面積  $\Delta u \Delta v$  の微小な長方形が、曲面  $S: \mathbf{r}(u, v)$  上の面積  $\Delta S$  の図形  $PQ_1Q_2$  に対応するとき、この図形は、ほぼ  $\overrightarrow{PQ_1}$ ,  $\overrightarrow{PQ_2}$  を 2 辺とする平行 4 辺形に近く、また

$$\overrightarrow{PQ_1} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u = \overrightarrow{PT_1}$$



$$\overrightarrow{PQ_2} = \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v = \overrightarrow{PT_2}$$

であるから、結局  $\Delta S$  は平行4辺形  $PT_1TT_2$  の面積で近似され、

$$\Delta S \approx \left| \overrightarrow{PT_1} \times \overrightarrow{PT_2} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

である。したがって、 $D$ 上の微小な図形が $S$ 上に移るとき、面積は  $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$

倍になるとみてよい。そこで、 $S$ の面積（そのまま $S$ で表わす）は、

極限  $\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$  によって求められる。すなわち

$$\textcircled{2} \quad S = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

が成り立つ。なお、ここで

$$\textcircled{3} \quad dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

とおき、これを曲面 $S$ の面積素という。また、面積ベクトル

$$\textcircled{4} \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

を、曲面 $S$ のベクトル面積素という。

**例7** 半径 $a$ の球面

$$\mathbf{r} = a \sin u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}$$

$$((u, v) \in D : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ 、面積素 $dS$ および面積 $S$ 。

$$\text{(解)} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} - a \sin u \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + a^2 \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + a^2 \cos u \sin u \mathbf{k}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = a^2 \sin u$$

よって,

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$$

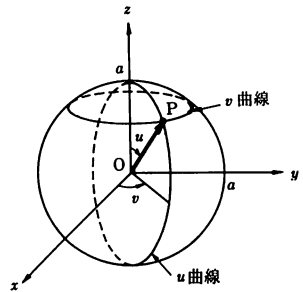
$$= \sin u \cos v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{r} / a$$

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = a^2 \sin u du dv$$

$$S = \iint_D a^2 \sin u du dv$$

$$= a^2 \int_0^\pi \sin u du \int_0^{2\pi} dv = 4\pi a^2$$



例 8  $xy$  平面の領域  $D$  上の曲面  $z = f(x, y)$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  および面積  $S$  は、つぎの式で表わされる。

$$(i) \quad \mathbf{n} = \frac{-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad \left( \begin{array}{l} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

(解) 曲面のベクトル方程式,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$  より,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (\mathbf{i} + f_x \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + f_y \mathbf{k}) = -f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad \text{となることを用いればよい.}$$

例9  $xy$  平面上の曲線  $y = f(x)$  ( $\geq 0$ ), ( $a \leq x \leq b$ ) を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転面の面積  $S$  はつぎの式で与えられる.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

(解) 回転面のベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(x, \theta) \\ &= x\mathbf{i} + f(x) \cos \theta \mathbf{j} + f(x) \sin \theta \mathbf{k} \\ ((x, \theta) \in D : a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

となるから,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + f'(x) \cos \theta \mathbf{j} + f'(x) \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -f(x) \sin \theta \mathbf{j} + f(x) \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = f(x) f'(x) \mathbf{i} - f(x) \cos \theta \mathbf{j} - f(x) \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| dx d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \end{aligned}$$

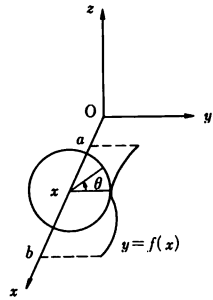
問7 つぎの曲面について, 単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  および面積  $S$  を求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \frac{v^2}{2} \mathbf{k}$$

$$(u^2 + v^2 \leq 4\pi^2)$$

$$(2) \quad \mathbf{r} = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \mathbf{j} + b \sin v \mathbf{k}$$

$$(\text{円環面}, a > b > 0; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$



## 問題 II

1. ベクトル関数  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  について, つぎの等式を証明せよ.

$$(1) \frac{d}{dt} [\mathbf{ABC}] = \left[ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{BC} \right] + \left[ \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \mathbf{C} \right] + \left[ \mathbf{AB} \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right]$$

$$(2) \frac{d}{dt} \{ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \}$$

$$= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \times \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \times \left( \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right)$$

2.  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{Y}(t)$  についての, つぎの連立微分方程式を解け.

$$(1) \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{X}$$

$$(2) \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathbf{Y}, \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{X}$$

3. フルネ・セレーの公式は, ベクトル  $\boldsymbol{\omega} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$  を用いて, つぎのように表わされることを確かめよ.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$$

4. (1) 曲線  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$  ( $s$ : 弧長) の曲率  $\kappa$  とねじれ率  $\tau$  は, つぎの式で表わされることを証明せよ.

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$$

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''')}{\kappa^2} = \frac{[\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''']}{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''}$$

$$= \frac{1}{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

(2) 一般の助変数  $t$  を用いた場合, 曲線  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  の曲率  $\kappa$  とねじれ率  $\tau$  は, つぎの式で表わされることを証明せよ.

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \tau = \frac{[\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}]}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

(3) 動点の速度を  $\mathbf{v}$ , 加速度を  $\mathbf{a}$  とするとき, その軌道の曲率半径は

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

であることを証明せよ.

5. 曲面  $F(x, y, z) = 0$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は, つぎの式で与えられることを証明せよ.

$$\mathbf{n} = \frac{F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \left( F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

6. 曲面  $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$  ( $(u, v) \in D$ ) の面積  $S$  を表わすつぎの公式を証明せよ.

$$(1) S = \iint_D \sqrt{\left[ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} dudv$$

$$\text{こゝに } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} \text{ヤコービアン} \\ \text{(Jacobian)} \end{array} \right)$$

$$(2) S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

$$\text{こゝに } E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$

$$G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2.$$

これらは, 曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  の第1基本量といわれる.

## 第三章 勾配・発散・回転

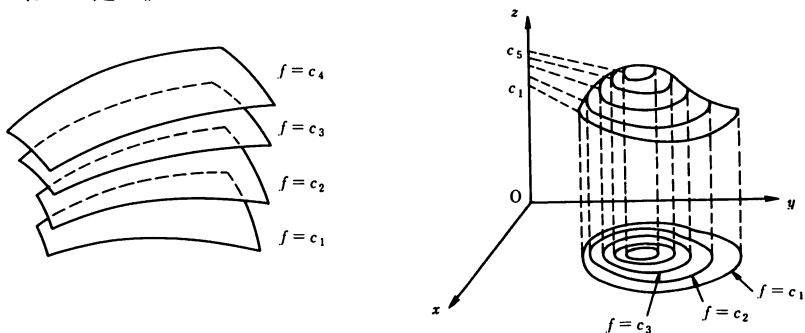
### § 1. スカラー場とベクトル場

#### スカラー場とベクトル場

空間のある領域  $D$  ( $D$  は空間全体でもよい) の各点  $P(x, y, z)$  に、スカラー (実数)  $f = f(P) = f(x, y, z)$  が対応しているとき、 $D$  にスカラー  $f$  が分布しているといい、領域  $D$  とスカラー関数  $f(x, y, z)$  とをあわせた概念としてスカラー場  $f$  という。また、領域  $D$  の各点  $P$  に、ベクトル  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(x, y, z)$  が対応しているとき、 $D$  にベクトル  $\mathbf{A}$  が分布しているといい、領域  $D$  とベクトル関数  $\mathbf{A}(x, y, z)$  をあわせた概念としてベクトル場  $\mathbf{A}$  という。たとえば、ある物体内の温度分布、密度分布などはスカラー場、ある地域の風の (強さと向き) の分布、流水の速度分布、重力場、電場などはベクトル場をなす。

#### スカラー場の等位面

スカラー場  $f$  において、 $f(x, y, z) = c$  (定数) となる点  $P(x, y, z)$  の軌跡は、一般には曲面で、これを等位面という。これは 2 変数関数の場合の等高線  $f(x, y) = c$  に相当するものである。等温面、等電位面などは等位面の例である。つねに一定の値をとるスカラー場では等位面は存在しない。



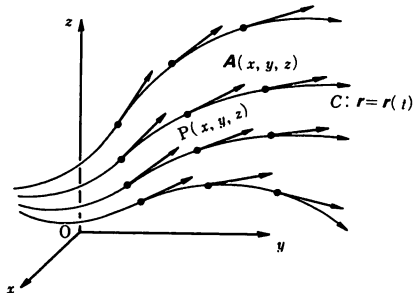
例1 等面  $x+y+z=c$  は平面,  $x^2+y^2+z^2=c$  ( $c>0$ ) は球面, また,  $x^2+y^2-z^2=c$  は1葉(回転)双曲面 ( $c>0$ ), 円錐面 ( $c=0$ ), 2葉(回転)双曲面 ( $c<0$ ) である.

### ベクトル場の流線

ベクトル場  $A$  の中に曲線  $C$  :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

があって,  $C$  上の各点  $P(x, y, z)$  に対応するベクトル  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$  が,  $C$  の  $P$  における接線ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  となると, 曲線  $C$  をベクトル場  $\mathbf{A}$  の流線という.



流線の微分方程式は  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}$ , すなわち連立微分方程式

$$\textcircled{1} \quad \frac{dx}{dt} = A_x(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = A_y(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = A_z(x, y, z)$$

である.

一般に  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  のところでは, ベクトル場  $\mathbf{A}$  の各点を通して, ちょうど1本ずつの流線が存在する.  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  となる点では, 流線が存在しなかったり, あるいはその点を通して2本以上(無数の場合もある)の流線が存在することもある.

例2 ベクトル場  $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} (= \mathbf{r})$  の流線.

(解) 流線の微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dz}{dt} = z$$

である. これを解いて

$$x = c_1 e^t, \quad y = c_2 e^t, \quad z = c_3 e^t \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は任意定数})$$

が得られるから, 流線は  $\mathbf{r} = e^t(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})$  となるが, これは原点を通る

直線  $\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}$  である.(原点では  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  で, 原点を通る無数の流線が存在する.)

例3 ベクトル場  $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  の流線

(解) 流線の方程式は

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

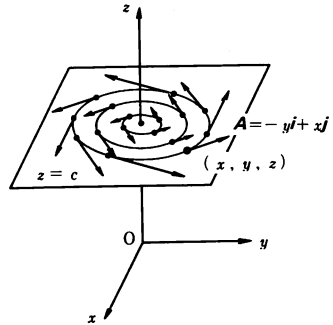
である。これを解いて

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y = c_1 \sin t - c_2 \cos t \\ z = c_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は任意定数}) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \quad \left( \text{ここで } a = c_1^2 + c_2^2, \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ を解いてもよい。} \right) \\ z = c (= c_3) \end{cases}$$

これは  $xy$  平面に平行な円を表わす。(  $z$  軸上の点では  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  で、ここでは流線は存在しない。)



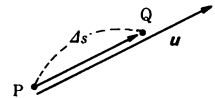
### 方向微分係数

スカラー場  $f = f(x, y, z)$  において、単位ベクトル  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$  の向きの、大きさ  $\Delta s$  の変位  $\mathbf{u}\Delta s$  を考える。

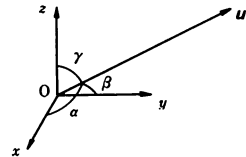
点  $P(x, y, z)$  から

点  $Q(x + u_x \Delta s, y + u_y \Delta s, z + u_z \Delta s)$

に移るとき、すなわち  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}\Delta s$  であるとき、



$$\begin{aligned} & \lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{PQ} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x + u_x \Delta s, y + u_y \Delta s, z + u_z \Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s} \end{aligned}$$



を、 $f$  の点  $P$  における  $\mathbf{u}$  方向への方向微分係数といい、書物により

$$\frac{df}{ds}, \quad \frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$$



など、さまざまな記号で表わされているが、本書では、最後の記号を用いよう。

方向微分係数  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$  は、 $f$  の点  $P$  における  $\mathbf{u}$  方向への変化率である。

いま、 $\Delta x = u_x \Delta s$ ,  $\Delta y = u_y \Delta s$ ,  $\Delta z = u_z \Delta s$  ( $d\mathbf{r} = \mathbf{u} \Delta s$ ) とおけば、 $\Delta s \rightarrow 0$  のとき  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  であるから

$$\begin{aligned} & f(Q) - f(P) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \\ &= \left( u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Delta s \end{aligned}$$

したがって  $f(Q) - f(P)$  を  $PQ = \Delta s$  で割って、 $\Delta s \rightarrow 0$  とすれば

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

となる。なお、 $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  のなす角を、それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  とすれば、

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

と表わされる。また、とくに  $\mathbf{u}$  として、 $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  をとれば、

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

であるから、方向微分係数は偏微分係数を一般化したものである。

問1 つぎのベクトル場  $\mathbf{A}$  の流線を求めよ。

$$(1) \quad \mathbf{A} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

問2  $f = xy^2 \sin z$  の、点  $(1, 2, \frac{\pi}{3})$  における単位ベクトル  $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{i}$

+  $\frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{10}}{4} \mathbf{k}$  の方向への方向微分係数を求めよ。

## § 2 勾 配

## スカラー場の勾配

スカラー場  $f = f(x, y, z)$  において,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  を成分とするベクトルを  $f$  の勾配 (gradient) といい,  $\text{grad } f$  で表わす. すなわち,

$$\textcircled{1} \quad \text{grad } f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

であり, スカラー場  $f$  からベクトル場  $\text{grad } f$  が得られる. この右辺を

$$\left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

と略記するとき, ( ) 内の偏微分の記号と基本ベクトルを組合せた演算子を  $\nabla$  で表わし, ハミルトンの演算子といい, デル (del … delta の略?) あるいはナブラ (nabla … 古代ペルシャの竖琴) と読む. この

$$\textcircled{2} \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

を用いれば

$$\textcircled{3} \quad \text{grad } f = \nabla f$$

である.

スカラー場  $f, g$ , 定数  $c$  に対して, つぎの関係がある.

$$\textcircled{4} \quad \text{grad } c = \mathbf{0} \quad (c \text{ を一定値 } c \text{ をとるスカラー場とみなす.})$$

$$\textcircled{5} \quad \text{grad } (f+g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

$$\textcircled{6} \quad \text{grad } (cf) = c \text{ grad } f$$

例 4  $f = xy^2z^3$  のとき

$$\text{grad } f = \nabla (xy^2z^3)$$

$$= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (xy^2z^3) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (xy^2z^3) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (xy^2z^3)$$

$$= y^2z^3 \mathbf{i} + 2xy^2z^3 \mathbf{j} + 3xy^2z^2 \mathbf{k}$$

空間の微小変位  $\Delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  に対する, スカラー場  $f = f(x, y, z)$  の増分  $\Delta f$  は, 全微分

$$\textcircled{7} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}$$

によって近似される.

さて, スカラー場  $f = f(x, y, z)$  の, 点  $P(x, y, z)$  における単位ベクトル  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$  の方向への方向微分係数は

$$\textcircled{8} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla f = \mathbf{u} \cdot \text{grad } f$$

であるから, 記号的に

$$\textcircled{9} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla$$

と見ることができる. また,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$  は  $\text{grad } f$  の  $\mathbf{u}$  成分であることがわかる.

いま,  $\text{grad } f \neq \mathbf{0}$  として,  $\text{grad } f$  と  $\mathbf{u}$  とのなす角を  $\theta$  とすれば,

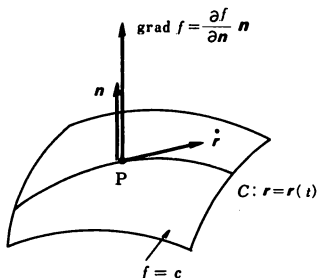
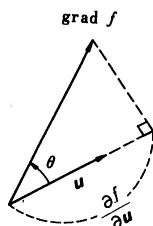
$$\textcircled{10} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \text{grad } f = |\text{grad } f| \cos \theta$$

は,  $\theta = 0$  のとき, つまり  $\mathbf{u}$  が  $\text{grad } f$  と同じ向きをもつとき, 最大値  $|\text{grad } f|$  をとり, つぎの関係が成り立つことがわかる.

$$\textcircled{11} \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}$$

すなわち,  $f$  の勾配  $\text{grad } f$  とは,  $f$  の方向微分係数が最大となる向きをもち, そのときの方向微分係数 (最大値) を大きさにもつベクトルのことである.

つぎに, スカラー場  $f$  における等位面  $f(x, y, z) = c$  上の点  $P(x, y, z)$  における勾配  $\text{grad } f$  は, 点



Pにおいて、その等位面（の接平面）に垂直であることがわかる。なぜならば、点Pを通る等位面  $f=c$  上の任意の曲線  $C$  を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  とするとき、

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c$$

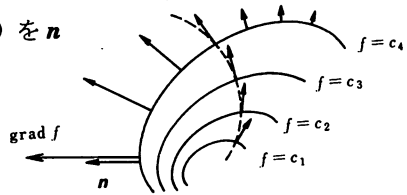
が成り立つから、この両辺を  $t$  で微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

すなわち  $\text{grad } f \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ 、よって  $\text{grad } f \perp \dot{\mathbf{r}}$  であって、 $\dot{\mathbf{r}}$  は曲線  $C$  の接線ベクトルであるからである。あるいは、等位面  $f=c$  上では  $df=0$  であるから、⑦により  $\text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = 0$ 、すなわち  $\text{grad } f \perp d\mathbf{r}$  と考えてもよい。

したがって、等位面  $f=c$  上の点Pにおける単位法線ベクトル（ $f$ の増加する向きにとる）を  $\mathbf{n}$  とすれば

$$\textcircled{12} \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}$$



で表わされる。また、

$$\textcircled{13} \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}$$

である。（問題II 5. 参照）

これから、等間隔の  $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$  に対する等位面群

$$f = c_1, f = c_2, f = c_3, \dots$$

の間隔が、密である（つまっている）ほど  $f$  の  $\mathbf{n}$  方向への増加率を示す  $|\text{grad } f|$  が大きく、疎である（まばらである）ほど  $|\text{grad } f|$  が小さいことがわかる。

このことを2変数関数  $f(x, y)$  の場合で考えれば、地図に描かれている等高線 ( $f=c$ ) の間隔が密であるほど急な傾きをもち、疎であるほどゆるやかな傾きをもつ地形であることに対応しているのである。

ここで2変数の場合について、もう少し調べておこう。

いま,  $xy$  平面上の点  $P'$  を通る等高線  $C': f(x, y) = c$  を考える. これは曲面  $z = f(x, y)$  と平面  $z = c$  との交わりの曲線  $C$  の  $xy$  平面上への正射影である. 2変数関数  $f = f(x, y)$  に対しても, その勾配を

$$\text{grad } f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義することにする. 点  $P'$  において,  $\text{grad } f$  と同じ向きに単位ベクトルを,

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$$

( $\alpha$  は  $\mathbf{n}$  と  $x$  軸 (正の向き) とのなす角) とするとき,  $f$  の  $P$  における  $\mathbf{n}$  方向への方向微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha = |\text{grad } f|$$

であるが, これは, 曲面  $z = f(x, y)$  上の点  $P'$  に対応する点  $P$  (正射影が  $P'$  になる点) で,  $C$  と直交する曲線の勾配 (傾き) を表わしているのである.

**例 5** スカラー場  $f = x^2 y - y^3 z^2$  の点  $P(2, 1, -1)$  において,

(i)  $f$  の勾配は

$$\text{grad } f = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} - 2y^3z\mathbf{k}$$

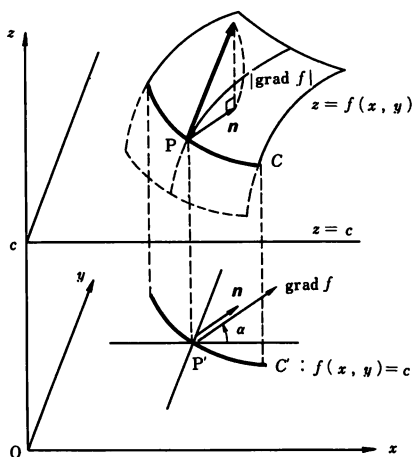
より,  $\text{grad } f(P) = \text{grad } f(2, 1, -1) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(ii)  $f$  の単位ベクトル  $\mathbf{u} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$  の方向への方向微分

係数は,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \text{grad } f = \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot 4 + \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 2 = \frac{16}{\sqrt{14}}$

(iii) 等位面  $f = 3$  の単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{\text{grad } f(P)}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{k}$$



例6  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  ( $\neq 0$ ) のとき,

$$(i) \quad \text{grad } r = \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(ii) \quad \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

(証明)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であるから

$$(i) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \text{同様にして}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad \text{であるから,}$$

$$\nabla r = \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \text{および}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3} \quad \text{を用いる. まとめて書けば,}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \nabla r = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

より一般には  $\nabla(\varphi(r)) = \varphi'(r) \nabla r = \frac{\varphi'(r)}{r} \mathbf{r}$  が成り立つ.

問3  $\text{grad } f$  を求めよ.

$$(1) \quad f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

$$(2) \quad f = \sqrt{x+2y+3z}$$

$$(3) \quad f = x e^y \cos z$$

$$(4) \quad f = \log(x+y^2+z^3)$$

問4 スカラー場  $f = x^3 y^2 \cos z$  で, 点  $(1, 2, 0)$  における等位面  $f = 4$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を求めよ.

問5  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  ( $\neq 0$ ) のとき, つぎの等式を証明せよ.

$$(1) \quad \nabla(r^n) = n r^{n-2} \mathbf{r}$$

$$(2) \quad \nabla(\log r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

## § 3 発 散

## ベクトル場の発散

ベクトル場  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  において,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

によって定義されるスカラーを、 $\mathbf{A}$ の発散 (divergence) といい、 $\operatorname{div} \mathbf{A}$  で表わす。これは形式的に  $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  との内積とみなすことができる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

ベクトル場  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , 定ベクトル (場)  $\mathbf{K}$ , 定数  $c$  に対しては,

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = 0$$

(ただし,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  であっても,  $\mathbf{A}$  が定ベクトルとは限らない.)

$$\textcircled{3} \quad \operatorname{div} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}$$

$$\textcircled{4} \quad \operatorname{div} (c\mathbf{A}) = c \operatorname{div} \mathbf{A}$$

例 7  $\mathbf{A} = x^3 y \mathbf{i} + x y^2 z \mathbf{j} - y z^3 \mathbf{k}$  とするとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 y) + \frac{\partial}{\partial y} (x y^2 z) + \frac{\partial}{\partial z} (-y z^3) \\ &= 3x^2 y + 2x y z - 3y z^2 \end{aligned}$$

さて, 発散の具体的な意味を調べるために, ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に点  $P(x, y, z)$  を中心とし,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸に平行で, それぞれ長さ  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  の辺をもつ微小な直方体を取り, 各面の中心

$$Q_1 \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right), \quad Q_2 \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right), \quad Q_3 \left( x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$

$$Q_4 \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right), \quad Q_5 \left( x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right), \quad Q_6 \left( x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right)$$

に対応するベクトル  $\mathbf{A}$  と、それぞれの面の

(内から外に向かう) 面積ベクトル

$$\Delta \mathbf{S}_1 = \mathbf{i} \Delta y \Delta z$$

$$\Delta \mathbf{S}_2 = -\mathbf{i} \Delta y \Delta z$$

$$\Delta \mathbf{S}_3 = \mathbf{j} \Delta x \Delta z$$

$$\Delta \mathbf{S}_4 = -\mathbf{j} \Delta x \Delta z$$

$$\Delta \mathbf{S}_5 = \mathbf{k} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta \mathbf{S}_6 = -\mathbf{k} \Delta x \Delta y$$

との内積の和

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{A}(Q_1) \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \cdots + \mathbf{A}(Q_6) \cdot \Delta \mathbf{S}_6$$

において、 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(x, y, z)$  として、

$$\mathbf{A}(Q_1) = \mathbf{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\mathbf{A}(Q_2) = \mathbf{A}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx \mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\text{より、} \mathbf{A}(Q_1) \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{A}(Q_2) \cdot \Delta \mathbf{S}_2 \approx \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{i} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

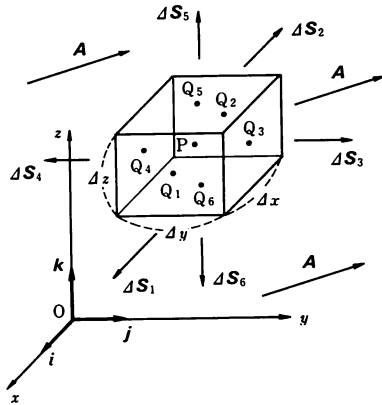
$$\text{同様に } \mathbf{A}(Q_3) \cdot \Delta \mathbf{S}_3 + \mathbf{A}(Q_4) \cdot \Delta \mathbf{S}_4 \approx \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \mathbf{j} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\mathbf{A}(Q_5) \cdot \Delta \mathbf{S}_5 + \mathbf{A}(Q_6) \cdot \Delta \mathbf{S}_6 \approx \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} \sum_{i=1}^6 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i &\approx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

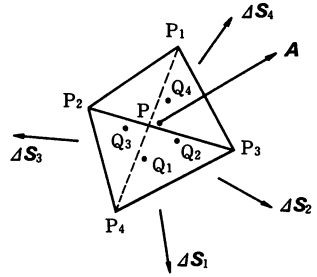
となるので、点  $P$  における  $\mathbf{A}$  の発散は、つぎの極限で与えられる。

$$\textcircled{5} \operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^6 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$





なお、計算を簡単にするために微小な直方体の辺を、座標軸に平行にとったが、これは本質的なことではなく、点Pを中心とする任意の直方体に対しても、同じ結果が得られる。さらに点Pを重心とする体積  $\Delta V$  の微小な4面体（もっとも単純な多面体）を用いた場合、



$$\textcircled{6} \quad \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i \approx \text{div} \mathbf{A} \Delta V$$

$$\textcircled{7} \quad \text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^4 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i}{\Delta V}$$

が成り立つのである。ここに  $Q_i$  と  $\Delta \mathbf{S}_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) は、それぞれ各面の重心と、外向きの面積ベクトルを表わすものとする。

(4面体の場合の証明のヒント)

4面体  $P_1P_2P_3P_4$  で  $P_1, P_2, P_3$  は外から見て左まわりにとる。4面体の重心を  $P(x, y, z)$  とし、 $P_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) の座標を、 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ ,  $b_1+b_2+b_3+b_4=0$ ,  $c_1+c_2+c_3+c_4=0$  として、

$$P_i(x+a_i \Delta x, y+b_i \Delta y, z+c_i \Delta z)$$

で与えると、

$$Q_i \left( x - \frac{a_i \Delta x}{3}, y - \frac{b_i \Delta y}{3}, z - \frac{c_i \Delta z}{3} \right) \quad (P_i \text{ の対面の重心})$$

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_4 P_i} = (a_i - a_4) \Delta x \mathbf{i} + (b_i - b_4) \Delta y \mathbf{j} + (c_i - c_4) \Delta z \mathbf{k}$$

$$\Delta V = \frac{1}{6} [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} \Delta x \Delta y \Delta z$$

が得られる。 $\Delta \mathbf{S}_i$  は  $\mathbf{r}_j$  ( $j \neq i$ ) から計算する (I例7参照)。

ここで、ベクトル  $\mathbf{A}$  が、定常的な流体の流れの速度を表わすものとするば、 $\mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i$  は単位時間に、それぞれの面から外に向って流出する（マイナスのときは内に向って流入する）流体の量（体積）であるから（p. 19, I 例 6）これらの総和  $\sum \mathbf{A}(Q_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i$  は単位時間に微小直方体（微小 4 面体）の中から流出する（マイナスなら中に流入する）流体の量となり、 $\operatorname{div} \mathbf{A}$  は点 P において単位時間に単位体積当り湧出する（マイナスなら吸込まれる）流体の量を表わす。非圧縮性の流体で湧出・消滅がない場合は、流入・流出の量は同じであるから  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  である。このように発散が 0 であるようなベクトル場は、泉なし、わき出しなし、回転的、ソレノイダル（solenoidal, 管状）であるといわれる。

例 8 スカラー場  $f$ , ベクトル場  $\mathbf{A}$  に対して; つぎの関係が成り立つ。

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f$$

(証明)  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  とする。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\ &= f \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left( A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \end{aligned}$$

例 9  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

(証明) 
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \nabla \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

この結果を  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$  と書き,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  を  $\nabla^2$

または  $\Delta$  で表わし, ラプラシアン (Laplacian) という。すなわち

③  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f = \Delta f$

となる.  $\Delta$ は増分と混同しやすいので, 本書では  $\nabla^2$ の方を用いることにする.

ラプラスアンが0となる関数, すなわち偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

の解となる関数  $f$  は調和関数とよばれる.

なお, ベクトル関数  $\mathbf{A}(x, y, z)$  に対しても, つぎのように  $\nabla^2$ を用いる.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

例10  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  のとき,

(i)  $\operatorname{div} \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(ii)  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \left( -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$

(証明) (i)

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(ii)  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$ , 同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}, \quad \text{これらを加えて}$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

問6  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ を求めよ.

(1)  $\mathbf{A} = (x^3 + y^3)\mathbf{i} - (3x^2y + y^2z)\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

(2)  $\mathbf{A} = e^x\mathbf{i} + e^{xy}\mathbf{j} + e^{xyz}\mathbf{k}$

問7  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  のとき次式を証明せよ.

(1)  $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n$

(2)  $\nabla^2 (r^n) = n(n+1)r^{n-2}$

(3)  $\nabla^2 (\log r) = \frac{1}{r^2}$

## § 4 回 転

### ベクトル場の回転

ベクトル場  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$  に対して、形式的な  $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  の内積  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  で表わされるスカラーが、 $\mathbf{A}$  の発散  $\text{div } \mathbf{A}$  であったが、 $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  の外積  $\nabla \times \mathbf{A}$  で表わされるベクトルを、 $\mathbf{A}$  の回転 (rotation, curl) といい、 $\text{rot } \mathbf{A}$  または  $\text{curl } \mathbf{A}$  と書く。  
すなわち

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

である。

ベクトル場  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , 定ベクトル (場)  $\mathbf{K}$ , 定数  $c$  に対しては、

$$\textcircled{2} \quad \text{rot } \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

(ただし、 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  であっても、 $\mathbf{A}$  が定ベクトルとは限らない。)

$$\textcircled{3} \quad \text{rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{rot } (c\mathbf{A}) = c \text{rot } \mathbf{A}$$

が成り立つ。

**例11**  $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{i} + x y^2 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  のとき、

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (z^3) - \frac{\partial}{\partial z} (x y^2) \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y) - \frac{\partial}{\partial x} (z^3) \right\} \mathbf{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) \right\} \mathbf{k} \\ &= (y^2 - x^2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

rot  $\mathbf{A}$  の  $x, y, z$  成分を、それぞれ  $\text{rot}_x \mathbf{A}$ ,  $\text{rot}_y \mathbf{A}$ ,  $\text{rot}_z \mathbf{A}$  で表わすことにする。すなわち

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} \text{rot}_x \mathbf{A} = \mathbf{i} \cdot \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y \mathbf{A} = \mathbf{j} \cdot \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z \mathbf{A} = \mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

である。

いま、 $xy$  平面に平行な平面上に

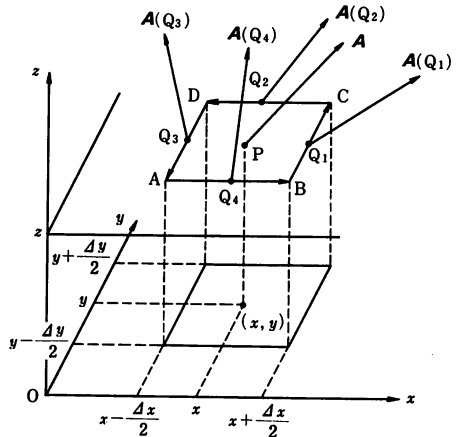
点  $P(x, y, z)$  を中心とし、

$$A \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$

$$B \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$

$$C \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$

$$D \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$



( $\Delta x, \Delta y > 0$ ) を頂点とする微小な長方形  $ABCD$  を作り、 $BC, CD, DA, AB$  の中点を、それぞれ  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  とする。このとき、点  $P$  における回転  $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $z$  成分  $\text{rot}_z \mathbf{A}$  は、つぎのような極限として与えられる。

$$\textcircled{6} \quad \text{rot}_z \mathbf{A} = \mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(Q_1) \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{A}(Q_2) \cdot \overrightarrow{CD} + \mathbf{A}(Q_3) \cdot \overrightarrow{DA} + \mathbf{A}(Q_4) \cdot \overrightarrow{AB}}{\Delta x \Delta y}$$

(証明)  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} \Delta x$ ,  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{j} \Delta y$ ,  $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{i} \Delta x$ ,  $\overrightarrow{DA} = -\mathbf{j} \Delta y$

$$\mathbf{A}(Q_1) = \mathbf{A} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = \mathbf{A} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \Delta x$$

$$A(Q_2) = A\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \approx A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial y} \Delta y$$

$$A(Q_3) = A\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx A - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x$$

$$A(Q_4) = A\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \approx A - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial y} \Delta y$$

ここで、 $A = A(P) = A(x, y, z)$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\partial A_x}{\partial x} + j \frac{\partial A_y}{\partial x} + k \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = i \frac{\partial A_x}{\partial y} + j \frac{\partial A_y}{\partial y} + k \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

である。よって⑥の極限の式で、

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} \cdot j - \frac{\partial A}{\partial y} \cdot i \right) \Delta x \Delta y = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \\ &= \text{rot}_z A \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

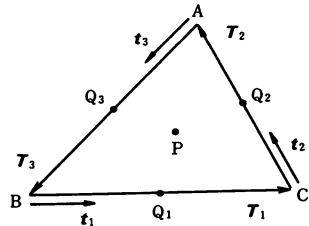
となるから、 $\Delta x \Delta y$  で割って極限をとればよい。

なお、計算を簡単にするために、微小長方形の各辺は座標軸に平行にとってあるが、この長方形を  $xy$  平面に平行な平面上で、 $P$  を中心にして各辺が座標軸に平行でないように回転したものを用いても、同じ極限の式が得られる。さらに単純にして、点  $P$  を重心とする面積  $\Delta S$  の微小3角形  $ABC$  を用いて、

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad & A(Q_1) \cdot \overrightarrow{BC} + A(Q_2) \cdot \overrightarrow{CA} + A(Q_3) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= A(Q_1) \cdot T_1 + A(Q_2) \cdot T_2 + A(Q_3) \cdot T_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 A(Q_i) \cdot t_i \Delta S_i \\ &= \text{rot}_z A \Delta S \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad \text{rot}_z A = k \cdot \text{rot } A$$

$$= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^3 A(Q_i) \cdot t_i \Delta S_i}{\Delta S}$$



が成り立つことが示される。ここで  $\triangle ABC$  (左まわり) の単位法線ベクトルが  $k$

になるようにとり、辺 BC, CA, AB の中点を、それぞれ、 $Q_1, Q_2, Q_3$  とし、

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{T}_1 = \mathbf{t}_1 \Delta s_1, \quad \overrightarrow{CA} = \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2 \Delta s_2, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{T}_3 = \mathbf{t}_3 \Delta s_3$$

( $|\mathbf{T}_i| = \Delta s_i, |\mathbf{t}_i| = 1$ ) とおいた。

(3 角形の場合の証明のヒント)

$\triangle ABC$  の重心を  $P(x, y, z)$  とする。辺 BC を  $x$  軸に平行にとり、 $a + b + c = 0$  として、頂点の座標をそれぞれ

$$A\left(x + a \Delta x, y + \frac{2 \Delta y}{3}, z\right)$$

$$B\left(x + b \Delta x, y - \frac{\Delta y}{3}, z\right)$$

$$C\left(x + c \Delta x, y - \frac{\Delta y}{3}, z\right)$$

で表わせば、

$$Q_1\left(x - \frac{a \Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{3}, z\right), \quad Q_2\left(x - \frac{b \Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{6}, z\right)$$

$$Q_3\left(x - \frac{c \Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{6}, z\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c - b) \Delta x \mathbf{i}, \quad \overrightarrow{CA} = (a - c) \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (b - a) \Delta x \mathbf{i} - \Delta y \mathbf{j}, \quad \Delta S = \frac{c - b}{2} \Delta x \Delta y$$

となることを用いる。

もちろん、

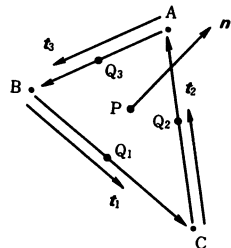
$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \mathbf{i} \cdot \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\text{rot}_y \mathbf{A} = \mathbf{j} \cdot \text{rot} \mathbf{A}$$

についても、それぞれ、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  を単位法線ベクトルにもつ微小な 3 角形の辺に沿っての内積を用い

て、同様な極限の式が成り立つ。

また、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  のかわりに、単位ベクトル  $\mathbf{n}$  をとれば、 $\text{rot} \mathbf{A}$  と  $\mathbf{n}$  との内積、



すなわち  $\text{rot } \mathbf{A}$  の  $n$  成分についても、全く同様に、単位法線ベクトルが  $n$  になる  $\triangle ABC$  (左まわり) を用いて、

$$\textcircled{9} \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \mathbf{t}_i \Delta s_i \approx \text{rot } \mathbf{A} \cdot n \Delta S$$

$$\textcircled{10} \quad n \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \mathbf{t}_i \Delta s_i}{\Delta S}$$

が成り立つのである。このことは、(点  $P$  が速度  $\mathbf{A}$  の流体中あるものとして、)  $n \cdot \text{rot } \mathbf{A}$  が、とくに  $n$  を軸とした場合の、点  $P$  における局所的な回轉(渦巻き)の大きさ(強さ)を示しているものと考えられる。

例12  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  のとき

$$\text{rot } \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

(証明)  $\text{rot}(x\mathbf{i}) = \text{rot}(y\mathbf{j}) = \text{rot}(z\mathbf{k}) = \mathbf{0}$  より明らか。なお、ベクトル場  $\mathbf{r}$  の流線は、原点を通る放射状の直線群である。(例2)

この例のように、回轉が  $\mathbf{0}$  となるベクトル場を、渦なし、非回轉的、ラメラ (lamellar, 層状) であるという。

例13 (i)  $\text{rot}(-y\mathbf{i}) = \text{rot}(x\mathbf{j}) = \mathbf{k}$

(ii)  $\text{rot}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) = 2\mathbf{k}$

(iii)  $\mathbf{a}$  を定ベクトル、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

とするとき、

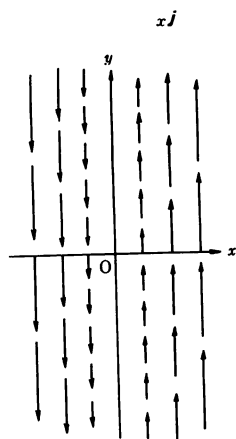
$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$$

(証明) (i) 容易であるから、各自確かめてみること。

(ii) (i) から直ちに得られる。

(iii)  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$  とおけば、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{r} &= (a_y z - a_z y)\mathbf{i} + (a_z x - a_x z)\mathbf{j} \\ &\quad + (a_x y - a_y x)\mathbf{k} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \therefore \operatorname{rot}_x(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial y}(a_{xy} - a_{yx}) - \frac{\partial}{\partial z}(a_{zx} - a_{xz}) \\ &= a_x - (-a_x) = 2a_x \end{aligned}$$

同様に,  $\operatorname{rot}_y(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2a_y$ ,  $\operatorname{rot}_z(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2a_z$  となる.

(注意) (i) ベクトル場  $-y\mathbf{i}$ ,  $x\mathbf{j}$  の流線はそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸に平行な直線群である. しかし, 回転は  $\mathbf{0}$  ではないことに留意すること.

(ii)  $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ . この流線は同心円 (例3) となる.

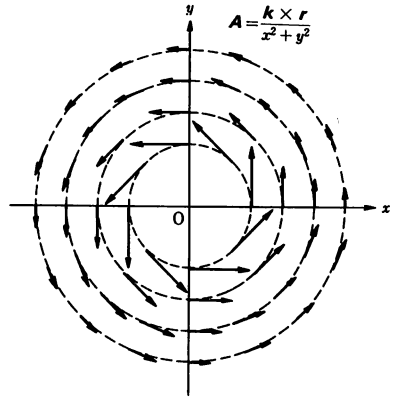
(iii) I 例4の角速度  $\boldsymbol{\omega}$  が一定ならば,  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}$

例14  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{x^2 + y^2}$  ( $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ) の回転

(解)

$$\mathbf{A} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \text{ だから}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$



(注意)  $\mathbf{A}$  は  $z$  軸上の点を除くベクトル場

で,  $|\mathbf{A}|$  は,  $z$  軸からの距離  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$  の逆数である.  $\mathbf{A}$  の流線は  $z$  軸のまわりの同心円となるが, このように回転  $\mathbf{0}$  の場合もある.

問8:  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を求めよ.

(1)  $\mathbf{A} = (x^3 + yz)\mathbf{i} + (y^3 + zx)\mathbf{j} + (z^3 + xy)\mathbf{k}$

(2)  $\mathbf{A} = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}$

(3)  $\mathbf{A} = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x + y}$

問9  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  のとき, つぎの式を証明せよ.

$$\nabla \times \{ \varphi(r) \mathbf{r} \} = \mathbf{0}$$

## § 5 ポテンシャル

## 勾配・発散・回転の合成

これまでに見てきたように、スカラー場の勾配としてベクトル場が得られ、またベクトル場の発散としてスカラー場、回転としてベクトル場が得られるので、grad, div, rot をいろいろに組み合わせた（合成した）スカラー場、ベクトル場が考えられる。たとえば、スカラー場  $f=f(x, y, z)$ 、ベクトル場  $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x, y, z)=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$  に対して、つぎの関係が成り立つ。

- ①  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\nabla^2 f$
- ②  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\mathbf{0}$  ( $\therefore \operatorname{grad} f$  は渦なし)
- ③  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A})=0$  ( $\therefore \operatorname{rot} \mathbf{A}$  は泉なし)
- ④  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A})=\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A})-\nabla^2 \mathbf{A}$

①はすでに § 3 で述べたラプラシアンである。

(②の証明)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right\} \mathbf{j} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right\} \mathbf{k} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(③の証明)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(④の証明)

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\
&= \nabla \times \left\{ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\}
\end{aligned}$$

成分ごとくに計算すれば,

$$\begin{aligned}
\text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\text{rot}_y(\text{rot } \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 A_y$$

$$\text{rot}_z(\text{rot } \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 A_z$$

 $\therefore \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})$ 

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{A}) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \mathbf{A}) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \mathbf{A}) \\
&\quad - \nabla^2 (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\
&= \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}
\end{aligned}$$

ポテンシャルとベクトル・ポテンシャル

ベクトル場  $\mathbf{A}$  に対して,

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$$

となるスカラー場  $\varphi$  が存在するとき,  $\varphi$  を  $\mathbf{A}$  のスカラー・ポテンシャルまたは単にポテンシャル (potential) という. また,

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}$$

となるベクトル場  $\mathbf{B}$  が存在するとき,  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{A}$  のベクトル・ポテンシャルという.

$\varphi$  が  $\mathbf{A}$  のポテンシャルならば  $\varphi + c$  ( $c$  は任意定数) も  $\mathbf{A}$  のポテンシャルとなり,  $\mathbf{B}$  が  $\mathbf{A}$  のベクトル・ポテンシャルならば  $\mathbf{B} + \nabla f$  ( $f$  は任意のスカラー場) も  $\mathbf{A}$  のベクトル・ポテンシャルとなることは, それぞれ,

$$\text{grad } c = \mathbf{0}, \quad \text{rot } (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (2)$$

より直ちにわかる.

例15  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}| (\neq 0)$  のとき

$$-\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{例 6 (ii)})$$

であるから,  $\frac{1}{r} + c$  は  $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  のポテンシャルである.

例16  $\text{rot}(xy\mathbf{k}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$  より,  $xy\mathbf{k}$  は  $x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$  のベクトル・ポテンシャルである. また, これに, たとえば  $\nabla(e^x \sin y)$  を加えた  $e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  も  $x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$  のベクトル・ポテンシャルである.

さて, ②より, ポテンシャルをもつベクトル場は渦なしであり, ③よりベクトル・ポテンシャルをもつベクトル場は泉なしであることがわかるが, 逆に渦なしベクトル場はポテンシャルをもち, 泉なしベクトル場はベクトル・ポテンシャルをもつことが, つぎの例17によって示される.

例17 ベクトル場  $\mathbf{A} = A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}$  の中の1つの点  $(a, b, c)$  を定めておく.

(i)  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{A}$  が渦なし) のとき, スカラー関数  $f$  を

$$f(x, y, z) = \int_a^x A_x(x, y, z) dx + \int_b^y A_y(a, y, z) dy \\ + \int_c^z A_z(a, b, z) dz$$

で定義すれば,  $\text{grad } f = \mathbf{A}$  となる. すなわち,  $\varphi = -f$  は  $\mathbf{A}$  のポテンシャルである. (ただし, スカラー場  $\varphi$  の定義域は  $\mathbf{A}$  の定義域にふくまれているが,  $\mathbf{A}$  の定義域に一致するとは限らない.)

(ii)  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  ( $\mathbf{A}$  が泉なし) のとき, ベクトル関数

$$\mathbf{B} = B_x(x, y, z) \mathbf{i} + B_y(x, y, z) \mathbf{j} + B_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

を 
$$B_x = \int_c^z A_y(x, y, z) dz$$

$$B_y = -\int_c^z A_x(x, y, z) dz + \int_a^x A_z(x, y, c) dx$$

$$B_z = 0$$

として定義すれば,  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{A}$  となる. すなわち  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{A}$  のベクトル・ポテンシャルである. (ただし, ベクトル場  $\mathbf{B}$  の定義域は  $\mathbf{A}$  の定義域にふくまれてはいるが, 一致するとは限らない.)

(証明)

$$(i) \text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ = 0$$

より,  $\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$  である.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x A_x(x, y, z) dx = A_x(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x A_x(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^y A_y(a, y, z) dy$$

$$= \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} A_x(x, y, z) dx + A_y(a, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} A_y(x, y, z) dx + A_y(a, y, z) \\
&= \left[ A_y(x, y, z) \right]_a^x + A_y(a, y, z) \\
&= A_y(x, y, z) - A_y(a, y, z) + A_y(a, y, z) \\
&= A_y(x, y, z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_a^x A_x(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int_b^y A_y(a, y, z) dy \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \int_c^z A_z(a, b, z) dz \\
&= \int_a^x \frac{\partial}{\partial z} A_x(x, y, z) dx + \int_b^y \frac{\partial}{\partial z} A_y(a, y, z) dy \\
&\quad + A_z(a, b, z) \\
&= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} A_z(x, y, z) dx + \int_b^y \frac{\partial}{\partial y} A_z(a, y, z) dy \\
&\quad + A_z(a, b, z) \\
&= \left[ A_z(x, y, z) \right]_a^x + \left[ A_z(a, y, z) \right]_b^y + A_z(a, b, z) \\
&= A_z(x, y, z) - A_z(a, y, z) + A_z(a, y, z) \\
&\quad - A_z(a, b, z) + A_z(a, b, z) \\
&= A_z(x, y, z)
\end{aligned}$$

よって,  $\text{grad } f = \mathbf{A}$  となる.

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } \text{rot}_x \mathbf{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_c^z A_x(x, y, z) dz \\
&= A_x(x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot}_y \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \int_c^z A_y(x, y, z) dz \\
&= A_y(x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_z \mathbf{B} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \int_c^z A_x(x, y, z) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x A_z(x, y, c) dx \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_c^z A_y(x, y, z) dz \\
&= -\int_c^z \frac{\partial}{\partial x} A_x(x, y, z) dz + A_z(x, y, c) \\
&\quad - \int_c^z \frac{\partial}{\partial y} A_y(x, y, z) dz \\
&= -\int_c^z \left\{ \frac{\partial}{\partial x} A_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(x, y, z) \right\} dz \\
&\quad + A_z(x, y, c) \quad \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \right] \\
&= \int_c^z \frac{\partial}{\partial z} A_z(x, y, z) dz + A_z(x, y, c) \\
&= \left[ A_z(x, y, z) \right]_c^z + A_z(x, y, c) \\
&= A_z(x, y, z) - A_z(x, y, c) + A_z(x, y, c) \\
&= A_z(x, y, z)
\end{aligned}$$

よって、 $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{A}$  が成り立つ。

(注意) 任意のベクトル場は、渦なしベクトル場と泉なしベクトル場の和として表わされることが知られている。(ヘルムホルツの定理)

問10 つぎのベクトル場が渦なしであることを確かめ、そのポテンシャルを求めよ。

(1)  $\mathbf{A} = 2xe^{yz} \mathbf{i} + x^2ze^{yz} \mathbf{j} + x^2ye^{yz} \mathbf{k}$

(2)  $\mathbf{A} = y(2x+y) \cos z \mathbf{i} + x(x+2y) \cos z \mathbf{j} - xy(x+y) \sin z \mathbf{k}$

問11 つぎのベクトル場が泉なしであることを確かめ、そのベクトル・ポテンシャルを求めよ。

(1)  $\mathbf{A} = xy^2 \mathbf{i} - x^2y \mathbf{j} + (x^2 - y^2) z \mathbf{k}$

(2)  $\mathbf{A} = x^2yz e^z \mathbf{i} + xy^2z e^z \mathbf{j} - 4xy(z-1) e^z \mathbf{k}$

## 問題 III

1. スカラー場  $f, g$ , ベクトル場  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  について, つぎの公式を証明せよ.

$$(1) \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$(2) \quad \nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$$

$$(3) \quad (\mathbf{A} \cdot \nabla) f = \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(4) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$$(6) \quad \nabla \times (f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

$$(7) \quad \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

(6), (7)より  $\nabla f \times \nabla g$  は泉なしで,  $f \nabla g$  はそのベクトル・ポテンシャルであることがわかる.)

2. ベクトル場  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に関する, つぎの公式を証明せよ.

$$(1) \quad \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

(これから,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  ともに渦なしならば,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は泉なしであることがわかる.)

$$(2) \quad \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$(3) \quad \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{B}$$

3.  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  ( $\neq 0$ ) で,  $\mathbf{a}$  が定ベクトルのとき, 次式を証明せよ.

$$(1) \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} = - \operatorname{grad} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mathbf{a}}{r^3} + \frac{3 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}$$



## 第IV章 線積分と面積分

### § 1 線積分

#### 定積分と線積分

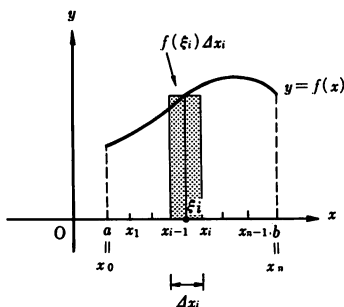
(連続) 関数  $f(x)$  に対して, 定積分  $\int_a^b f(x) dx$  ( $a < b$ ) は,  $x$  軸上の区間

$a \leq x \leq b$  を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

の  $(n+1)$  個の点により,  $n$  個の微小な区間 (長さ  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ) に分割し, それぞれの区間ごとの  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$  となる任意の点  $\xi_i$  における  $f(x)$  の値  $f(\xi_i)$  と  $\Delta x_i$  との積  $f(\xi_i) \Delta x_i$  の総和を作り, 各区間の長さが, 限りなく小さくなる (0 に近づく) ように分割数を限りなく増していくときの極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



として定義される. このことをつぎのように略記する.

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x$$

2 変数関数  $f = f(x, y)$  に対して, 定積分のときの積分区間 ( $x$  軸上の線分) のかわりに,  $xy$  平面上の 2 点  $A, B$  (一致してもよい) を  $A$  から  $B$  に向って結ぶ曲線  $C$  をとり, この曲線を  $(n+1)$  個の点  $A = P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_{n-1}, P_n = B$  によって微小な弧  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  (長さ  $\Delta s_i$ ) に分割し, それぞれの弧上の点  $Q_i (\xi_i, \eta_i)$  における  $f(Q_i) \Delta s_i = f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$  の総和の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta s_i$$

として、曲線  $C$  に沿っての  $f$  の線積分が定義され、 $\int_C f ds$ ,  $\int_C f(x, y) ds$  で表わされる。略式に書けばつぎのようになる。

$$\textcircled{2} \int_C f ds = \int_C f(x, y) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C f(x, y) \Delta s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C f \Delta s$$

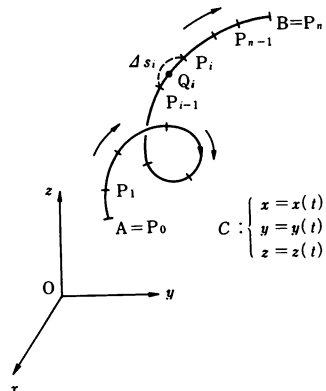
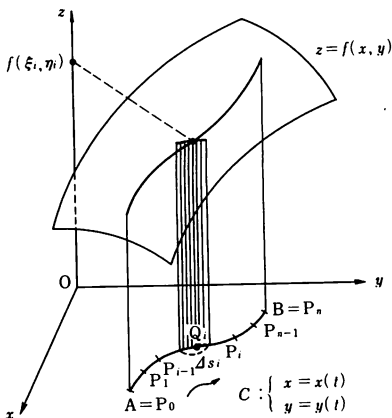
$C$  上で  $f \geq 0$  のとき、 $\int_C f ds$  は、 $z$  軸に平行な直線が  $C$  に沿って動くときに見える曲面の、 $xy$  平面と曲面  $z = f(x, y)$  にはさまれる部分の面積を表わす。

3変数関数  $f = f(x, y, z)$  に対しても (スカラー場  $f$  内の) 空間曲線  $C$  を用いて、曲線  $C$  に沿っての線積分が、つぎのように定義される。

$$\textcircled{3} \int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds$$

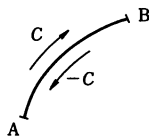
$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C f(x, y, z) \Delta s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C f \Delta s$$

なお、 $A$  から  $B$  に向う (始点  $A$ , 終点  $B$  の) 曲線  $C$  を逆に  $B$  から  $A$  にたどる (始点  $B$ , 終点  $A$  の) 曲線を  $-C$  で表わし、



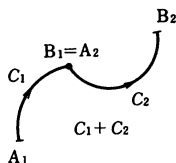
$$\textcircled{4} \int_{-C} f ds = - \int_C f ds$$

とする. また, 2つの曲線  $C_1, C_2$  で,  $C_1$  の終点が,  $C_2$  の始点に一致するとき,  $C_1, C_2$  をつないだ曲線を  $C_1 + C_2$  で表わす.



$$\textcircled{5} \int_{C_1+C_2} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

である.

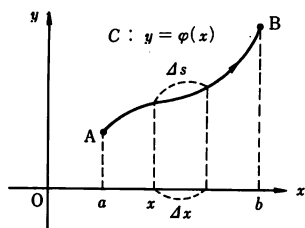


### 平面上の線積分

平面曲線  $C$  の方程式が

$$y = \varphi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

(始点  $A(a, \varphi(a))$ , 終点  $B(b, \varphi(b))$ ) で与



えられているとき,  $\int_C f ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C f \Delta s$  で,  $\Delta s \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$  である

ことにより, 定積分に帰着され,

$$\textcircled{6} \int_C f ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2} dx$$

が得られるが,  $\Delta s$  のかわりに ( $x$  軸上への正射影の長さ)  $\Delta x$  を用いた

$$\textcircled{7} \int_C f dx = \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx$$

を  $f$  の  $C$  に沿っての  $x$  に関する線積分という. なお,  $C$  と逆向き (始点  $B$ , 終点  $A$ ) の曲線  $-C$  に対しては,

$$\textcircled{8} \int_{-C} f(x, y) dx = \int_b^a f(x, \varphi(x)) dx = - \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx$$

である. また  $C$  が  $y$  軸に平行な線分の場合

$$\textcircled{9} \int_C f dx = 0 \text{ とする.}$$

同様に  $C$  が  $x = \psi(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) (始点  $A(\psi(c), c)$ ,  $B(\psi(d), d)$ )  
 で与えられていれば,  $y$  に対する線積分

$$\textcircled{10} \int_c^d f dy = \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f(\psi(y), y) dy$$

が得られる. もちろん

$$\textcircled{11} \int_{-c}^c f dy = \int_a^c f(\psi(y), y) dy$$

で,  $x$  軸に平行な線分  $C$  に対しては

$$\textcircled{12} \int_c^c f dy = 0 \text{ とする.}$$

### 空間における線積分

空間曲線  $C$  の方程式が, 曲線の弧長  $s$  を助変数として,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) &= x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \\ (\alpha \leq s \leq \beta) \end{aligned}$$

で与えられているとき,  $C$  上で  $f(x, y, z) = f(x(s), y(s), z(s))$  は  $s$  の関数であるから, 線積分の定義により

$$\textcircled{13} \int_C f ds = \int_\alpha^\beta f(x(s), y(s), z(s)) ds$$

のように定積分に帰着される.

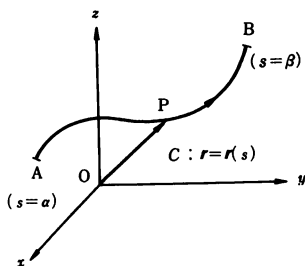
また,  $C$  の方程式が一般の助変数  $t$  により

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (\alpha \leq t \leq b)$$

で表わされる場合,  $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$  であるから,  $\alpha = s(a) \leq s(t) \leq s(b) = \beta$  として,

$$\textcircled{14} \int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

となるが,  $ds$  のかわりに  $dt$ ,  $dx (= \dot{x} dt)$ ,  $dy (= \dot{y} dt)$ ,  $dz (= \dot{z} dt)$  を用い



たものも、 $f$ の $C$ に沿っての線積分といい、それぞれ

$$\textcircled{15} \int_C f dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) dt$$

$$\textcircled{16} \int_C f dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

$$\textcircled{17} \int_C f dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} dt$$

$$\textcircled{18} \int_C f dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

で表わされる。

例1 曲線 $C$ を $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とする。

$x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$  より,

$$dx = \dot{x} dt = 3 dt, \quad dy = \dot{y} dt = 6t dt,$$

$$dz = \dot{z} dt = 6t^2 dt,$$

$$ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = 3(1 + 2t^2) dt$$

であるから、 $f = x^2yz$  に対して

$$\int_C f dt = \int_0^1 (3t)^2 \cdot 3t^2 \cdot 2t^3 dt = \int_0^1 54t^7 dt = \frac{27}{4}$$

$$\int_C f dx = \int_0^1 54t^7 \cdot 3 dt = 162 \int_0^1 t^7 dt = \frac{81}{4}$$

$$\int_C f dy = \int_0^1 54t^7 \cdot 6t dt = 324 \int_0^1 t^8 dt = 36$$

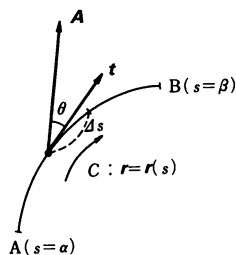
$$\int_C f dz = \int_0^1 54t^7 \cdot 6t^2 dt = 324 \int_0^1 t^9 dt = \frac{162}{5}$$

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^1 54t^7 \cdot 3(1 + 2t^2) dt \\ &= 162 \int_0^1 (t^7 + 2t^9) dt = \frac{1053}{20} \end{aligned}$$

## ベクトルの線積分

これまで扱ってきたのは、スカラー関数の線積分であるが、ベクトル関数の線積分（ベクトル場における線積分）はつぎのように定義される。ベクトル場

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}(x, y, z) \\ &= A_x(x, y, z) \mathbf{i} + A_y(x, y, z) \mathbf{j} \\ &\quad + A_z(x, y, z) \mathbf{k} \end{aligned}$$



内の曲線  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$  ( $s$  は  $C$  の弧長で、 $\alpha \leq s$

$\leq \beta$ ) の単位接線ベクトルを、 $\mathbf{t} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  とし、 $C$  上の各点で  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{t}$  の内積

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = A_t$  ( $\mathbf{A}$  の  $\mathbf{t}$  成分) を作り、その  $C$  に沿っての線積分

$$\textcircled{19} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C A_t \Delta s$$

を、 $\mathbf{A}$  の  $C$  に沿っての線積分といい

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \left( d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds \text{ に注意} \right)$$

とも書く。ここで  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}$  は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = A_t = A \cos \theta \quad (A = |\mathbf{A}|, \theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{t}))$$

$$= \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds}$$

のように、いろいろと表わされるから

$$\begin{aligned} \textcircled{20} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C A_t ds = \int_C A \cos \theta ds \\ &= \int_\alpha^\beta \left( A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

のようにも書ける。ここで

$$\int_\alpha^\beta A_x \frac{dx}{ds} ds = \int_\alpha^\beta A_x(x(s), y(s), z(s)) x'(s) ds$$

$$= \int_C A_x dx$$

などであるから,

$$\textcircled{21} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz$$

となるが, この右辺を簡単に

$$\int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz), \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

のように書くことも多い.  $A_x dx + A_y dy + A_z dz$  は  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  と  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$  との内積とみればよい.

つぎに, 曲線  $C$  の方程式が, 一般の助変数  $t$  により  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) で与えられているときも,  $\alpha = s(a) \leq s(t) \leq s(b) = \beta$  として, 置換積分法により,

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} A_x(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx}{ds} ds \\ &= \int_a^b A_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} dt \end{aligned}$$

などから, つぎのように計算すればよい.

$$\textcircled{22} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left( A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt$$

( $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} ds = \dot{\mathbf{r}} dt$  とみる.)

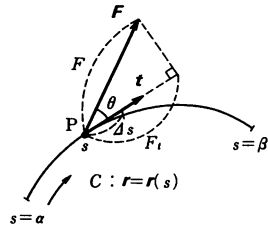
例2 曲線  $C$  を, 例1と同じく  $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) として,  $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  の  $C$  に沿っての線積分を求めてみよう.

$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt = (3\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}) dt$  であるから

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \{ (3t)^2 \cdot 3t^2 \cdot 3 - 3t \cdot 3t^2 \cdot 6t + 2t^3 \cdot 6t^2 \} dt \\ &= \int_0^1 (27t^4 + 12t^5) dt = \frac{37}{5} \end{aligned}$$

例3 (曲線Cに沿って力のなす仕事)

力の(ベクトル)場  $\mathbf{F}$  の作用により, 質点 P が  
 曲線  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  ( $\alpha \leq s \leq \beta$ ) に沿って動くとき,  
 $F = |\mathbf{F}|$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{r}'$  (Cの単位接線ベクトル),  
 $\theta = \angle(\mathbf{F}, \mathbf{t})$ ,  $F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = F \cos \theta$  とすれば,  
 $\mathbf{F}$  のなす仕事は



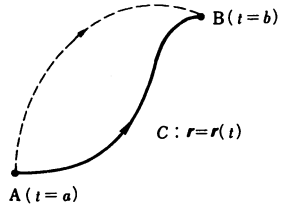
$$W = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C F_t \Delta s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C F \Delta s \cos \theta = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

で与えられる。(I 例1 参照)

例4 スカラー場  $f = f(x, y, z)$  内で,

$$\mathbf{A} = \text{grad } f = -\text{grad } \varphi$$

(すなわち,  $\varphi = -f$  をポテンシャルにもつベクトル場) の, 2点 A, B を (A から B に向って) 結ぶ曲線 C に沿っての線積分は



$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = \varphi(A) - \varphi(B)$$

となって, 曲線 C の選び方によらず, 2点 A, B におけるポテンシャルの差として値が決まる。

(解) 曲線 C の方程式を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) とすれば,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \text{grad } f \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_a^b \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left[ f(x(t), y(t), z(t)) \right]_a^b \\
&= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

(注意) とくにAとBが一致するとき、すなわちCが閉曲線であるとき、この積分の値は0となる。なお、閉曲線に沿っての線積分をとくに  $\oint$  で表わす書物も多いが、本書では用いない。

### その他の線積分

これまでに述べてきた線積分のほかに、スカラー場  $f = f(x, y, z)$  や、ベクトル場  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  に対して、つぎの形の線積分が用いられることもある。 $\mathbf{t}$  は曲線  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  の単位接線ベクトルである。

$$\textcircled{23} \quad \int_C \mathbf{A} ds = \mathbf{i} \int_C A_x ds + \mathbf{j} \int_C A_y ds + \mathbf{k} \int_C A_z ds$$

$$\textcircled{24} \quad \int_C f d\mathbf{r} = \int_C f \mathbf{t} ds = \mathbf{i} \int_C f dx + \mathbf{j} \int_C f dy + \mathbf{k} \int_C f dz$$

$$\textcircled{25} \quad \int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \times \mathbf{t} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{i} \int_C (A_y dz - A_z dy) + \mathbf{j} \int_C (A_z dx - A_x dz) \\
&\quad + \mathbf{k} \int_C (A_x dy - A_y dx)
\end{aligned}$$

問1 曲線Cを、 $\mathbf{r} = (t^3 + 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + (t^3 - 3t)\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とするとき、 $f = xz + 3y$  について、Cに沿ってのつぎの線積分を求めよ。

$$(1) \int_C f dt \quad (2) \int_C f dx \quad (3) \int_C f dy$$

$$(4) \int_C f dz \quad (5) \int_C f ds$$

問2  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ.

(1)  $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2)  $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r} = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + b t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

(3)  $\mathbf{A} = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2)$

(4)  $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r} = \mathbf{i} \cos^3 \theta + \mathbf{j} \sin^3 \theta + \mathbf{k} \tan \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$

(5)  $\mathbf{A} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

(イ)  $C: \mathbf{r} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(ロ)  $C$  は  $xy$  平面上の4点  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$  を頂点とする正方形 (左まわり). ( $C$  を,  $C_1: \mathbf{r} = (t+1)\mathbf{i}$ ,  $C_2: \mathbf{r} = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ ,  $C_3: \mathbf{r} = (2-t)\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $C_4: \mathbf{r} = \mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1)$  にわけて計算せよ.)

問3  $f = x^3yz - 2xy^2z^2$

$\mathbf{A} = (3x^2yz - 2y^2z^2)\mathbf{i} + (x^3z - 4xyz^2)\mathbf{j} + (x^3y - 4xy^2z)\mathbf{k}$

とする.

(1)  $\mathbf{A} = \text{grad } f$  であることを確かめよ.

(2) 原点  $O$  から点  $A(3, 2, 1)$  にいたる任意の曲線  $C$  について, 線積分

$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ.

## § 2 面積分

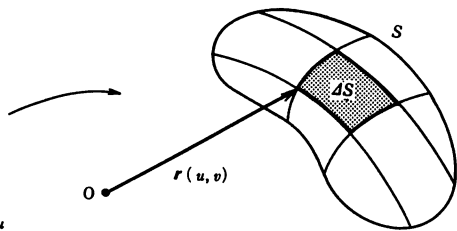
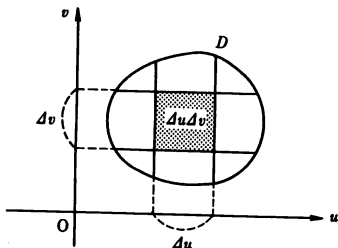
## スカラーの面積分

スカラー場  $f = f(x, y, z)$  内にある曲面  $S$  を  $n$  個の微小な部分  $\Delta S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ , 面積も同じく  $\Delta S_i$  で表わすものとする) に分割し, それぞれの上の点  $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  における  $f(x, y, z)$  の値  $f(Q_i)$  と  $\Delta S_i$  との積  $f(Q_i)\Delta S_i = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$  の総和をつくり, 各微小部分がそれぞれ1点に縮まるように,  $n$  を限りなく大きくしていくときの極

限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(Q_i)\Delta S_i$  として, 曲面  $S$  上における  $f$  の面積分を定義し,  $\int_S f dS$ ,

$\int_S f(x, y, z) dS$  で表わす. 略式に書けば,

$$\textcircled{1} \int_S f dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_S f \Delta S$$



いま, 曲面  $S$  が,  $uv$  平面上の領域  $D$  で定義されていて, その方程式が

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

で与えられているとき,  $u$  軸,  $v$  軸に平行な直線による  $D$  の分割に対応して,  $S$  を微小部分に分割するものとすれば, 第II章 § 3 により,

$$\Delta S = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

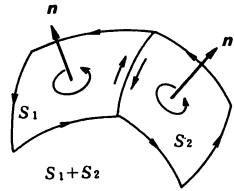
となるから

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int_S f dS &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_S f \Delta S = \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum_D f \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \end{aligned}$$

が得られる。

曲面  $S$  と逆向き (おもてとうらがが逆になっている) 曲面を  $-S$  で表わし、

$$\textcircled{3} \quad \int_{-S} f dS = - \int_S f dS$$



とする。また、2つの曲面  $S_1, S_2$  を向きを保ったまま

で (おもてとうらが、つなぎ目で逆にならないように) 境界の曲線部分でつないだ曲面を  $S_1+S_2$  で表わす。

$$\textcircled{4} \quad \int_{S_1+S_2} = \int_{S_1} + \int_{S_2}$$

である。

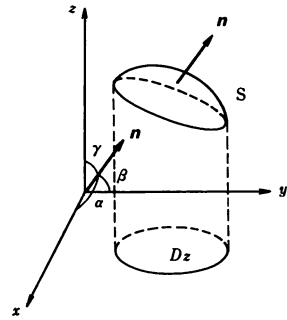
$S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の方向余弦を

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

とすると、 $\cos \alpha dS = dy dz, \cos \beta dS = dz dx,$

$\cos \gamma dS = dx dy$  と書いて、 $f \cos \alpha,$

$f \cos \beta, f \cos \gamma$  の面積分をつぎのように表わす。



$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} \int_S f \cos \alpha dS = \int_S f dy dz \\ \int_S f \cos \beta dS = \int_S f dz dx \\ \int_S f \cos \gamma dS = \int_S f dx dy \end{cases}$$

もし、とくに、曲面  $S$  の方程式が、 $S$  の  $xy$  平面上への正射影  $D_z$  上で

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in D_z)$$

で与えられているものとすれば、⑥第三式はつぎの2重積分を意味する。

$$\textcircled{6} \int_S f dx dy = \pm \iint_{D_z} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

ここで、複号は、 $\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$  のとき+、 $\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$  のとき-をとる。また  $\cos \gamma = 0$  ( $\mathbf{n} \perp \mathbf{k}$ ) のとき、 $S$  は  $xy$  平面に垂直な曲面であって、

$$\int_S f dx dy = 0 \text{ である。}$$

例5 曲面  $S$  (円錐面の一部)

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

$$\left( (u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

の上における  $f = xy^2 z^3$  の面積分。

(解)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}$$

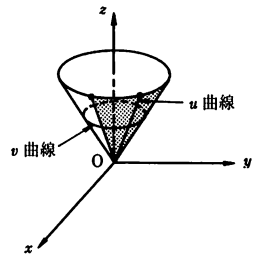
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \cos v \mathbf{i} - u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{2} u$$

$$\therefore \int_S f dS = \iint_D u \cos v \cdot (u \sin v)^2 \cdot u^3 \cdot \sqrt{2} u du dv$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 u^7 du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \cos v dv$$

$$= \sqrt{2} \left[ \frac{u^8}{8} \right]_0^1 \times \left[ \frac{\sin^3 v}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$



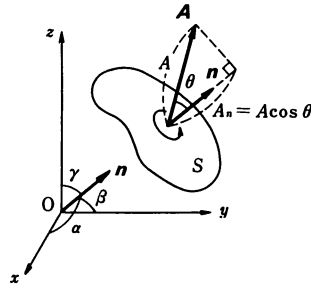
ベクトルの面積分

ベクトル場  $\mathbf{A} = A(x, y, z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  内の曲面  $S$  の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とするとき、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{n}$  の内積、すなわち  $\mathbf{A}$  の  $\mathbf{n}$  成分

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = A_n = A \cos \theta \quad (A = |\mathbf{A}|, \theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{n}))$$

の面積分を、 $\mathbf{A}$  の  $S$  上における面積分といい、 $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  とも書く。すなわち

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S A_n dS \\ &= \int_S A \cos \theta dS \end{aligned}$$



である。ここに  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  は  $S$  のベクトル面積素である。

ここで、 $\mathbf{n}$  が  $x, y, z$  軸となす角を、それぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とすれば、

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$$

であるから

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS \\ &= \int_S A_x \cos \alpha dS + \int_S A_y \cos \beta dS + \int_S A_z \cos \gamma dS \\ &= \int_S A_x dy dz + \int_S A_y dz dx + \int_S A_z dx dy \\ &= \int_S (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy) \end{aligned}$$

が得られる。

曲面  $S$  の方程式が  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) で与えられていて、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$

の向きが、 $S$  の向き ( $\mathbf{n}$  の向き) と同じであるとすれば、

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

であるから

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{A} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \\ &= \iint_D \left[ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] du dv \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv \end{aligned}$$

となり,  $S$ の向きと逆向きの場合は

$$\textcircled{10} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D \left[ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] du dv$$

である.

**例6** 曲面 $S$ が例5と同じであるとき,  $S$ 上における

$$\mathbf{A} = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

の面積分を求める.

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad \mathbf{A} &= (u \cos v)(u \sin v)\mathbf{i} + (u \cos v)u\mathbf{j} + (u \sin v)u\mathbf{k} \\ &= u^2 \cos v \sin v \mathbf{i} + u^2 \cos v \mathbf{j} + u^2 \sin v \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \cos v \mathbf{i} - u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{A} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) &= (u^2 \cos v \sin v)(-u \cos v) \\ &\quad + (u^2 \cos v)(-u \sin v) + (u^2 \sin v)u \\ &= u^3 (-\cos^2 v \sin v - \cos v \sin v + \sin v) \end{aligned}$$

これの $D$ 上における2重積分を求めればよい.

$$\begin{aligned}
& \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_0^1 u^3 du \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 v \sin v - \cos v \sin v + \sin v) dv \\
&= \left[ \frac{u^4}{4} \right]_0^1 \times \left[ \frac{\cos^3 v}{3} + \frac{\cos^2 v}{2} - \cos v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

(なお, この場合,  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v \mathbf{i} - \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k})$  である.)

例7  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  とする. また,  $S$  を原点  $O$  を中心にもつ球面とし,  $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は, 球面の外向きとすると,

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi$$

(証明)  $S$  の半径を  $a$  とすれば,  $S$  上の点  $P(x, y, z)$  に対して,

$$\mathbf{r} = a\mathbf{n}, \quad r = a$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S \frac{a\mathbf{n}}{a^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{a^2} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \frac{1}{a^2} \int_S dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi
\end{aligned}$$

### その他の面積分

以上に述べた面積分のほかに, スカラー場  $f$ , ベクトル場  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  に対して, つぎの形の面積分が用いられることもある.  $\mathbf{n}$  は曲面  $S$  の単位法線ベクトルで, その方向余弦を  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  とする.

$$\textcircled{11} \quad \int_S \mathbf{A} dS = \mathbf{i} \int_S A_x dS + \mathbf{j} \int_S A_y dS + \mathbf{k} \int_S A_z dS$$



$$\begin{aligned}
 \textcircled{12} \quad \int_S f d\mathbf{S} &= \int_S f \mathbf{n} dS \\
 &= \mathbf{i} \int_S f \cos \alpha dS + \mathbf{j} \int_S f \cos \beta dS + \mathbf{k} \int_S f \cos \gamma dS \\
 &= \mathbf{i} \int_S f dy dz + \mathbf{j} \int_S f dz dx + \mathbf{k} \int_S f dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{13} \quad \int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{n} dS \\
 &= - \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = - \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \\
 &= \mathbf{i} \int_S (A_y \cos \gamma - A_z \cos \beta) dS \\
 &\quad + \mathbf{j} \int_S (A_z \cos \alpha - A_x \cos \gamma) dS \\
 &\quad + \mathbf{k} \int_S (A_x \cos \beta - A_y \cos \alpha) dS
 \end{aligned}$$

問4 曲面 $S$ の方程式を

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

$$(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi)$$

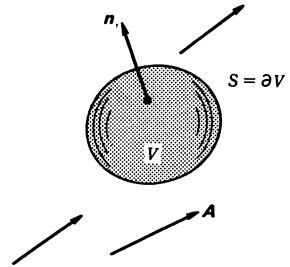
とする.

- (1)  $f = x^2 + y^2 + z^2$  の $S$ 上における面積分を求めよ.
- (2)  $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  の $S$ 上における面積分を求めよ.

### § 3 積分定理

#### 発散定理

$xyz$ 空間内で、閉曲面  $S$  で囲まれた領域を  $V$  とする。 $S$  を  $V$  の境界といい、 $\partial V$  で表わす。 $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $V$  の内側から外側に向けて引くものとする。



$V$  における重積分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

を簡単に  $\int_V f dV$  と書き、 $V$  における  $f$  の体積分ということがある。

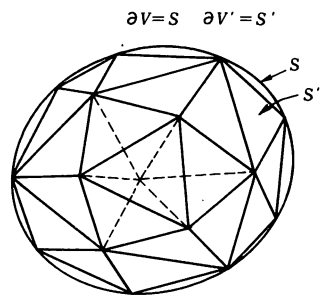
ベクトル場  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$  内の領域  $V$  における体積分と、 $V$  の境界  $S = \partial V$  上における面積分の間に、つぎの重要な関係がある。

**発散定理 (ガウスの定理)**

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

(証明)

領域  $V$  の内部を微小な 4 面体 (体積  $\Delta V$ ) で埋めつくし、 $V$  の近似領域  $V'$  をつくる。境界  $S = \partial V$  が、それに面した 4 面体の面 ( $S$  上の 3 点を頂点とする 3 角形) の辺と辺を接してつなぎ合せたもので近似されるようにする。この近似面を  $S'$  と書こう。すなわち  $S' = \partial V'$  である。なお、 $S$  に面しない 4 面体の面は、必ず 2 つの 4 面体の共通面になるようにしておく。



各微小 4 面体ごとに、4 つの面 (3 角形) の重心  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) におけ

る  $\mathbf{A}(Q_i)$  と面積ベクトル  $d\mathbf{S}_i = \mathbf{n}_i dS_i$  との内積をつくり、それらを  $V'$  を構成する4面体の面全部について加えた  $\sum_{V'} \mathbf{A}(Q) \cdot \mathbf{n} dS$  は、内部の隣り合った4面体の共有面では、打ち消し合って、結局  $S'$  を構成する面上だけで総和をとったもの  $\sum_{S'} \mathbf{A}(Q) \cdot \mathbf{n} dS$  になる. ところで、各微小4面体の重心  $P$  では、p. 60

⑥により  $\operatorname{div} \mathbf{A} dV \approx \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \mathbf{n}_i dS_i$  であるから

$$\sum_{V'} \operatorname{div} \mathbf{A} dV \approx \sum_{S'} \mathbf{A}(Q) \cdot \mathbf{n} dS$$

となり、両辺で微小4面体を限りなく小さくしていくときの極限は一致して

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

が得られる.

(注意) この定理の領域  $V$  は、その中に(いくつかの)空洞をもつものであってもよい. このとき  $S = \partial V$  は、外側の曲面  $S_1$  と内側の曲面  $S_2, \dots$  (単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は空洞の方に向く) とを合わせたものである ( $\partial V = S_1 + S_2 + \dots$ ). なお、点  $P$  がこの空洞の中にあっても、 $P$  は  $V$  の外部にあるという.

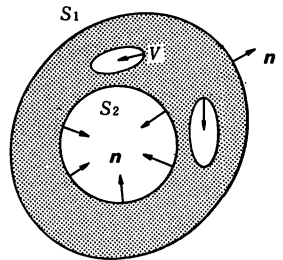
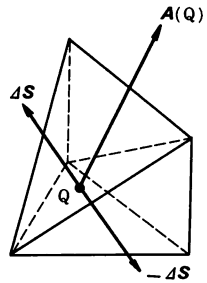
**例8**  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  とする.

(i) 原点  $O$  が閉曲面  $S$  の外部にあるとき

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

(ii) 原点  $O$  が閉曲面  $S$  の内部にあるとき

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi$$



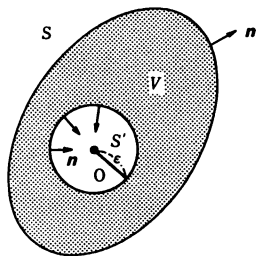
(証明)  $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  は原点  $O$  以外で意味をもつベクトル場で,  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$  である.

(Ⅲ 例10(ii), p. 62)

(i)  $S = \partial V$  とすれば, 発散定理により,

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = 0$$

(ii)  $O$  を中心とし,  $S$  の内部にふくまれる半径  $\varepsilon$  の球面  $S'$  をとる. 単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $S$  では外側に向けてとってあるが,  $S'$  では内側に向けてと



る.  $S$  と  $S'$  とで囲まれた領域を  $V$  とすれば,  $\partial V$  は  $S$  と  $S'$  とを合わせたもの ( $\partial V = S + S'$ ) で

$$0 = \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS$$

であるが, 球面  $S'$  上では例7のときと逆向きになっているので

$$\int_{S'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{-S'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi \text{ となり,}$$

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \text{ が得られる.}$$

例9  $\mathbf{A}$  を全空間でベクトル・ポテンシャルをもつベクトル場,  $S$  を任意の閉

曲面とすると,  $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0$  である.

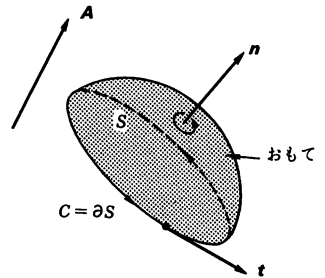
(証明)  $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ ,  $S = \partial V$  とする.

発散定理および  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0$  を用いれば,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

ストークスの定理

曲面  $S$  のへりが閉じた曲線  $C$  であって、 $C$  の向きを、 $S$  のおもて側で  $S$  の内部を左方に見ながら回るようにとるとき、 $C$  を  $S$  の境界といい、 $\partial S$  で表わす。



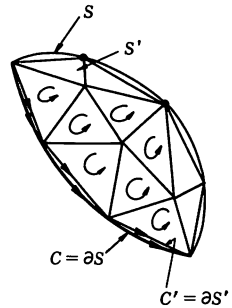
ベクトル場  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$  内の、へりをもつ曲面  $S$  上における面積分と、 $S$  のへり (境界)  $C = \partial S$  に沿っての線積分の間に、つぎの重要な関係がある。

ストークスの定理

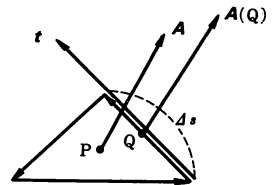
$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

(証明)

曲面  $S$  を、 $S$  上に頂点をもつ微小な3角形 (面積  $\Delta S$ ) を辺と辺が接するようにつなぎ合わせた面  $S'$  で近似させる。境界  $C = \partial S$  はそれに面した3角形の辺 ( $C$  上の2点を結ぶ線分) をつなぎ合わせてできる閉じた折れ線 (多角形)  $C' = \partial S'$  で近似される。



すべての微小3角形の3つの辺ごとに、中点  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) における  $\mathbf{A}$  と辺の大きさ ( $\Delta s_i$ ) と辺の向き ( $S$  のおもてからみて左まわりの向き) をもつベクトル  $\mathbf{t}_i \Delta s_i$  との内積をつくり、それらを  $S'$  を構成する3角形の辺全体について加えたもの  $\sum_{S'} \mathbf{A}(Q) \cdot \mathbf{t} \Delta s$



は、隣り合った3角形の共通辺では打ち消し合って、結局  $C'$  を構成する辺だけで総和をとったもの  $\left( \sum_{C'} \right)$  になる。ところで各微小3角形の重心  $P$  では p. 67 ㊦ により、

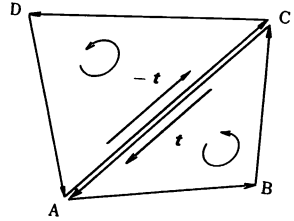
$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S \approx \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}(Q_i) \cdot \mathbf{t}_i \Delta s_i$$

であるから

$$\sum_{S'} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S \approx \sum_{C'} \mathbf{A}(Q) \cdot \mathbf{t} \Delta s$$

ここで微小3角形を限りなく小さくする極限をとり、

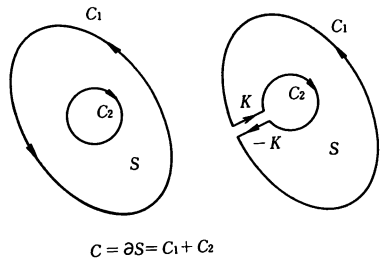
$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$



が得られる。(  $\Delta S, \Delta s; dS, ds; \partial S$  を混同しないこと.)

(注意) この定理の曲面  $S$  の境界  $C = \partial S$  は、2つ以上の閉曲線であってもよい。たとえば、 $S$  が閉曲線  $C_1$  とその内側のもう1つの閉曲線  $C_2$  とで囲まれているときは、

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$



とすればよい。ただし、 $C_2$  は  $C_1$  と逆に右まわりにとる。これは  $C_1$  と  $C_2$  を結ぶ往復路  $K, -K$  をつけ加えて  $C = C_1 (+K) + C_2 (+(-K))$  と考えればよい。

**例10**  $\mathbf{A}$  を全空間でポテンシャルをもつベクトル場、 $C$  を任意の閉曲線とするとき、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = 0$$

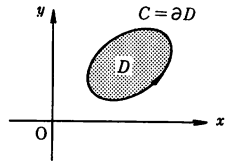
(証明)  $\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$ ,  $C = \partial S$  とする。

ストークスの定理、および  $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0}$  により

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds &= - \int_C \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{t} ds \\ &= - \int_S \text{rot}(\text{grad } \varphi) dS \\ &= 0 \quad (\text{例4参照}) \end{aligned}$$

## グリーンの定理

$xy$ 平面上で、閉じた曲線 $C$ に囲まれた領域を $D$ とする。 $C = \partial D$ の向きは、 $D$ の内部を左側に見ながら回るように定める。領域 $D$ における2重積分と、 $D$ の境界 $C = \partial D$ に沿っての線積分に関するつぎの定理は、ストークスの定理の特別な場合にあたる。



## (平面での) グリーンの定理

2変数関数  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  に対して

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(証明)

ストークスの定理  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  における曲面 $S$ として、 $xy$ 平面上の領域 $D$ をとれば、その方程式は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad ((x, y) \in D)$$

で、 $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ である。また、 $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ において、 $A_x = P(x, y)$ ,  $A_y = Q(x, y)$ ,  $A_z = 0$  とすれば

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

である。よって

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_C (P dx + Q dy)$$

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} dS$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

例11  $xy$  平面上の領域  $D$  の面積  $A$  はつぎの式で与えられる.

$$A = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx)$$

(証明)  $\int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$  において

$$P = 0, \quad Q = x; \quad P = -y, \quad Q = 0; \quad P = -\frac{y}{2}, \quad Q = \frac{x}{2}$$

とおけば, いずれも  $\iint_D dx dy = A$  となる.

### その他の積分公式

ここでは, 発散定理に類する, つぎの2つの積分公式をあげておこう. どちらも発散定理を用いて証明することができる.

スカラー場  $f$ , ベクトル場  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  にふくまれる閉曲面  $S (= \partial V)$  で囲まれた空間領域  $V$  において, つぎの関係が成り立つ.

$$\textcircled{1} \quad \int_V \text{grad } f dV = \int_S f \mathbf{n} dS$$

$$\textcircled{2} \quad \int_V \text{rot } \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = - \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{n} dS$$

(①の証明)

$\mathbf{c}$  を任意の定ベクトルとすれば,

$$\text{div}(f\mathbf{c}) = f \text{div } \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \text{grad } f = \mathbf{c} \cdot \text{grad } f$$

(Ⅲ例8参照) であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \int_V \text{grad } f dV &= \int_V \mathbf{c} \cdot \text{grad } f dV \\ &= \int_V \text{div}(f\mathbf{c}) dV = \int_S (f\mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

(発散定理)





$$-\int (A_x \cos \beta - A_y \cos \alpha) dS = \int_V \text{rot}_z \mathbf{A} dV$$

となるから

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \\ &= \mathbf{i} \int_V \text{rot}_x \mathbf{A} dV + \mathbf{j} \int_V \text{rot}_y \mathbf{A} dV + \mathbf{k} \int_V \text{rot}_z \mathbf{A} dV \\ &= \int_V \text{rot} \mathbf{A} dV \end{aligned}$$

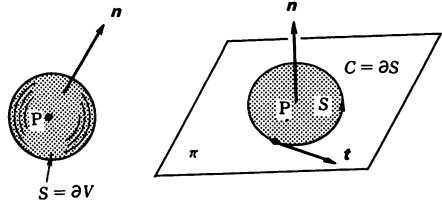
が得られる。

### 勾配・発散・回転の積分表示

これまでに扱った一連の積分公式から、点Pにおけるスカラー場  $f$  の勾配、およびベクトル場  $\mathbf{A}$  の発散と回転を、つぎのように面積分や線積分の極限として表示することができる。

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \text{grad } f &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S f \mathbf{n} dS \\ \textcircled{4} \quad \text{div } \mathbf{A} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ \textcircled{5} \quad \text{rot } \mathbf{A} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \\ \textcircled{6} \quad \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds \end{aligned}$$

③, ④, ⑤では、点Pを内部にふくむ小領域（たとえば、Pを中心とする小さな球）およびその体積をともに  $V$  で表わしてある。  $S = \partial V$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は、 $V$  の内から外に向って



引く.  $\lim_{V \rightarrow 0}$  は,  $V$  を点  $P$  に収縮させるときの極限を示す.

⑥では, 点  $P$  を通り,  $\mathbf{n}$  を単位法線ベクトルとする平面  $\pi$  上で, 点  $P$  をふくむ小領域 (たとえば,  $P$  を中心とする小さな円) およびその面積をともに  $S$  で表わしてある.  $C = \partial S$  の向きは  $\pi$  のおもて側で左まわりにとる.  $\lim_{S \rightarrow 0}$  は,  $S$  が点  $P$  に収縮するときの極限を示す.

(③, ④, ⑤の証明)

$$\int_S f \mathbf{n} dS = \int_V \text{grad } f dV \quad (①)$$

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV \quad (\text{発散定理})$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \int_V \text{rot } \mathbf{A} dV \quad (②)$$

の両辺を  $V$  で割り, 積分における平均値の定理 (付. ⑩) を用いれば,  $V$  内のある 1 点  $Q$  に対して

$$\frac{1}{V} \int_S f \mathbf{n} dS = \frac{1}{V} \int_V \text{grad } f dV = \text{grad } f (Q)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{V} \int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \text{div } \mathbf{A} (Q)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \frac{1}{V} \int_V \text{rot } \mathbf{A} dV = \text{rot } \mathbf{A} (Q)$$

が成り立ち,  $V \rightarrow 0$  のとき  $Q \rightarrow P$  となることから得られる.

(⑥の証明)

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{ストークスの定理})$$

の両辺を  $S$  で割れば,  $S$  内のある 1 点  $Q$  に対して

$$\frac{1}{S} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \frac{1}{S} \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) (Q)$$

ここで,  $S \rightarrow 0$  とすれば  $Q \rightarrow P$  となる.

## 付. 平均値の定理

$a \leq x \leq b$  で  $F'(x) = f(x)$  が連続である関数  
(なめらかな関数)  $F(x)$  について,

$$\textcircled{7} \quad \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

あるいは

$$\textcircled{8} \quad F(b) = F(a) + (b - a)F'(\xi)$$

を満足する  $\xi$  ( $a < \xi < b$ ) が, 少なくとも 1 つ存在する.

これを平均値の定理とよび, 直観的には, 2点  $A(a, F(a))$ ,  $B(b, F(b))$  を結ぶなめらかな曲線  $y = F(x)$  の途中における接線の傾きが, どこかで必ず直線  $AB$  の傾きと一致することを示している.

また, ⑦は

$$\textcircled{9} \quad \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$$

のように定積分の形で表わすこともできる.

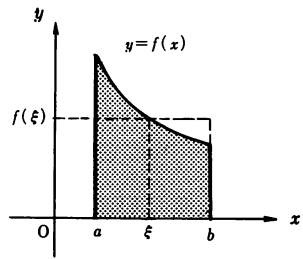
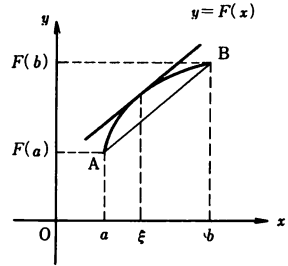
これは, 連続な曲線  $y = f(x)$ ,  $x$  軸, 2直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた図形において, その平均の高さに一致するところが, 曲線  $y = f(x)$  上のどこかに必ず存在することを意味する. これを (定) 積分における (第 1) 平均値の定理とよぶ.

2重積分 [3重積分] の場合にも,  $xy$  平面 [ $xyz$  空間] における (自分自身で交わらない, ひとつながりの) 閉じた曲線 [曲面] で囲まれた, 面積  $S$  [体積  $V$ ] の閉領域  $D$  上で連続な関数  $f(x, y)$  [ $f(x, y, z)$ ] に対して

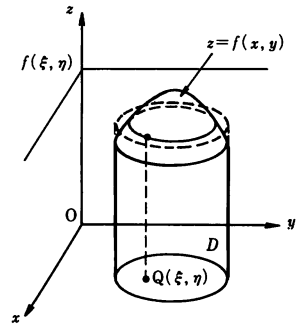
$$\textcircled{10} \quad \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)$$

$$\textcircled{11} \quad \left[ \frac{1}{V} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \right]$$

となる点  $Q(\xi, \eta)$  [ $Q(\xi, \eta, \zeta)$ ] が必ず  $D$  内に存在する. これも (2重 [3重]) 積分における平均値の定理という.



2重積分の場合、直観的には、底面 $D$ をもち、曲面 $z=f(x, y)$ でふたをした柱の体積が変わらないように、曲面の部分を水平に地ならししたときの高さに一致するところが、必ずもとの曲面上に存在することを意味する。



また、3重積分の場合、 $f(x, y, z)$ を $D$ 内の密度を表わす関数とすれば、 $D$ 内には必ず $D$ の平均密度をもつ点が存在することを示している。

線積分や面積分においても、それぞれ、定積分、2重積分に帰着されるから、

$$\textcircled{12} \quad \frac{1}{s} \int_c f ds = f(Q) \quad (s \text{ は } C \text{ の長さ})$$

$$\textcircled{13} \quad \frac{1}{S} \int_s f dS = f(Q)$$

の形の平均値の定理が成り立つ。

問5  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  に対して、つぎの式を証明せよ。

$$\int_s \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V \quad (V \text{ は閉曲面 } S \text{ の囲む領域の体積})$$

問6  $\mathbf{A} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  とする。

$$\text{半球面 } S: \mathbf{r} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$C = \partial S: \mathbf{r} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

について  $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  と  $\int_s \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  とを別々に計算して、ストークスの

定理を確かめよ。

問7 グリーンの定理を用いて、つぎの線積分を求めよ。

$$\int_c \{ (xy^2 - y^3) dx + (x^3 + x^2y) dy \}$$

ただし、 $C: x^2 + y^2 = 1$  (左まわり),  $D: x^2 + y^2 \leq 1$

## 問題 VI

1. 閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  をふくむスカラー場  $f, g$  に対して, つぎの関係が成り立つことを証明せよ. ( $\mathbf{n}$  は  $S$  の外向きの単位法線ベクトルとする.)

$$(1) \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V \nabla^2 f dV$$

$$(2) \int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

(グリーンの第1定理)

$$(3) \int_S \left( f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$

(グリーンの第2定理)

2. 閉曲線  $C$  で囲まれた曲面  $S$  において, つぎの関係が成り立つことを証明せよ.

- (1) スカラー場  $f$  に対して

$$\int_C f d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \times \nabla f dS$$

- (2)  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  に対して

$$\frac{1}{2} \int_C r^2 d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{r} dS$$

3. 任意の閉曲線  $C$  と,  $C$  を境界とする曲面  $S$  に対して

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

が成り立つならば

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

であることを証明せよ. (ストークスの定理の逆)

## 問題解答

## 第I章

$$\begin{aligned} \text{問2} \quad \overrightarrow{P_1P_3} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{P_1P_4} = 2\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{P_1P_5} = \overrightarrow{P_2P_4} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} \\ \overrightarrow{P_1P_6} &= \overrightarrow{P_3P_4} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{P_2P_5} = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \overrightarrow{P_2P_6} &= \overrightarrow{P_3P_5} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{P_3P_6} = -2\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{P_4P_5} = -\mathbf{a} \\ \overrightarrow{P_4P_6} &= -(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \overrightarrow{P_5P_6} = -\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\text{問3} \quad (1) \quad \mathbf{0}, -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$(2) \quad \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), \quad \left( -\frac{4}{\sqrt{77}}, \frac{5}{\sqrt{77}}, -\frac{6}{\sqrt{77}} \right), \\ \left( \frac{7}{\sqrt{194}}, -\frac{8}{\sqrt{194}}, \frac{9}{\sqrt{194}} \right)$$

$$\text{問4} \quad (1) \quad -6, -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \quad (2) \quad 100, 83\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 70\mathbf{k}$$

$$(3) \quad \mathbf{0}, \mathbf{k} \quad (4) \quad \mathbf{0}, \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta$$

$$\text{問5} \quad (1) \quad \cos \theta = -\frac{1}{3} \quad (\theta \approx 109^\circ 28'), \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$(2) \quad 60^\circ, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$(3) \quad 90^\circ, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2262}} (38\mathbf{i} - 23\mathbf{j} + 17\mathbf{k})$$

$$\text{問6} \quad (1) \quad 42 \quad (2) \quad \mathbf{i} + 26\mathbf{j} - 17\mathbf{k} \quad (3) \quad -13\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

$$(4) \quad -11 \quad (5) \quad 12\mathbf{i} - 38\mathbf{j} - 134\mathbf{k} \quad (6) \quad 84\mathbf{i} - 126\mathbf{j} + 42\mathbf{k} (= [\mathbf{ABC}]\mathbf{B})$$

$$(7) \quad 42 (= [\mathbf{ABC}]) \quad (8) \quad 1764 (= [\mathbf{ABC}]^2) \quad (9) \quad \mathbf{0}$$

$$\text{問7} \quad (1) \quad 28, 28\mathbf{k}, \mathbf{k} \quad (2) \quad 2, -2\mathbf{i}, -\mathbf{i}$$

$$(3) \quad \sqrt{6}, -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$(4) \quad \sqrt{138}, -8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, -\frac{8}{\sqrt{138}}\mathbf{i} - \frac{7}{\sqrt{138}}\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{138}}\mathbf{k}$$

## 問題I

2.  $AC : CB = m : n$  より  $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$ , すなわち  $n(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = m(\mathbf{b} - \mathbf{c})$  であることを用いる。(AC, CBは有向線分)

3. ABの中点をMとすると、 $\overrightarrow{OM} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ ,  $\mathbf{p} = \frac{2\overrightarrow{OM} + \mathbf{c}}{3}$ ,  $\mathbf{q} = \frac{3\mathbf{p} + \mathbf{d}}{4}$
4. (1)  $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ ,  $\pm \mathbf{B} = \overrightarrow{QR}$  とすれば  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \overrightarrow{PR}$ ,  $\triangle PQR$  (3角形がつぶれた場合もふくむ) の3辺の関係から  
 $PQ \sim QR \leq PR \leq PQ + QR$
- (2)  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  または  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  なら明らか.  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  のとき,  $|\cos \theta| \leq 1$  ( $\theta = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ) を用いる.
5. (1) 両辺のベクトルの成分を比較せよ. (2) (1)より直ちに得られる.  
 (3)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{X}$  とおく.  $\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{X} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D} = \{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}\} \cdot \mathbf{D}$ , これに(2)を用いる.

## 第二章

- 問1 (1)  $(10t+4)\mathbf{i} + (9t^2-2)\mathbf{j}$
- (2)  $-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$
- (3)  $\mathbf{i} \sin 2t + \mathbf{j} \cos 2t - \mathbf{k} \sin 2t$
- (4)  $e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$
- (5)  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$

- 問3 (1) (イ)  $\mathbf{r} = \mathbf{a}t + \mathbf{c}$  (ロ)  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2$

(2)  $\mathbf{r} = \mathbf{c}e^{-kt}$

(3)  $k > 0$  なら  $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 \cos \omega t + \mathbf{c}_2 \sin \omega t$  ( $k = \omega^2$ )

$k = 0$  なら  $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t$

$k < 0$  なら  $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 e^{\omega t} + \mathbf{c}_2 e^{-\omega t}$  ( $k = -\omega^2$ )

- 問4 (1)  $4\sqrt{2}$  (2)  $4\pi$  (3)  $3+2\log 2$

(4)  $\pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$

- 問5 (1)  $\mathbf{t} = \frac{1}{1+2t^2}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k})$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{1+2t^2} \{-2t\mathbf{i} + (1-2t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{1+2t^2} (2t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$



$$\kappa = \tau = \frac{2}{3(1+2t^2)^2}$$

$$(2) \quad \mathbf{t} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} (e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2} \mathbf{k})$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} \{ \sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j} - (e^t - e^{-t}) \mathbf{k} \}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{(e^t + e^{-t})^2} \{ -(1 + e^{-2t}) \mathbf{i} + (1 + e^{2t}) \mathbf{j} + \sqrt{2} (e^t + e^{-t}) \mathbf{k} \}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}, \quad \tau = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

問6 (1)  $\mathbf{v} = -c\omega \sin \omega t \mathbf{i} + c\omega \cos \omega t \mathbf{j} (= c\omega \mathbf{t})$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad a_t = 0, \quad a_n = c\omega^2$$

(2)  $\mathbf{v} = c\dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= c(-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{i} + c(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \mathbf{j} \\ &= c\ddot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) + c\dot{\theta}^2 (-\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) \\ &= c\ddot{\theta} \mathbf{t} + c\dot{\theta}^2 \mathbf{n}, \quad a_t = c\ddot{\theta}, \quad a_n = c\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

(3)  $\mathbf{v} = t \sin t \mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$

$$\mathbf{a} = (\sin t + t \cos t) \mathbf{i} + (\cos t - t \sin t) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

$$a_t = \sqrt{5}, \quad a_n = t$$

問7 (1)  $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (v \sin v \mathbf{i} - v \cos v \mathbf{j} + u \mathbf{k}), \quad \frac{16}{3} \pi^4$

(2)  $\cos u \cos v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}, \quad 4\pi^2 ab$

### 問題II

2. (1)  $\mathbf{X} = \mathbf{c}_1 e^t + \mathbf{c}_2 e^{-t}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{c}_1 e^t - \mathbf{c}_2 e^{-t}$

(2)  $\mathbf{X} = \mathbf{c}_1 \cos t + \mathbf{c}_2 \sin t, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{c}_1 \sin t - \mathbf{c}_2 \cos t$

4. (1)  $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$  より  $\tau = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}' = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}')$

$$= \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}') = \mathbf{t} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} \times \left( \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} \right)' \right\}$$

$$= \mathbf{t} \cdot \left( \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} \times \frac{\kappa \mathbf{t}'' - \kappa' \mathbf{t}'}{\kappa^2} \right) = \frac{\mathbf{t} \cdot (\mathbf{t}' \times \mathbf{t}'')}{\kappa^2}$$

$$= \frac{[\mathbf{t} \mathbf{t}' \mathbf{t}'']}{\kappa^2} = \frac{[\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}''|^2}$$

$$(2) \quad \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{s}, \quad \mathbf{r}'' = \frac{1}{s^3} (\dot{s}\ddot{\mathbf{r}} - \dot{s}\dot{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{r}''' = \frac{1}{s^5} \{ \dot{s}^2 \ddot{\mathbf{r}} - 3\dot{s}\ddot{s}\ddot{\mathbf{r}} + (3\dot{s}^2 - \dot{s}\ddot{s}) \dot{\mathbf{r}} \}$$

を(1)に代入し,  $\dot{s}^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ , (この両辺を  $t$  で微分して得られる)  $\dot{s}\ddot{s} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ , および  $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2}$  (p. 12, 例2)を用いる.

5. 例8(i)に  $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$ ,  $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$  を用いる.

6. (1)  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \mathbf{k}$

(2) p. 12, 例2 参照

### 第三章

問1 (1)  $x = c_1 e^{-t}$ ,  $y = c_2 e^t$ ,  $z = c_3$  ( $xy = a$ ,  $z = b$ )

(2)  $x = c_1 e^t$ ,  $y = c_2 e^{2t}$ ,  $z = c_3$  ( $y = ax^2$ ,  $z = b$ )

問2  $3 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

問3 (1)  $\alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma \mathbf{i} + \beta x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma \mathbf{j} + \gamma x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1} \mathbf{k}$

(2)  $\frac{1}{2\sqrt{x+2y+3z}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

(3)  $e^y \cos z \mathbf{i} + x e^y \cos z \mathbf{j} - x e^y \sin z \mathbf{k}$

(4)  $\frac{1}{x+y^2+z^3} (\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k})$

問4  $\frac{3}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{10}} \mathbf{j}$

問6 (1) 0 (2)  $e^x + x e^{xy} + x y e^{xyz}$

問8 (1) 0 (2) 0 (3)  $\frac{\mathbf{k}}{x+y}$

問9  $\text{rot}_x \{ \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{r} \}$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \{ z \varphi(\mathbf{r}) \} - \frac{\partial}{\partial z} \{ y \varphi(\mathbf{r}) \}$$

$$= z \varphi'(\mathbf{r}) \frac{y}{r} - y \varphi'(\mathbf{r}) \frac{z}{r} = 0 \text{ など}$$

110 問題解答

問10 (1)  $-x^2 e^{yz} + c$  (2)  $-xy(x+y)\cos z + c$

問11 (1)  $-x^2 y z \mathbf{i} - xy^2 z \mathbf{j}$

$$\frac{1}{3} \{ y^3 z \mathbf{i} + x^3 z \mathbf{j} + (xy^3 + x^3 y) \mathbf{k} \} \text{ など}$$

(2)  $xy(z-1)e^z(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$  など

問題Ⅲ

1. (4)  $\text{rot}_z(f\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(fA_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fA_y)$   
 $= \left( \frac{\partial f}{\partial y} A_z - \frac{\partial f}{\partial z} A_y \right) + f \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \text{右辺の } x \text{ 成分}$

(5)  $\nabla g = \mathbf{A}$  において例8を用いる.

(6)  $\nabla g = \mathbf{A}$  において(4)を用いる.

(7)  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right)$   
 $+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0$

2. (1)  $\frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x)$

を計算せよ. なお,  $\mathbf{A} = \nabla f$ ,  $\mathbf{B} = \nabla g$  とすれば, 1. (7) が得られる.

(2), (3) とも両辺の成分ごとに比較せよ. たとえば(3)の  $x$  成分は

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_y - A_y B_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_z B_x - A_x B_z) \\ &= \left( \underbrace{B_x \frac{\partial A_z}{\partial x}} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \underbrace{A_x \frac{\partial B_x}{\partial x}} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left( \underbrace{A_x \frac{\partial B_z}{\partial x}} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - \left( \underbrace{B_x \frac{\partial A_x}{\partial x}} + B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

3. (1) 2. (1) により  $\text{div} \left( \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \therefore \text{rot } \mathbf{a} =$

$0, \text{rot } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$  (例12(ii))

(2) 2. (2), (3) により  $\text{rot} \left( \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\text{grad} \left( \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$

一般に  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)(f\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla f)\mathbf{B} + f(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$  が成り立つから

$$\begin{aligned} -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= -\left\{ \mathbf{a} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right\} \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= \left\{ \frac{3}{r^4} (\mathbf{a} \cdot \nabla) r \right\} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{r^3} = \left( \frac{3}{r^4} \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{r^3} \\ &= -\frac{\mathbf{a}}{r^3} + \frac{3\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \end{aligned}$$

#### 第IV章

問1 (1)  $\frac{1}{7}$     (2)  $\frac{16}{21}$     (3)  $\frac{3}{4}$     (4)  $-\frac{2}{21}$     (5)  $\frac{16\sqrt{2}}{21}$

問2 (1) 1    (2)  $\frac{8}{3} \pi^3 b^3$     (3)  $6 + 2e^2 - 10e^{-2}$

(4)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{16}$

(5) (イ)  $2\pi$     (ロ) 0,  $x > 0$  のとき  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

を用いる.

( $\mathbf{A}$  は全空間から  $z$  軸を除いた領域で定義されるベクトル場で,  $\mathbf{A} = \nabla \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} \right)$  である. (イ), (ロ)とも  $C$  は閉曲線であるが, (イ)の線積分の値は 0 にならない. (イ)の  $C$  (円) をベクトル場  $\mathbf{A}$  内だけで, 連続的に変化させて  $C$  上の 1 点に縮めようとしても,  $z$  軸にひっかかるから不可能である. このような場合には  $\nabla f$  の閉曲線に沿っての線積分が 0 になるとは限らないのである.)

問3 (2) 30

問4 (1)  $\frac{\pi}{8} \{ 3\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \} + \frac{\pi^3}{6} \{ \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \}$

(2)  $\frac{2}{9} + \frac{\pi^3}{3}$

問5 ヒント: 発散定理,  $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$

問6 ともに  $\frac{3\pi}{2}$

問7  $\frac{3\pi}{2}$ 

## 問題IV

1. 発散定理を用いる.

$$(1) \text{ 左辺} = \int_S \nabla f \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \nabla f \, dV = \text{右辺}$$

$$(2) \text{ 左辺} = \int_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) \, dV = \text{右辺}$$

$$\because \nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \quad (\text{問題III 1. (5)})$$

$$(3) \text{ 左辺} = \int_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$= \int_V \nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) \, dV$$

$$= \int_V \{ \nabla \cdot (f \nabla g) - \nabla \cdot (g \nabla f) \} \, dV = \text{右辺}$$

2. (1) ストークスの定理を用いる.

$\nabla \times (f\mathbf{c}) = \nabla f \times \mathbf{c} + f \nabla \times \mathbf{c} = \nabla f \times \mathbf{c}$  (問題III 1. (4)) だから, 任意の定ベクトル  $\mathbf{c}$  に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \int_C f \, d\mathbf{r} &= \int_C (f\mathbf{c}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \cdot \{ \nabla \times (f\mathbf{c}) \} \, dS \\ &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla f \times \mathbf{c}) \, dS = \int_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla f) \, dS = \mathbf{c} \cdot \int_S \mathbf{n} \times \nabla f \, dS \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{c} \cdot \left\{ \int_C f \, d\mathbf{r} - \int_S \mathbf{n} \times \nabla f \, dS \right\} = 0$$

(2) (1) で  $f = r^2$  とおけ.

$$3. \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \text{ より, } \int_S (\mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \text{ が任}$$

意の  $S$  について成り立つから,  $(\mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{n}$  の向きは任意であるから,  $\mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  でなければならない.

## 索引

## ア行

泉なし source free, (独) quellenfrei  
61

位置ベクトル position vector 5

渦なし rotationless, (独) wirbelfrei  
67

運動 motion 39

円運動 circular motion 41

円環面 torus 46

大きさ magnitude 1

## カ行

外積 outer product 9

回転 rotation, curl 63

回転的 rotational 61

ガウスの定理 divergence theorem of  
Gauss 93

角速度 angular velocity 13

加速度 acceleration 39

管状 solenoidal 61

軌道 orbit 39

基本ベクトル fundamental vector 5

曲線 curve 22, 33

曲線の長さ curve length 34

曲面 surface 42

曲面積 surface area 42

曲率 curvature 37, 47

曲率半径 radius of curvature 37

空間曲線 space curve 22, 33

グラスマンの記号 Grassmann's no-  
tation 14

グリーンの定理 Green's theorem  
98, 105

剛体 rigid body 13,

勾配 gradient 53

弧の長さ arc length 34

## サ行

差 difference 3

3重積 triple product 13

仕事 work 9, 83

質点 material point 9

始点 initial point 1

終点 terminal point 1

従法線ベクトル binormal vector 37

主法線ベクトル principal normal  
vector 36

助変数 parameter 33

スカラー scalar 1

スカラー関数 scalar function 22

スカラー3重積 scalar triple prod-

- uct, box product 13
- スカラー積 scalar product, dot product 7
- スカラー場 scalar field 49
- スカラー倍 scalar multiple 3
- スカラー・ポテンシャル scalar potential 71
- ストークスの定理 Stokes' theorem 96
- 正射影 orthogonal projection 3
- 成分 component 5, 9
- 接触平面 osculating plane 37
- 接線 tangent 24
- 接線成分 tangential component 40
- 接線ベクトル tangent vector 24, 34
- 接平面 tangent plane 43
- 零ベクトル zero vector 2
- 線積分 line integral 77, 81
- 線素 line element 34
- 全微分 total differential 29, 54
- 層状 lamellar 67
- 速度 velocity 13, 39
- ソレノイダル solenoidal 61
- タ行
- 第1基本量 first fundamental quantities 48
- 体積分 volume integral 93
- 単位接線ベクトル unit tangent vector 35
- 単位法線ベクトル unit normal vector 17, 43
- 単位ベクトル unit vector 2
- 力 force 9, 83
- 柱体 cylinder 19
- 調和関数 harmonic function 62
- つるまき線 helix 35, 38, 40
- 定ベクトル constant vector 23, 25
- デル del 53
- 展直平面 rectifying plane 37
- 等位面 level surface 49
- 等高線 contour line 49
- 特異点 singular point 33
- 等速 uniform velocity 41
- ナ行
- 内積 inner product 7
- ナブラ nabla 53
- なめらか smooth 22, 24, 28
- ねじれ率 torsion 37, 47
- ハ行
- 発散 divergence 58
- 発散定理 divergence theorem 93
- ハミルトンの演算子 Hamilton's operator 53
- 速さ speed 39
- 非圧縮性流体 incompressible fluid 61

非回転的 irrotational 67  
 左まわり anticlockwise 17

フルネ・セレーの公式 Frenet-Serret's  
 formula 38

閉曲線 closed curve 84  
 閉曲面 closed surface 93  
 平均値の定理 mean value theorem  
 103  
 ベクトル vector 1  
 ベクトル関数 vector function 22  
 ベクトル積 vector product 9  
 ベクトル場 vector field 49  
 ベクトル方程式 vector equation 33,  
 42  
 ベクトル・ポテンシャル vector poten-  
 tial 71  
 ベクトル面積素 area element vector  
 44  
 ヘルムホルツの定理 Helmholtz's the-  
 orem 74  
 変位 displacement 1, 9, 51

方向微分係数 directional differential  
 coefficient 51, 54  
 方向余弦 direction cosine 6, 17  
 法線成分 normal component 40  
 法平面 normal plane 37  
 ポテンシャル potential 71

マ行

右手系 right-hand system 5

右ねじ right-handed screw 9  
 道 path 39  
 道のり distance 39

向き sense, direction, orientation 1  
 向きづけ可能 orientable 42

モービウスの帯 Möbius' strip 42  
 面積素 area element 44  
 面積分 surface integral 86, 89  
 面積ベクトル area vector 17

## ヤ行

ヤコービアン Jacobian 48

有向線分 oriented segment 4  
 有向直線 oriented line 4  
 有向平面 oriented plane 17

## ラ行

ラプラシアン Laplacian 61  
 ラメラ lamellar 67

流線 stream line, line of flow 50  
 流体 fluid 61  
 流量 flux 19

零ベクトル zero vector 2  
 捩率(れい率) torsion 37, 47

## ワ行

和 sum 2  
 わき出しなし source free 61



## 人 名 (生年順)

- ラプラス Pierre Simmon Laplace (1749 - 1827) 61  
ガウス Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) 93  
モービウス Augustus Ferdinand Möbius (1790 - 1868) 42  
グリーン George Green (1793 - 1841) 98, 105  
ヤコビ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) 48  
ハミルトン William Rowan Hamilton (1805 - 1865) 53  
グラスマン Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877) 14  
フルネ Frédéric Frenet (1816 - ? ) 38  
セレー Joseph Alfred Serret (1819 - 1885) 38  
ヘルムホルツ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz  
(1821 - 1894) 74

著者略歴

西尾 和弘 (にしお かずひろ)

1932年 熊本県に生れる

1956年 東京大学理学部数学科卒業

現在 関東学院大学工学部教授

著書 『教養微分積分学』新評論 1968年

『教養線形代数学』新評論 1969年

ベクトル解析

昭和60年 3月20日 第1版発行  
昭和62年 3月16日 第2版発行  
平成元年 3月16日 第3版発行  
平成4年 3月16日 第4版発行

定価1,700円  
(本体1,650円)

著者 西尾 和弘

発行人 吉井 克明

検印  
省略

発行所 吉井書店

〒102 東京都千代田区飯田橋3-7-11

電話 東京 03-3261-5077

振替口座 東京 6-56049番

発売元 産業図書

〒102 東京都千代田区飯田橋1-4-21

電話 東京 03-3261-7821(代)

振替口座 東京 2-27724番

ISBN4-946439-16-1 C1041 P1700E