

微分方程式

飯 尾 力
堀 田 和 久

吉井書店

は し が き

工学部初年級では、微分積分学，線形代数，これに続く年次で，微分方程式，ベクトル解析，複素関数論などを履修するのが大方のようである．工学部教育は近年益々そのカリキュラムが充実され，機械，電気，建築，建築設備，土木，工業化学など，その専門教育は複雑多岐にわたり，一般教養や基礎教育に振り向ける時間がややもすると少なくなっている．こうしたカリキュラム上の時間制約の中で，微分方程式とベクトル解析というやや異質な分野を通年1コマで講義するためのテキストとして準備するのが本書の狙いである．ただ微分方程式とベクトル解析を一巻にまとめるということの不自然さから，前者だけを抜き出して，これを単独で通年使用することも可能なるように若干の工夫をした．後者については，同時出版される西尾和弘著『ベクトル解析』（吉井書店）がある．

微分方程式の成書は，これまでも数多く出版されており，それぞれに特徴を備えた敬服に値するものばかりであり，今更の感は拭えないものの，理学部の学生にとっては容易に理解できたり，充分時間を割くことができて，工学部の学生にとっては煩瑣であったり難解であるような気がする．本書では，これらの点を考慮に入れて，なるべく平易に，場合によっては微分積分学の習得が充分でない学生諸君にも，いわばその演習としても役割が果せるよう努力したつもりである．また，微分演算子の説明にはとりわけ多くの頁をあて，冗長を恐れず書いたつもりである．従って教授される方々は適宜取捨選択していただきたい．もとより浅学非才の身である著者であるから，こと志と違って意が伝わらない面も多いと恥じ入るばかりであるが，読者の御叱正を乞う他はない．

終りに，本書の出来上るに際し，共著者同様にご指導頂いた関東学院大学数学教室の西尾和弘氏，いろいろと有益な御意見をいただいた同数学教室の関谷昭氏，塩原浩氏，出版の御推薦を下さった同地学教室の伊藤芳朗氏，終始ひとかたならずお世話になった集文社・吉井書店の吉井克明氏に，心から感謝申し上げる次第である．

1985年1月

著 者

ギリシャ文字表

大文字	小文字	読み方
<i>A</i>	α	alpha (アルファ)
<i>B</i>	β	beta (ベータ)
<i>\Gamma</i>	γ	gamma (ガンマ)
<i>\Delta</i>	δ	delta (デルタ)
<i>E</i>	ϵ	epsilon (エプシロン)
<i>Z</i>	ζ	zeta (ゼータ, ツェータ)
<i>H</i>	η	eta (エータ)
Θ	θ, ϑ	theta (テータ, シータ)
<i>I</i>	ι	iota (イオータ)
<i>K</i>	κ	kappa (カッパ)
<i>\Lambda</i>	λ	lambda (ラムダ)
<i>M</i>	μ	mu (ミュー)
<i>N</i>	ν	nu (ニュー)
<i>\xi</i>	ξ	xi (クシー, グザイ)
<i>O</i>	$\omicron$	omicron (オミクロン)
Π	π	pi (パイ, ビー)
<i>P</i>	ρ	rho (ロー)
Σ	σ, ς	sigma (シグマ)
<i>T</i>	τ	tau (タウ)
Υ	υ	upsilon (ユーブシロン)
Φ	φ, ϕ	phi (ファイ, フィー)
<i>X</i>	χ	chi (カイ, キー)
Ψ	ψ	psi (プサイ, プシー)
Ω	ω	omega (オメガ)

目 次

第 1 章 用語と準備

§ 1 微分方程式とその解	1
§ 2 解曲線	4
§ 3 基本事項	6
問 題	15

第 2 章 1 階微分方程式 (求積法)

§ 1 変数分離形	17
§ 2 線 形	22
§ 3 完全形	26
§ 4 クレーロー形	29
問 題	32

第 3 章 線形微分方程式

§ 1 線形微分方程式	34
§ 2 微分演算子	37
§ 3 線形微分方程式の解の性質	42
§ 4 定数係数の同次線形微分方程式の一般解	50
§ 5 逆演算子と特殊解	57
§ 6 定数係数の非同次線形微分方程式の一般解	70
問 題	71

第4章 べき級数による解法など

§ 1	べき級数による解法	73
§ 2	決定方程式	75
§ 3	特殊関数	78
§ 4	逐次代入法	83
§ 5	ラプラス変換	85
§ 6	ラプラス変換の応用	88
問 題		89

第5章 簡単な偏微分方程式

§ 1	連立微分方程式	90
§ 2	1 階同次線形偏微分方程式	92
§ 3	1 階準線形偏微分方程式	94
§ 4	全微分方程式	95
§ 5	波動方程式, ラプラスの方程式	98
問 題		102

公 式 集

予備公式	103
基本的な関数の導関数と不定積分	105
基本的な関数のべき級数展開	108
基本的な関数のラプラス変換	110
問題解答	111
索 引	122
人 名 表	124

第 1 章 用語と準備

§ 1 微分方程式とその解

1 変数関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、その導関数

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めるのが、微分することであり、逆に $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ が与えられたとき、 $y = f(x)$ を求めるのが積分することであることを思いだそう。一般に微分することよりは、積分することのほうが困難であり、更に導関数を含んだある関係式を満たす関数を求めることは、よりむずかしい。しかし多くの自然現象や工学的現象はまずこの形で表現されるのである。たとえば

$$(イ) \quad \frac{dy}{dx} = x \quad (ロ) \quad \frac{dy}{dx} = y \quad (ハ) \quad x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(ニ) \quad y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (ホ) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \quad (ヘ) \quad \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 1$$

などのように、 $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$ の間の関係式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots\right) = 0 \quad (1.1)$$

があるとき、これを微分方程式という。

注意 2 つ以上の独立変数についても、たとえば 2 つの独立変数 x, y について、 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ や高次偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$ について、同様な関係式を考え、これを偏微分方程式という。これに対して上に述べた微分方程式を常微分方程式という。本章で、取り扱うものの大部分は、常微分方程式であり、最後の第 5 章ではほんの少し偏微分方程式にふれる程度なので、微分

2 第1章 用語と準備

方程式といえば、常微分方程式をさすものとする。

(1.1) の中に、第 n 次導関数 $\frac{d^n y}{dx^n}$ を含むが、それより高次の導関数を含まないとき、 n 階微分方程式という。(I), (II), (III), (IV) は 1 階、(V) は 2 階、(VI) は 3 階微分方程式である。ここで、(I) は y を、(II) は x を、(III) は x, y を含んでいない。このように、 n 階微分方程式 (1.1) には、 $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ の中で、表れないものがあったもよい。

与えられた微分方程式を満足する関数 $y = f(x)$ を微分方程式の解という。一般には、 $y = f(x)$ という形ではなくとも、 $G(x, y) = 0$ の形でよい。

(I) の解は、 $y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ (c は定数) が最も一般的であることが容易に

わかるが、(II) は (I) の x が y になっているだけなのに、そう単純にはわからない。しかしながら、 $y = e^x$ や $y = 2e^x$ が解であることは、代入してみればすぐわかる。

$y = \frac{x^2}{2} + c$ は定数 c を含む (I) の解である。この定数 c は定数をとる限り、意に任 (まか) せて何をとっても構わないという意味で任意定数という。ちょっと考えると矛盾するような感じの言葉使いであるが、習慣になっている。もちろん、 $y = \frac{x^2}{2}$ ($c=0$)、 $y = \frac{x^2}{2} - 1$ ($c=-1$) のように、任意定数 c が個々の具体的な値をとっても解であるから、(I) の解としては、1 個の任意定数 c を含む $y = \frac{x^2}{2} + c$ の形の解がもっとも一般的であるといえる。つまり個々の解 $y = \frac{x^2}{2}$ 、 $y = \frac{x^2}{2} - 1$ などに対してその一般形 $y = \frac{x^2}{2} + c$ が“一般”な解ということである。そこで 1 階微分方程式の解のうち、任意定数 1 個を含む解を、一般解という。(なお、偏微分方程式の一般解には任意定数のかわりに任意関数が表れる。) さらに、 n 階微分方程式の解のうち、本質的な任意定数 n 個を含む解を一般解という。ここで、本質的な n 個の任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ とは、 $c_3 = c_1 - c_2$ や、 $c_2 = c_1 c_3$ のように、 $c_1, c_2, \dots, c_n$ の間に関係式がないこと、すなわち全く独立に値を与えられる n 個の任意定数ということである。形の上でも、もし上記のような関係式があれば、整理することによって $(n-1)$ 個以下の任意定数しか含まないことになってし

まうのである。

一般解に表れる任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ に具体的な値を代入すれば、1つの解が得られるが、これを特殊解という。

(=)の一般解は、 $y = cx + \frac{1}{c}$ (c は任意定数) であることが、代入してみればすぐわかる。しかし、この場合、 $y^2 = 4x$ もまた(=)の解である。 $y^2 = 4x$ は $y = cx + \frac{1}{c}$

の c にどのような値を代入しても得られない。すなわち $y^2 = 4x$ は一般解でもなければ、特殊解でもない。このような解を特異解という。実は、この特異解の定義は少々厄介であり、本書の程度を越えるので、興味ある読者は、藤原松三郎著『常微分方程式論』(岩波書店) p 384 を参照されたい。

これまで述べてきたように微分方程式の解には、一般解、特殊解、特異解とあることがわかった。これらすべてを求めるのが、微分方程式を解くことになるのであるが、本書では、第2章§4を除いて、混乱を避けるために、一般解を求めることに限って、微分方程式を解くという用語を用いることにしよう。

なお、物理学や工学への応用上は、 $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ の値が与えられたときのそれら(これを初期条件という)を満足する解を求めることが問題となることが多い。これを初期値問題という。しかし、これも、上に述べた特異解にかかわる問題は残るものの、一般解が求められれば、その特殊解として得られるのが大半であるから既に述べたように限定しても差しつかえない。

注意 n 階の微分方程式

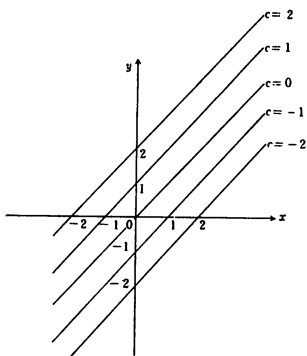
$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

の解が、与えられた初期条件の下で存在するの否か、また、存在するとしても、ただ1通りの解であるのかという問題は、数学としては大変重要な問題であり、存在定理の名のもとに、いくつかの定理や条件が、先人によって成しとげられている。これらも、詳細は、既に述べた藤原著『常微分方程式論』を参照していただきたい。

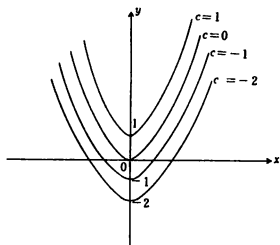
§ 2 解 曲 線

ここでは、与えられた微分方程式の一般解の図形的な意味についてしらべることとする。

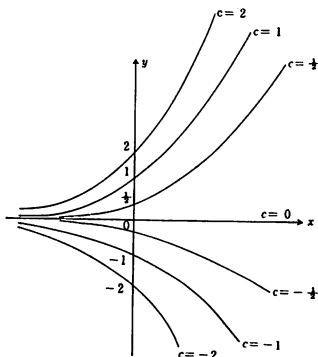
例 1 $y = x + c$ (c は任意定数) という関係式は、 c がいろいろの値をとったとき、表わす直線の全体を意味しているから、右図のような平行線群を表わす。この平行線の間にある共通な性質は傾きが 1、すなわち $\frac{dy}{dx} = 1$ である。逆に $\frac{dy}{dx} = 1$ という微分方程式の一般解は $y = x + c$ である。



例 2 $y = \frac{x^2}{2} + c$ (c は任意定数) は、放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ を y 軸に沿って平行移動したものの全体を表わしている。これらの放物線が共通にもつ性質は $\frac{dy}{dx} = x$ である。逆に微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x$ の一般解は $y = \frac{x^2}{2} + c$ である。

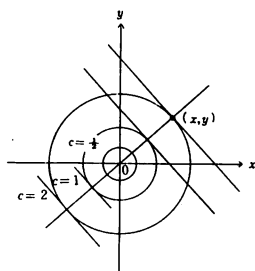


例 3 $y = ce^x$ (c は任意定数) は、 $c > 0$ ならば、 x 軸の上側にでてくる指数関数で、 y 切片は $(0, c)$ であり、 $c < 0$ ならば、それらを x 軸に関して対称にうつしたものである。 $c = 0$ ならば、 x 軸に一致する。これらに共通な性質は $\frac{dy}{dx} = (ce^x)' = ce^x = y$ より $\frac{dy}{dx} = y$ である。

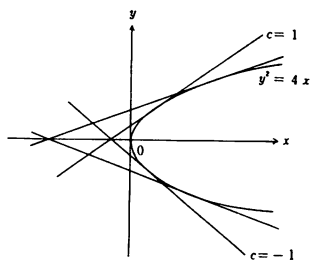


例 4 $x^2 + y^2 = c^2$ (c は正の任意定数)

これは、原点を中心とする同心円を表している。半径 c の円周上の任意の点 (x, y) について、この点における接線と半径とが直交することは、よく知られている。半径の傾きは $\frac{y}{x}$ 、円周上の接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ だから $\frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = -1$ となる。整理して $x + y \frac{dy}{dx} = 0$ となる。



例 5 $y = cx + \frac{1}{c}$ (c は任意定数 $c \neq 0$) これも、直線のあつまりであり、これらの直線群の包絡線が、 $y^2 = 4x$ である。ここで包絡線とは、どの直線 $y = cx + \frac{1}{c}$ にも接している (共通点で共通接線をもつ) 曲線である。これらに共通な性質は $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ である。



上の 5 つの例で示されるように、曲線のあつまり (曲線群) は、それを構成している個々の曲線が共通にもつ性質として微分方程式を与える。逆に、微分方程式の一般解として、曲線群を得る。このようにして得られた曲線の 1 つ 1 つを解曲線という。これらが特殊解を表す曲線になっている。したがって、たとえば、先に述べた初期値問題などは、与えられた初期条件を満たす解曲線を定めることと同じである。

問 1 つぎの関係式の表わす曲線が共通にもつ性質を微分方程式で示せ。 (c は任意定数)

(1) $y = cx - c^2$

(2) $y = cx + \frac{1}{c}$

(3) $y = cx + \sqrt{c^2 + 1}$

(4) $y = (x - c)^2$

§ 3 基 本 事 項

これから微分方程式の解法を述べるのであるが、既に学習した微分積分学の知識が定かでない読者のために、これに先立ち、いくつかの必要と思われる基本事項を復習しておこう。

1. 初等関数

べき関数、指数関数、対数関数、3角関数、逆3角関数、双曲線関数、逆双曲線関数などを総称して初等関数といい、本書でとり扱うのは、第4章§3を除いて、この初等関数である。

まず指数関数について復習しよう。次の極限で定義された実数 e を自然対数の底という。

$$e = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.7182818284590452 \dots$$

e を底とする指数関数 $y = e^x$ は、 $(e^x)' = e^x$ 、つまり微分しても変わらないという際立った性質をもつため、特に重要な関数であった。また、この関数の逆関数として、対数関数（自然対数） $y = \log x$ が定義された。正の実数 x に対して、 $x = e^y$ を満たす実数 y がただ1つ存在するが、この y を x に対応させるのが対数関数であり、この y のことを $y = \log x$ とかいたのである。したがって、 $y = \log x$ と $x = e^y$ は全く同じことであり、このことから対数関数の性質が導かれる。

$$\begin{array}{lll} (1) \log 1 = 0 & (2) \log e = 1 & (3) \log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2 \\ (4) \log x^\alpha = \alpha \log x & (5) e^{\log x} = x & (6) \log e^x = x \end{array}$$

ここで、 $\log x$ は $x > 0$ のときのみ意味をもつが、 $\log|x|$ として $x < 0$ の場合も考えると、

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad (-\infty < x < \infty, x \neq 0, c \text{ は任意定数})$$

となる。

つぎに、3角関数については、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

加法定理, 合成

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$(\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a^2 + b^2 \neq 0)$$

などが基本的である。

問 2 つぎの関数の定義を述べよ。

$$(1) \quad y = \sin^{-1} x$$

$$(2) \quad y = \tan^{-1} x$$

$$(3) \quad y = \sinh x$$

$$(4) \quad y = \sinh^{-1} x$$

問 3 $y = f(u)$ は u の関数であり, $u = g(x)$ は x の関数ならば, $y = f(u) = f(g(x)) = h(x)$ は x の関数となる。この h を f と g の合成関数という。 f , g が微分可能であれば, h は微分可能であって, $h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) g'(x) = f'(g(x)) g'(x)$ となることを証明せよ。〔大きく微分して小さく微分する〕

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{g} g(x) = u \xrightarrow{f} f(u) = f(g(x)) = y \\ \hline \qquad \qquad \qquad h \end{array}$$

問 4 つぎの関数を微分せよ。

$$(1) \quad \sqrt{1 - x^2}$$

$$(2) \quad e^{2x}$$

$$(3) \quad \log \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

$$(4) \quad \sin(x^2 - x)$$

$$(5) \quad \cos^2 3x$$

2. 部分積分法, 置換積分法

第 2 章では, 不定積分を求めることが本質的な問題となる。言葉を変えて言え

ば, 第 2 章は不定積分の演習であると言っても過言ではない。不定積分は巻末の

8 第1章 用語と準備

表を用いればよいが、表にない少し複雑なものでも、部分積分や置換積分で得られることがしばしばある。

部分積分法

$$\begin{array}{c} \text{↑積分する} \quad \text{↓} \quad \text{……そのまま……} \quad \text{↓} \\ \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \\ \text{……そのまま……} \quad \text{↑} \quad \text{↓微分する} \quad \text{↑} \end{array}$$

置換積分法

$x = \varphi(t)$ とおくと、 $dx = \varphi'(t) dt$ ($\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ だから形式的に $dx = \varphi'(t) dt$ と思ってよい。) であるから

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

くどいようだが $\frac{dx}{dt} dt = dx$ となっていることに注意しよう。

例 6

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x (\log x)' dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + c = x(\log x - 1) + c \\ &\quad (c \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c \\ &\quad (c \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad & 1-x^2=t \text{ とおくと } -2x dx = dt \quad \therefore x dx = -\frac{1}{2} dt \\ \therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \\ &\quad (c \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

問 5 つぎの不定積分を求めよ。

(1) $2x e^{x^2}$

(2) $\frac{2x}{1+x^2}$

(3) $x e^{-x}$

(4) $\sin^{-1} x$

(5) $\sin x + e^x$

(6) $\sin^2 x$

(7) $x \log x$

(8) $x \cos x$

(9) $\cos 2x$

(10) $\sin^3 x$

(11) $\frac{1}{x^2+1}$

(12) $\frac{1}{x^3+1}$

3. 偏微分, 全微分

2変数関数 $z = f(x, y)$ の x のみを変数 (y は定数) とみて x について微分することを, x について偏微分するといひ, 得られた関数を $\frac{\partial z}{\partial x}$, f_x , z_x などで表し, x についての偏導関数という. x と y の役割を入れかえて, $z = f(x, y)$ の y のみを変数 (x は定数) とみて y について微分することを, y について偏微分するといひ, 得られた関数を $\frac{\partial z}{\partial y}$, f_y , z_y などと表わし, y についての偏導関数という.

こうして得られた2種の偏導関数について, さらに偏微分すると第2次偏導関数が得られる. ここで無造作に偏微分してと言ったが, 微分するのは微分可能であるからなのと同様に, 偏微分するのは偏微分可能であるときでなければならない. 一般には, 微分すると微分可能性は保存されない (連続性さえ保存されない) のであるが, 応用上扱う関数は微分可能性が保存されるものがほとんどである.

x についての偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ を, 引き続いてもう一度 x で偏微分して得られる第2次偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = z_{xx}$ で表す. y についての偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ を, 引き続いてもう一度 y で偏微分して得られる第2次偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = z_{yy}$ で表す. $\frac{\partial z}{\partial x}$ を, 今度は y で偏微分すると, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy} = z_{xy}$ を得る. また, $\frac{\partial z}{\partial y}$ を, x で偏微分すると, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = z_{yx}$ を得る. つまり, x で偏微分してから y で偏微分するか, y で偏微分してから x で偏微分するか, 順序が問題なのである. 一般には, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ と $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ とは, 一致するとは限らないが, 応用上用いられる関数では, 一致することがほとんどであるから, 本書では, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と考える.

注意 $z = f(x, y)$ の第2次偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ が存在して, それらが

連続関数ならば, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ となることが知られている.

$z = f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ が計算できたとき,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

を, z の全微分という. たとえば, $z = xy$ ならば, $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ だから

$dz = y dx + x dy$ ということになる. 全微分については以下の事が成立する.

2 変数関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ に対して

$$(1) \quad d(u+v) = du + dv \quad (2) \quad d(ku) = k du \quad (k \text{ は定数})$$

$$(3) \quad d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$$

とくに, $z = f(x)$, $w = g(y)$ に対しては, それぞれ

$$(4) \quad dz = f'(x) dx, \quad dw = g'(y) dy$$

が成立する.

問 6 つぎの関数の偏導関数を求めよ.

$$(1) \quad z = x^3 + 3xy^2 - y^3 \quad (2) \quad z = e^{xy} + y^2$$

$$(3) \quad z = \frac{y}{x} \quad (4) \quad z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

問 7 全微分の性質(1)~(4)を示せ.

問 8 つぎの関数の全微分を求めよ.

$$(1) \quad z = x^2 \quad (2) \quad z = \sin y \quad (3) \quad z = x^2 + y^2$$

$$(4) \quad z = x^3 + 3xy^2 - y^3 \quad (5) \quad z = \frac{y}{x} \quad (6) \quad z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

4. ベキ級数

定数 a , 変数 x , 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \quad (1.2)$$

の形の級数を, a を中心とするべき級数 (整級数) という.

級数であるから, 収束や発散が問題となる. (1.2) が収束するような x の値の全体を, (1.2) の収束域という. 収束域における任意の x について (1.2) は収束する. このとき (1.2) の右辺を級数の和という. したがって (1.2) はその

収束域で1つの関数を定義する。また必要があれば平行移動すればよいので $a=0$, つまり原点中心のべき級数について考えればよい。一般に, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ に対して, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき, もとの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。絶対収束する級数は収束することが知られている。べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して, $|x| < r$ なら絶対収束し, $|x| > r$ なら発散するような正数 r が存在する。この r のことを収束半径という。とくに, 全ての x に対して絶対収束するときは, $r = \infty$, $x \neq 0$ なるすべての x で発散するときは $r = 0$ とする。原点ではどのようなべき級数も収束するので, $r = 0$ のとき, 収束域は原点のみである。さて, べき級数は, いわば, 無限次多項式であるので, 微分や積分については多項式と同じこと (ただし収束半径内だけ!) が成立する。すなわち

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とすると

(1) $f(x)$ は $-r < x < r$ で微分可能であって,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (-r < x < r) \text{ (項別微分)}$$

$$(2) \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (-r < x < r) \text{ (項別積分)}$$

(1), (2) は項の数は無限個だが多項式の場合と同じようにしてよいことを示している。ちがうのは多項式のときは, 全ての実数について成立するが, べき級数の場合は収束半径内だけでしか成立しないということである。ここで収束半径 r についての $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}$ や $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$ も復習しておこう。さて, (1) を繰り返し使うと係数 a_n は次のように表わせる。

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$\text{これより } x=0 \text{ として } f'(0) = a_1$$

$f'(x)$ は(1)より収束半径内で再び微分可能, したがって

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$$

$$x=0 \text{ として } f''(0) = 2a_2$$

全く同様に

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \quad \therefore a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$f(0)=a_0$ であるから、これらより

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad (1.3)$$

$$(-r < x < r)$$

が成立する。逆に無限回微分可能な関数 $f(x)$ が原点を含む区間で (1.3) の形に展開できるとき、(1.3) を $f(x)$ のマクローリン展開という。 e^x , $\sin x$, $\cos x$ などは、 $-\infty < x < \infty$ でマクローリン展開可能なことが知られている。

(1.3) を利用して

$$(i) \quad f(x)=e^x \text{ のとき} \quad f^{(n)}(x)=e^x \quad \text{従って} \quad f(0)=f^{(n)}(0)=e^0=1$$

$$(n \geq 1)$$

これより

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(ii) \quad f(x)=\sin x \text{ とすると, } f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{したがって} \quad f(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & (n=2k) \\ (-1)^k & (n=2k+1) \end{cases}$$

$$\therefore \sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(iii) (ii)を項別微分して

$$\cos x=(\sin x)'=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$(iv) \quad f(x)=\frac{1}{1-x} \text{ ならば } \frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

ここで、第3章で必要となる、オイラーの公式を思い出しておこう。(i)に $x=i\theta$ ($i^2=-1$) を代入して実数部分と虚数部分にわけると、

$$e^{i\theta}=\cos \theta+i \sin \theta$$

が得られる。さらに複素数 $\alpha=\mu+i\nu$ に対して、

$$e^{\alpha x}=e^{\mu x+i\nu x}=e^{\mu x} \cdot e^{i\nu x}=e^{\mu x}(\cos \nu x+i \sin \nu x)$$

が成立することがわかっている。

問9 e^x のマクローリン展開式(i)を項別微分して $(e^x)' = e^x$ を確かめよ。

問10 (i)に $x=i\theta$ を代入し, $i^2=-1$ を利用してオイラーの公式を導け。

5. 無限積分

区間 $[a, \infty)$ で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し,

極限值

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

が存在するとき, この極限値を $\int_a^\infty f(x) dx$ とかき, 無限積分という。他の無限積分についても

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx$$

として同様に, 右辺の極限が存在するとき, その極限として定義される。

例7

無限積分 $\int_0^\infty e^{-(s-1)x} dx$ の存在について調べよう。 ($s > 0$)

(イ) $s > 0$, $s \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(s-1)x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-1)x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s-1} e^{-(s-1)x} \right]_0^b \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-1} & (s > 1) \\ \infty & (0 < s < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

(ロ) $s = 1$ のとき

$$\int_0^\infty e^{-(s-1)x} dx = \int_0^\infty dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [x]_0^b = \infty$$

故に, $s > 1$ のときこの無限積分は存在して

$$\int_0^\infty e^{-(s-1)x} dx = \frac{1}{s-1} \quad (s > 1)$$

6. 行列式

n 次の行列式は, n^2 個の数 a_{ij} を正方形にならべて, つぎの計算法則で定義される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \text{sign } \sigma \, a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ は置換であり, 異なるものは $n!$ 個ある. 右辺の $\sum_{\sigma}$ はこれらの置換をすべて動いたものの和を表す. また $\text{sign } \sigma$ は σ が偶置換であれば $+1$, 奇置換であれば -1 を表す. $n=2$ や $n=3$ の場合は サラスの方法とよばれる簡単な法則になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$n \geq 4$ の場合は上のような『たすきがけ』はできないことをあらためて注意しておく. つぎのように, 左上から右下への対角線から下の要素はすべて 0 であるような特別な形をしている (三角行列式) の場合は簡単である.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$n \geq 4$ の場合, 一般には, つぎの基本性質をくりかえして, 上の三角行列式に導くか, または余因数展開を利用して, $n=2$ または 3 の場合に帰着させる.

基本性質

(i) 行列式の行と列を入れかえても、その値は変わらない。

(ii) 行列式の1つの行〔列〕のすべての要素に同一の数 λ をかけて得られる行列式の値は、もとの行列式の値の λ 倍である。

(iii) 行列式の1つの行〔列〕の要素がそれぞれ2数の和であれば、その行〔列〕の要素をそれぞれ和の各項でおきかえて得られる2つの行列式の和に等しい。

(iv) 2つの行〔列〕を入れかえれば行列式の符号だけが変わる。

(v) 行列式の1つの行〔列〕の各要素に同じ数 λ をかけて、他の行〔列〕に加えても行列式の値は変わらない。

(ii), (iv)から、つぎのような性質も得られる。

(ii)' 1つの行〔列〕のすべての要素が0であるような行列式の値は0である。

(iv)' 2つの行〔列〕の要素が等しい行列式の値は0である。

問11 つぎの行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

第1章 問題

1. つぎの等式を証明せよ。

$$(1) \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

2. つぎの関数のグラフをかけ.

$$(1) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) y = \sec x$$

$$(3) y = \cosh x$$

$$(4) y = \sinh^{-1} x$$

3. つぎの極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1}$$

4. ライプニッツの公式

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \{f(x)g(x)\} &= \frac{d^n}{dx^n} f(x) \cdot g(x) + {}_n C_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) \\ &+ {}_n C_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} f(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} g(x) + \cdots + {}_n C_r \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} f(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r} g(x) \\ &+ \cdots + {}_n C_{n-1} \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) + f(x) \frac{d^n}{dx^n} g(x) \end{aligned}$$

を n についての数学的帰納法で証明せよ. ここで ${}_n C_r$ は 2 項係数といって

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

5. つぎの連立 1 次方程式を解け

$$(1) \begin{cases} x - y + 2z = 11 \\ x + y - 4z = -7 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ -4b + 5c = 6 \\ 9a + 8c = 7 \end{cases}$$

第2章 1階微分方程式（求積法）

本章では、1階微分方程式の解を不定積分を利用することによって求める、求積法とよばれる手法のいくつかを説明する。

§ 1 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形に書ける1階微分方程式を変数分離形という。右辺の $f(x)$, $g(y)$ はそれぞれ x のみ, y のみの関数となっている。

$$\text{例 1} \quad \frac{dy}{dx} = xy, \quad \frac{dy}{dx} = e^x e^y (= e^{x+y}), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y = \frac{y}{x}$$

は、いずれも変数分離形である。それぞれ、 $f(x)$ を x , e^x , $\frac{1}{x}$ に、 $g(y)$ を y , e^y , y にとればよい。

$$\text{例 2} \quad \frac{dy}{dx} = x - y, \quad \frac{dy}{dx} = e^{xy} \quad \text{はどちらも変数分離形ではない。}$$

変数分離形は微分方程式の中でも、もっとも簡単で基本的なものである。直接には変数分離形ではなくとも、上手に変形すると変数分離形になることがしばしばある。

まず $g(y) \neq 0$ なるところで考える。この時 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ の両辺を $g(y)$ で割って、

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$$

両辺を x で積分して

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

左辺は置換積分法により $\int \frac{1}{g(y)} dy$ となるから

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c$$

となる。これが与えられた微分方程式の一般解である。

注意 $g(y)=0$ をみたす y の値 k (すなわち $g(k)=0$) に対して, $y=k$ も与えられた微分方程式の解である。($y'=0=f(x)g(k)=f(x)g(y)$)

この手順を, 簡単に次のように書く

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \quad \text{から} \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \\ \therefore \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx + c \quad (c \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ から $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$ に, つまり等号をはさんで x と y の式に分離できるというのが, 変数分離の意味である。

例 3 $\frac{dy}{dx} = y$

$f(x)=1, g(y)=y$ と考えて, 変数分離形である。

$$\frac{1}{y} dy = dx \text{ と変形できるから}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

これより

$$\log |y| = x + c \quad \therefore |y| = e^{x+c} \quad \therefore y = \pm e^c e^x$$

c が任意の値をとることにより, $\pm e^c$ は 0 以外の任意の実数をとる。ここで $\pm e^c$ をあらためて c とおいて,

$$y = ce^x \quad (c \text{ は 0 でない任意定数})$$

ここで, 定数関数 $y=0$ は, $\frac{dy}{dx} = y$ を満たすから, これも 1 つの解である。これは上式で $c=0$ とおけば得られるので, 一般解は次のようになる。

$$y = ce^x \quad (c \text{ は任意定数})$$

上の計算では, $\log |y|$ としたが, 絶対値の符号は, 最後で, 定数の任意性に

含めることができるので、微分方程式の解を求める場合には単に $\log y$ とかいてよい。従って上の計算は、次のように簡単に書く。

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} dy = dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{y} dy = \int dx + c \quad \therefore \log y = x + c$$

故に、 $y = e^{x+c} = e^c e^x$ 。ここで e^c をあらためて c として、一般解は

$$y = ce^x \quad (c \text{ は任意定数})$$

例 4 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$ として変数分離形である。

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \quad \text{から} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\therefore \log y = \log x + c \quad \therefore \log y - \log x = c$$

$$\text{これより} \quad \log \frac{y}{x} = c \quad \therefore \frac{y}{x} = e^c$$

e^c をあらためて c とおいて、一般解は、 $y = cx$ である。 (c は任意定数)

注意 等号をはさんで、 x の式と y の式とが分離できればよいと言っても、

$\frac{y}{dy} = \frac{x}{dx}$ などと変形したのでは $\int \frac{y}{dy}$ や $\int \frac{x}{dx}$ となってしまうて、何の意味

やらさっぱりわからない。このような機械的な記憶をしてはならない。

問 1 つぎの微分方程式を解け。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = x$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = xy$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$(4) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = (y^2-1) \tan x$$

$$(7) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(8) \quad x(y^2-1) = y(x^2-1) \quad \frac{dy}{dx}$$

$$(9) \quad (x^2-1) \frac{dy}{dx} = y$$

$$(10) \quad \left(x \frac{dy}{dx}\right)^2 = (2y)^2$$

例 5 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\cos x}{y}\right)^2$ を初期条件 $[x=0, y=1]$ のもとで解こう。

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cdot \frac{1}{y^2}$ だから $f(x) = \cos^2 x$, $g(y) = \frac{1}{y^2}$ と考えて変数分離形である。

$$y^2 dy = \cos^2 x dx \text{ と変形できるから } \int y^2 dy = \int \cos^2 x dx + c$$

ここで

$$\int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\therefore \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$x=0, y=1$ を代入して, $\frac{1}{3} = c$ 従って与えられた初期条件のもとでの特殊解は $2(y^3 - 1) = 3(x + \sin x \cos x)$ である.

問2 つぎの微分方程式を [] を初期条件として解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = y(1-y) \quad \left[x=0, y=\frac{1}{2} \right]$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = a - by \quad [x=0, y=y_0] \quad (a, b > 0, \text{ 定数})$$

変数分離形に帰着できる微分方程式を考えてみよう.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形をした1階微分方程式を同次形という. 右辺は, t の関数 $f(t)$ で $t = \frac{y}{x}$ としたものである.

$$\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}, \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2} = 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

のように, 上手に変形すれば $\frac{y}{x}$ で表わせるという意味である.

$$\frac{y}{x} = u \text{ とおけば, } y = xu. \text{ 両辺を } x \text{ で微分すれば, } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{これらを } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ に代入して } u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

$$\text{すなわち } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \{f(u) - u\}$$

となり, これは u, x についての変数分離形である.

$$\text{例6 } \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$ だから同次形である. $\frac{y}{x} = u$ とおけば, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ これを代

$$\text{入して } u + x \frac{du}{dx} = 1 + u \quad \therefore x \frac{du}{dx} = 1 \quad \therefore du = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore \int du = \int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\therefore u = \log x + c \quad \therefore \frac{y}{x} = \log x + c$$

従って一般解は $y = x(\log x + c)$ (c は任意定数)

例 7 $(x^2 - xy)y' = -y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2 - xy} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \frac{y}{x}} \text{ だから同次形である. } \frac{y}{x} = u \text{ とおけば}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \text{ これを代入して } u + x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1-u} \text{ 従って,}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \text{ 従って } \frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x} \quad \therefore \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x} + c$$

(c は任意定数) 故に $u - \log u = \log x + c$

$$u = \log x + \log u + c \quad \therefore u = \log xu + c$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \log y + c \text{ すなわち } \log y = \frac{y}{x} - c \quad y = e^{\frac{y}{x} - c} = e^{\frac{y}{x}} e^{-c}$$

ここで e^{-c} をあらためて c で表わすと一般解は

$$y = ce^{\frac{y}{x}} \quad (c \text{ は任意定数})$$

問 3 つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = 2y + x$$

$$(3) (x^2 - 2y^2)dx + 3xy dy = 0$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$$

$$(5) 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$$

$$(6) x \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$(7) x \frac{dy}{dx} + y + 2x = 0$$

$$(8) \frac{dy}{dx} = \frac{4x - y - 6}{2x + y}$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{4x - 2y + 1}{2x - y - 1}$$

$$(10) (2x + 4y - 6) \frac{dy}{dx} + x - 2y + 1 = 0$$

§ 2 線 形

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.1)$$

の形に書ける1階微分方程式を線形という。 $P(x)$, $Q(x)$ は共に x だけの関数となっている。とくに, $Q(x)=0$ の場合は,

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \quad (2.2)$$

となるから変数分離形になっている。ここでは, (2.2) の一般解をまず求め, その解を利用して線形微分方程式 (2.1) の一般解を求めてみよう。

(2.2) の式より

$$\frac{1}{y} dy = -P(x) dx \quad \therefore \int \frac{1}{y} dy = -\int P(x) dx + c$$

$$\text{故に } \log y = -\int P(x) dx + c \quad \therefore y = e^{-\int P(x) dx + c}$$

e^c をあらためて c とおいて, (2.2) の一般解は

$$y = ce^{-\int P(x) dx} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となる。 $Q(x) \neq 0$ の場合を求めるために, この定数 c を, x の関数 $c(x)$ でおきかえて, $y = c(x)e^{-\int P(x) dx}$ の形をした (2.1) の解が存在するかどうか調べてみよう。積の微分と合成関数の微分を利用して,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c'(x)e^{-\int P(x) dx} + c(x)e^{-\int P(x) dx} \{-P(x)\} \\ &= c'(x)e^{-\int P(x) dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x) dx} \end{aligned}$$

y と $\frac{dy}{dx}$ を (2.1) に代入して

$$c'(x)e^{-\int P(x) dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x) dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$\therefore c'(x)e^{-\int P(x) dx} = Q(x) \quad \therefore c'(x) = Q(x)e^{\int P(x) dx}$$

$$\text{故に } c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

これを $y = c(x)e^{-\int P(x) dx}$ に代入して, (2.1) の解として

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right\}$$

を得た。しかも、これは任意定数を1つ含んでいるので(2.1)の一般解である。
これをまとめて、

1 階線形微分方程式

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right\}$$

(c は任意定数)

上に述べたように、特別な場合の結果を知っていて、これから得られる解の定数 c を変化させて、一般の場合の解を得る方法を定数変化法とよび、有効な方法である。また上の公式の、 $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$ は $P(x)$ の不定積分 $\int P(x) dx$ をまず計算した上で、指数関数 $e^{\int P(x) dx}$ を考え、あらためて $Q(x)$ との積をとり、さらに不定積分を求めたものである。

例 8 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3$

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^3$ と考えて、線形である。一般解は

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int x^3 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right\} \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{だから} \quad e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$$

$$e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\log x} = e^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

従って

$$y = \frac{1}{x} \left\{ \int x^3 x dx + c \right\} = \frac{1}{x} \left\{ \int x^4 dx + c \right\} = \frac{1}{x} \left(\frac{x^5}{5} + c \right)$$

故に、一般解は $y = \frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$ (c は任意定数)

例 9 $xy' + y = x \log x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \log x \quad \text{だから} \quad P(x) = \frac{1}{x} \quad Q(x) = \log x \text{ と考えて、}$$

線形である。一般解は

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int \log x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right\} \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$= e^{-\log x} \left\{ \int \log x e^{\log x} dx + c \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ \int x \log x dx + c \right\}$$

ここで、部分積分法によって

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4} (2 \log x - 1) \end{aligned}$$

従って、一般解は

$$y = \frac{1}{x} \left\{ \frac{x^2}{4} (2 \log x - 1) + c \right\} = \frac{x}{4} (2 \log x - 1) + \frac{c}{x} \quad (c \text{ は任意定数})$$

○ 問 4 つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 e^x$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$(4) x \frac{dy}{dx} - (x+1)y = x^2$$

$$(5) (1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy - 2x = 0$$

$$(6) x \frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$(7) \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$(8) x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - x + 1 = 0$$

$$(9) \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$$

$$(10) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$$

つぎに線形に帰着される微分方程式にふれておこう.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

の形をした 1 階微分方程式は、 $n=0$ のとき、本節の線形であり、 $n=1$ のとき、

$\frac{dy}{dx} = \{Q(x) - P(x)\}y$ となり変数分離形である. そこで、 $n \neq 0, 1$ なる定数に

ついて、この微分方程式をベルヌイ形という.

この場合、 $u = y^{1-n}$ とおくと $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ の両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけて

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x) \text{ となるから}$$

$u = y^{1-n}$, $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ でおきかえると, u, x についての 1 階線形微分

方程式 $\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$ を得る.

$$\text{例10 } \frac{dy}{dx} - y = xy^2$$

$P(x) = -1$, $Q(x) = x$, $n = 2$ と考えてベルヌイ形である.

$$u = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \text{ とおくと, } \frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^2 \text{ の両辺に } -\frac{1}{y^2} \text{ をかけて, } -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = -x$$

従って, $\frac{du}{dx} + u = -x$ これは線形だから, 一般解は,

$$u = e^{-\int dx} \left[-\int x e^{\int dx} dx + c \right] \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\therefore u = e^{-x} \left[-\int x e^x dx + c \right]$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \text{ だから } u = e^{-x} [-(x-1)e^x + c]$$

$$\therefore u = 1 - x + c e^{-x} \quad \therefore \frac{1}{y} = 1 - x + c e^{-x} \text{ 故に一般解は}$$

$$(1 - x + c e^{-x})y = 1 \quad (c \text{ は任意定数})$$

問5 つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{y}$$

$$(2) \quad x \frac{dy}{dx} + y = y^2$$

$$(3) \quad 3 \frac{dy}{dx} + xy = \frac{x}{y^2}$$

$$(4) \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = y^3 + 2 \sin x$$

$$(5) \quad x^2 \frac{dy}{dx} = xy + y^3$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} + y = \frac{x}{y}$$

$$(7) \quad (x-2y)dy + ydx = 0$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} - xy + xy^2 e^{-x^2} = 0$$

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} - xy = \frac{x}{y}$$

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 2x^2y^{\frac{4}{3}}$$

§ 3 完 全 形

x, y の2変数関数 $P(x, y), Q(x, y)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = P(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = Q(x, y)$$

となる2変数関数 $\varphi(x, y)$ が存在して

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

の形に書ける1階微分方程式を完全形という。これは

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

となっていてよい。

$z = \varphi(x, y)$ とおけば, z の全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ だから $dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ となり, $z = c$ (c は任意定数), すなわち, 完全形1階微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の一般解は $\varphi(x, y) = c$ (c は任意定数) である。従って $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全形であるという判断がつけば, 解はたやすい。ところで, この $\varphi(x, y)$ が存在してとか, 存在すればというのが, 数学では曲者である。そこで, いきなり $\varphi(x, y)$ がわからなくても, 完全形であるか否かを判断する方法がないであらうか。 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全形であれば, ある関数 $\varphi(x, y)$ が存在して $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ であるから, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 逆に $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ならば $\varphi(x, y) = \int_0^x P(x, y)dx + \int_0^y Q(0, y)dy$ とおく。ここで右辺の第1項は, $P(x, y)$ を x のみの関数とみて積分したもの, 第2項は, $x=0$ として y のみの関数 $Q(0, y)$ を y で積分したもの。0 は P, Q によっては都合が悪いものがあるかもしれないが, そのときは1とか2とか都合のよい定数でおきかえればよい。このとき $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + Q(0, y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dx + Q(0, y) = Q(x, y)$$

$-Q(0, y) + Q(0, y) = Q(x, y)$ となる。つまり、 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全形であることを調べるには、 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ がわかればよい。

例11 $y dx + x dy = 0$

$P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$ だから $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ となって完全形である。

$\varphi(x, y) = xy$ にとれば、 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x$, すなわち $d\varphi = y dx + x dy = 0$ となって、一般解は $xy = c$ (c は任意定数) となる。

$\varphi(x, y)$ は上に述べたように、 $\varphi(x, y) = \int_0^x y dx + \int_0^y 0 dy = y \int_0^x dx = xy$ と忠実に求めてもよい。

$$(\varphi(x, y) = \int_1^x y dx + \int_1^y 1 dy = y[x]_1^x + [y]_1^y = xy - y + y - 1 = xy - 1 \text{ でもよい。})$$

例12 $(2x + 3y^2)dx + 3y(2x - y)dy = 0$

$P(x, y) = 2x + 3y^2$, $Q(x, y) = 3y(2x - y)$ だから $\frac{\partial P}{\partial y} = 6y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ となって完全形である。左辺を少し組みなおして、 $(2x + 3y^2)dx + 3y(2x - y)dy = 2x dx + 3(y^2 dx + 2xy dy) - 3y^2 dy$ と変形する。 $d(x^2) = 2x dx$, $d(xy^2) = y^2 dx + 2xy dy$, $d(y^3) = 3y^2 dy$ に注意して $d(x^2 + 3xy^2 - y^3) = (2x + 3y^2)dx + 3y(2x - y)dy = 0$ だから一般解は、 $x^2 + 3xy^2 - y^3 = c$ (c は任意定数) となる。

この変形が不得意な向きは、上に述べたように、 $\varphi(x, y) = \int_0^x (2x + 3y^2) dx + \int_0^y 3y(0 - y) dy = [x^2 + 3xy^2]_0^x - [y^3]_0^y = x^2 + 3xy^2 - y^3$ としてもよい。

注意 完全微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ に対し初期条件 $[x = x_0, y = y_0]$ のもとでの特殊解は $\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = 0$ で与えられる。

問 6 つぎの微分方程式を解け。

(1) $4y dy + x dx = 0$

(2) $xy^2 dx + x^2 y dy = 0$

(3) $\frac{2}{x} dx - \frac{dy}{y^2} = 0$

(4) $(y - \frac{1}{x^2 y}) dx + (x - \frac{1}{xy^2}) dy = 0$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x(2+3xy^2)}{y(3y-2x^3)}$$

$$(6) \quad (xe^{xy}+2y)\frac{dy}{dx}+ye^{xy}=0$$

$$(7) \quad 4x^3 \sin y \, dx + x^4 \cos y \, dy = 0 \quad (8) \quad y \cos xy \, dx + x \cos xy \, dy = 0$$

$$(9) \quad (\tan y + y \sin x) \, dx + (x \sec^2 y - \cos x) \, dy = 0$$

$$(10) \quad \cos x \cos y \, dx - \sin x \sin y \, dy = 0$$

問7 つぎの微分方程式を, 与えられた初期条件 [] のもとで解け.

$$(1) \quad 9(y-1) \, dy + (x-3) \, dx = 0 \quad [x=3, y=0]$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{1+y} \quad [x=1, y=0]$$

$$(3) \quad (\cos x + y \sin x) \, dx = \cos x \, dy \quad [x=\pi, y=0]$$

$$(4) \quad 2xy \, dx + (x^2 + \pi \cos \pi y) \, dy = 0 \quad [x=1, y=1]$$

$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0$ は $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ であっても, 何か適当な関数

$F(x, y)$ を探して, 両辺に $F(x, y)$ をかけると

$$F(x, y) P(x, y) \, dx + F(x, y) Q(x, y) \, dy = 0$$

が完全形になることがある. このような $F(x, y)$ を積分因数という. $F(x, y)$ を探すのは, 一般には困難だが,

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F(x, y) P(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F(x, y) Q(x, y)\}$$

が成り立てばよいのだから, 積の微分から,

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \cdot P(x, y) + F(x, y) \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \cdot Q(x, y)$$

$+ F(x, y) \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$ が成り立てばよい. すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial y} P - \frac{\partial F}{\partial x} Q = F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{ が成り立てばよい.}$$

故に $\lambda(x) = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ が x だけの関数のときや, $\mu(y) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$

が y だけの関数の場合は, $F(x, y)$ として, それぞれ $e^{\int \lambda(x) \, dx}$, $e^{-\int \mu(y) \, dy}$ をとれ

ばよい. 何故ならば $\frac{\partial}{\partial y} (e^{\int \lambda(x) \, dx} P) = e^{\int \lambda(x) \, dx} \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{\int \lambda(x) \, dx} Q) = e^{\int \lambda(x) \, dx} \lambda(x) Q + e^{\int \lambda(x) \, dx} \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\int \lambda(x) \, dx} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{だから} \quad \frac{\partial}{\partial y}(e^{\int \lambda(x) dx} P) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\int \lambda(x) dx} Q) \\
 \frac{\partial}{\partial y}(e^{-\int \mu(y) dy} P) &= e^{-\int \mu(y) dy} \{-\mu(y)\} P + e^{-\int \mu(y) dy} \frac{\partial P}{\partial y} \\
 &= e^{-\int \mu(y) dy} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = e^{-\int \mu(y) dy} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\int \mu(y) dy} Q \right)
 \end{aligned}$$

例13 $x dy - y dx = 0$

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x \quad \text{だから} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{x} (-1 - 1) = -\frac{2}{x} \quad \text{は } x \text{ だけの関数だから, 積分}$$

因数として $F(x, y) = e^{\int (-\frac{2}{x}) dx} = e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = e^{-2 \log x} = e^{\log \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$ を選ぶことがで

きる. 従って $x dy - y dx = 0$ の両辺に $\frac{1}{x^2}$ をかけて, $\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$

$$\text{ここで} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \quad \text{だから}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{x}{x^2} dy = \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0 \quad \text{故に求める一般解は}$$

$$\frac{y}{x} = c \quad \text{すなわち} \quad y = cx \quad (c \text{ は任意定数})$$

問 8 つぎの微分方程式を解け.

- | | |
|--|--|
| (1) $2y^2 dx + 3xy dy = 0$ | (2) $(1 - 2x^2 y) dx + x(2y - x^2) dy = 0$ |
| (3) $(1 - x^2 y) dx + x^2(y - x) dy = 0$ | (4) $x^2 y dx + (x^3 + 2y) dy = 0$ |
| (5) $y dx + 2x dy = 0$ | (6) $y dx + x \log x dy = 0$ |
| (7) $\sin y dx + \cos y dy = 0$ | (8) $y dx - 2x dy = 0$ |
| (9) $x \cos y dy - \sin y dx = 0$ | (10) $2 \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$ |

§ 4 クレーロー形 (特異解の現れる場合)

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

の形をした 1 階微分方程式をクレーロー形という. $f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ は t の関数 $f(t)$ で

$t = \frac{dy}{dx}$ とおいたものである。 $t = \frac{dy}{dx}$ とおくと、クレロー形は $y = xt + f(t)$

と表わせる。 $y = xt + f(t)$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx} + f'(t) \frac{dt}{dx} \quad \text{となつて、} \{x + f'(t)\} \frac{dt}{dx} = 0 \quad \text{となる。}$$

従つて $\frac{dt}{dx} = 0$ または $x + f'(t) = 0$

$\frac{dt}{dx} = 0$ ならば $t = c$ (c は任意定数) だから、一般解 $y = cx + f(c)$ (c は任意定数) を得る。

$x + f'(t) = 0$ ならば $y = xt + f(t)$ とから t を消去して、 $y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ のもうひとつの解が得られる。これが特異解である。これは、大雑把に言えば、直線群 $y = cx + f(c)$ の包絡線を与える。

例14 $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$f(t) = \frac{1}{t}$ と考えて、クレロー形である。従つて一般解は $y = cx + \frac{1}{c}$ (c は任意定数) となり、 $t = \frac{dy}{dx}$ だから特異解は $y = xt + \frac{1}{t}$ と、これを x で微分して $t = t + x \frac{dt}{dx} - \frac{1}{t^2} \frac{dt}{dx}$ から得た $x = \frac{1}{t^2}$ とから t を消去したもののだから、 $xt = \frac{1}{t}$ から $y = xt + \frac{1}{t} = \frac{2}{t}$ 故に、 $y^2 = \frac{4}{t^2} = 4x$ 、すなわち $y^2 = 4x$ が特異解となる (p. 5 参照)

問9 つぎの微分方程式を解け。

$$(1) \quad y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$(2) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(3) \quad y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{dy}{dx}}$$

$$(4) \quad y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1}$$

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

の形をした1階微分方程式をラグランジュ形という。 $f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ は t の

関数 $f(t)$, $g(t)$ で $t = \frac{dy}{dx}$ とおいたものである. $f(t) = t$ の場合はクレーロー形ということになる. $t = \frac{dy}{dx}$ とおけば

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = t \frac{dx}{dt} \quad \text{となる.}$$

$y = xf(t) + g(t)$ の両辺を t で微分すると,

$$t \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} f(t) + xf'(t) + g'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} \{t - f(t)\} = xf'(t) + g'(t) \quad \text{従って,}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{xf'(t) + g'(t)}{t - f(t)} \quad \text{故に}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{f'(t)}{f(t) - t} x = \frac{g'(t)}{t - f(t)} \quad \text{となって } x, t \text{ の 1 階線形微分方程式と}$$

なった. これの一般解 $x = \varphi(t; c)$ (c は任意定数) を得て, $y = xf(t) + g(t)$

とから t を消去すれば $y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ の一般解が得られる. また

$f(t) - t = 0$ の解 $t = t_0$ から得られる解 $y = t_0 x + g(t_0)$ は特異解となることがある.

$$\text{例15} \quad y = 2x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$t = \frac{dy}{dx} \quad \text{とおけば} \quad \frac{dy}{dt} = t \frac{dx}{dt} \quad \text{だから} \quad y = 2xt + t^2 \text{ の両辺を } t \text{ で微分して}$$

$$t \frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} t + x\right) + 2t \quad \therefore -t \frac{dx}{dt} = 2x + 2t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t} x = -2 \quad \text{故に一般解は} \quad x = e^{-\int \frac{2}{t} dt} \left[-2 \int e^{\int \frac{2}{t} dt} dt + c \right] \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\text{従って} \quad x = e^{-2 \log t} \left[-2 \int e^{2 \log t} dt + c \right] = \frac{1}{t^2} \left[-\frac{2}{3} t^3 + c \right]$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} t + \frac{c}{t^2}$$

$$y = 2xt + t^2 = 2t \left(-\frac{2}{3} t + \frac{c}{t^2} \right) + t^2 = -\frac{1}{3} t^2 + \frac{2c}{t}$$

従って求める一般解は t を助変数として

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2} \\ y = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2c}{t} \end{cases} \quad (c \text{ は任意定数})$$

$f(t)=2t$ だから $f(t)-t=0$ の解は $t=0$ 従って $y=0x+0^2=0$ はこの場合特異解である。(一般解に表れる定数 c へどんな値を代入しても $y=0$ は得られない).

第2章 問題

1. つぎの微分方程式を解け.

- (1) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = xy^2$
- (2) $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = xy$
- (3) $(x+y)^2\frac{dy}{dx} = 1$
- (4) $x\frac{dy}{dx} + y + y^2 = 0$
- (5) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y)\frac{dy}{dx} + y = 0$
- (6) $\frac{dy}{dx} + xy - x = 0$
- (7) $2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy\frac{dy}{dx}$
- (8) $\frac{dy}{dx} + (y-1)(y-2) = 0$
- (9) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \cos x$
- (10) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

2. つぎの微分方程式を解け.

- (1) $x(x-y)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$
- (2) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x}y = e^{-x}$
- (3) $x(\log y - \log x)dy = y(1 + \log y - \log x)dx$
- (4) $\cosh x dy - (y + \cosh x) \sinh x dx = 0$
- (5) $(e^x + \log y)dx + \frac{x+y}{y}dy = 0$
- (6) $\left(\sin x + \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)dx - (y - \log \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$
- (7) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - x = 0$
- (8) $x\frac{dy}{dx} = y + x^2e^x$
- (9) $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x \cos x$
- (10) $2y\frac{dy}{dx} = x - y^2$

3. つぎの微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = x^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^n \quad (a, b, n \text{ は定数}) \text{ をリッカチ形という.}$$

いまの場合は $y = \frac{z}{x^2} - \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{X}$, $z = \frac{1}{Z}$ とおけば Z の X についての変数分離形となる.

4. つぎの微分方程式を初期条件 [] のもとで解け.

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (\lambda > 0, N_0 \text{ は定数}) [t=0, N=N_0]$$

$$(2) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T-a) \quad (a, b, k \text{ は定数}) [t=0, T=b]$$

$$(3) \quad v \frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} \quad (g, R, v_0 \text{ は定数}) [r=R, v=v_0]$$

$$(4) \quad \frac{dh}{dt} = kh^{-\frac{3}{2}} \quad (a, k \text{ は定数}) [t=0, h=a]$$

$$(5) \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \quad (L, R, E_0 \text{ は定数}) [t=0, i=0]$$

$$(6) \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t \quad (L, R, E_0, \omega \text{ は定数}) [t=0, i=0]$$

第3章 線形微分方程式

第2章では、1階の微分方程式について学んで来たが、本章では、もっと高い階数の微分方程式を扱う。\$n\$階微分方程式のうち、線形と呼ばれるもの、とりわけ、定数係数の線形微分方程式の解法を学ぶことにしよう。

§1 線形微分方程式

はじめに、線形微分方程式とはどういうものかについて見ていこう。変数 \$x\$ についての \$n+2\$ 個の関数 \$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), R(x)\$ (とくに \$a_0(x) \neq 0\$) について、

微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = R(x) \quad (3.1)$$

を、関数 \$y\$ についての \$n\$ 階線形微分方程式という。この微分方程式の特徴は \$y, y'\$ および \$y\$ の高次導関数からなる左辺にある。左辺は、\$y\$ および \$y', y'', \dots, y^{(n)}\$ の2乗以上の項を含まない。また、\$y, y', \dots, y^{(n)}\$ の中のどの2つの積も含んでいない。これは言い換えると、\$y, y', \dots, y^{(n)}\$ の各々について1次式になっているということである。(3.1)で特に右辺が \$R(x) \equiv 0\$ となっているものを、同次形、\$R(x) \neq 0\$ なるものを非同次形という。さらに、\$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)\$ がすべて定数(値関数)のとき、(3.1)を定数係数の線形微分方程式と呼ぶ。以下詳しく学ぶのはこの場合である。

例1

$$(1) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1 \qquad (2) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

$$(4) \quad \sin x \frac{d^3 y}{dx^3} + \cos x \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$$

(1)は、第2章 § 2 で学んだ1階線形微分方程式である。(2), (3)は、2階線形微分方程式であり、特に(3)は定数係数である。(4)は3階線形微分方程式である。また、(2), (4)は同次形、(1), (3)は非同次形となっている。

線形微分方程式の特徴をしらべよう。簡単のために、 $n=2$ の場合を考えよう。

(i) 2階線形微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = R(x) \quad (3.2)$$

の一般解は $y = \varphi(x; c_1, c_2) + \psi(x)$ とかける。ここに、 $y = \varphi(x; c_1, c_2)$ は、

(3.2) に対応する同次線形微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \quad (3.3)$$

の一般解であり(c_1, c_2 は任意定数)、 $y = \psi(x)$ は(3.2) から得られた1つの特殊解である。

何故ならば、 $y = \varphi(x; c_1, c_2)$ は(3.3)の解であるから、

$a_0 \varphi'' + a_1 \varphi' + a_2 \varphi = 0$ 。 $y = \psi(x)$ は(3.2)の解であるから、

$$a_0 \psi'' + a_1 \psi' + a_2 \psi = R(x). \text{ 従って } a_0(\varphi + \psi)'' + a_1(\varphi + \psi)' + a_2(\varphi + \psi) \\ = (a_0 \varphi'' + a_1 \varphi' + a_2 \varphi) + (a_0 \psi'' + a_1 \psi' + a_2 \psi) = 0 + R(x) = R(x)$$

故に、 $y = \varphi(x; c_1, c_2) + \psi(x)$ は(3.2)の解であり、しかも、2つの任意定数 c_1, c_2 を含んでいるから、一般解となっている。

(ii) 重ね合せの原理

3つの2階線形微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = R_1(x) \quad (3.4)$$

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = R_2(x) \quad (3.5)$$

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = R_1(x) + R_2(x) \quad (3.6)$$

について、(3.6)の解は、(3.4)の解と、(3.5)の解を加えたものである。

何故ならば、 $y=\varphi(x)$ を (3.4) の解、 $y=\psi(x)$ を (3.5) の解とすると、
 $a_0\varphi''+a_1\varphi'+a_2\varphi=R_1$, $a_0\psi''+a_1\psi'+a_2\psi=R_2$ であるから、
 $a_0(\varphi+\psi)''+a_1(\varphi+\psi)'+a_2(\varphi+\psi)=(a_0\varphi''+a_1\varphi'+a_2\varphi)+(a_0\psi''+a_1\psi'+a_2\psi)$
 $=R_1+R_2$

定数係数の線形微分方程式のうち、同次形の場合、その一般解は、後述するように、 e^{ax} , x^n , $\sin x$, $\cos x$ など簡単な関数からなっていて、上のように解の構造が単純であるので、取扱いやすい。線形微分方程式は、以下にみるように、物理現象や、工学的な現象を表現するのに現れる重要な微分方程式である。

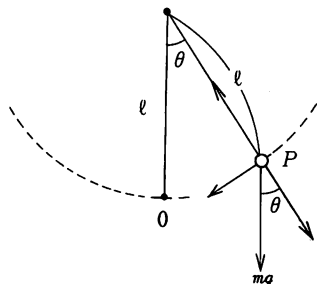
例2 単振動

右図のように、鉛直平面内で運動する長さ l の振り子 P の位置を角度 θ で表せば、質量 m に対する、 mg の半径方向の力は張力とつりあうので、運動方程式は

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

となる。 θ が充分小さければ $\sin \theta \doteq \theta$ である

から、 $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0$ となって、定数係数の2階線形微分方程式で、同次形である。 $(g$ は定数)



例3 直線上を運動する質点が、引力 $F=-kx$ ($k>0$) の他に、速度 v に比例する抵抗力 $R=-rv$ を受ける時の運動方程式を考えよう。

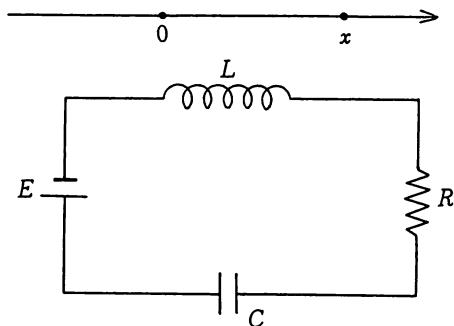
質点の質量を m とすると、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \text{ となる。}$$

すなわち $m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0$

となって、定数係数の2階線形微分方程式で、同次の場合となる。

例4 起電力 V_e の電池に、自己インダクタンス L のコイル、抵抗 R 、容量 C のコンデンサーを含



む回路を流れる電流 $I(t)$ は $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV_e}{dt}$

§ 2 微分演算子

定数係数の線形微分方程式の微分演算子による解法を学ぶことにしよう。記号をうまく定めると、これまで見えなかったことが見えてくる。数学にはこういったことがよくあるが、微分演算子もそのひとつの例である。

変数 x の関数 y に対して、何らかの x の関数 z を一意に対応させるとき、 $z = Ty$ とかいて、 T を演算子、もしくは作用素という。実数に、何らかの実数を一意に対応させる規則が関数であったのにてらすと、実数を関数でおきかえたものが、演算子であると言える。

2つの演算子 U, V について

$$\begin{aligned}(U+V)y &= Uy + Vy \\ (UV)y &= U(Vy)\end{aligned}\quad (y \text{ は } x \text{ の関数})$$

と定義すれば、 $U+V, UV$ という演算子が考えられる。ここで、 UV という演算子は、 V を施して Vy を得て、引きつづき、 U を施すことだから、順番を入れかえた VU と一致するという保証は何もないことに注意を喚起する。定数 c に対して、 $Ty = cy$ すなわち $T = c$ という演算子を考えて、とくに $c = -1$ にとれば、 $U + (-1)V$ という演算子は、 $(U + (-1)V)y = Uy + (-1)(Vy) = Uy - Vy$ となるから、 $U - V$ という演算子を表すことになる。

関数 $y = f(x)$ に対して、 y の導関数は、 $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ などと書かれるが、変数 x で微分することを意味する記号 $\frac{d}{dx}$ を D とかこう。すなわち

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = Dy = Df(x) \text{ となる。 } D^2y = D(Dy) = D\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ 以下同様にして } D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dx^n} \text{ と定める。}$$

例 5 $Dx^2 = (x^2)' = 2x \quad D^2 \sin x = (\sin x)'' = -\sin x$

定数 α について $D^3 e^{\alpha x} = (e^{\alpha x})''' = \alpha^3 e^{\alpha x}$

上で述べた D^n をもとにして、一般の微分演算子を定義しよう。これまでもそうだったが、関数は必要な回数だけ微分可能とする。

変数 t の多項式 $f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$ ($n \geq 1, a_0 \neq 0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ は定数) に対して、 t を形式的に演算子 D でおきかえたものを、 $f(D)$ とかく、便宜上 $D^0 y = y$ とかく、従って $f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ となる。

関数 y に対して、 $f(D)$ の作用を

$$f(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)y = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} Dy + a_n y$$

と定めれば、 $f(D)$ はひとつの演算子であり、これを微分演算子と呼ぶ。

いま、定数係数 n 階線形微分方程式

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x) \quad (3.7)$$

が与えられたとき、上の微分演算子 $f(D)$ を使えば (3.7) は、 $f(D)y = R(x)$ と表せる。このとき、 $f(t)$ を微分方程式 (3.7) の特性多項式という。

例6 $f(t) = t^2 + t + 2$ ならば $f(D) = D^2 + D + 2$

$f(D)x^2 = D^2 x^2 + D x^2 + 2x^2 = 2 + 2x + 2x^2$ 従って、関数 $y = x^2$ に $f(D)$ を作用させると、関数 $y = 2x^2 + 2x + 2$ が得られたことになる。

また $g(t) = t - 3$ ならば $g(D) = D - 3$

$g(D)e^{3x} = D e^{3x} - 3e^{3x} = 3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$ であるから、 $y = e^{3x}$ に $g(D)$ を作用させると、定数 (値関数) $y = 0$ が得られる。

特に $f(t) = t$ ならば $f(D) = D$

$f(t) = t^n$ ならば $f(D) = D^n$

こうして定義された微分演算子 $f(D)$ はつぎの性質 (線形性) をもつ。

2つの関数 y_1, y_2 および定数 k について、

$$(i) \quad f(D)(y_1 + y_2) = f(D)y_1 + f(D)y_2$$

$$(ii) \quad f(D)(k y_1) = k f(D)y_1$$

(i), (ii) はまとめて、つぎの性質(i)と同値である。2つの関数 y_1, y_2 および、2つの定数 α, β について

$$(i) \quad f(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(D)y_1 + \beta f(D)y_2$$

この性質をもつ演算子を、線形演算子という。微分演算子は線形演算子である。
特に $f(t)=t$ にとれば

$$(1)' \quad D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2$$

$$(2)' \quad D(ky_1) = kDy_1$$

となって、よく知られた導関数の公式を得たことになる。

例 7 $f(t)=t^2-t+1$ とすると、 $f(D)=D^2-D+1$

$y_1=e^{\lambda x}$, $y_2=e^{\mu x}$ (λ, μ は定数) に対して、(1), (2)を確認してみよう。

$$\begin{aligned} f(D)(y_1+y_2) &= f(D)(e^{\lambda x}+e^{\mu x}) = (D^2-D+1)(e^{\lambda x}+e^{\mu x}) = D^2(e^{\lambda x}+e^{\mu x}) \\ &\quad - D(e^{\lambda x}+e^{\mu x}) + 1 \cdot (e^{\lambda x}+e^{\mu x}) = (\lambda^2 e^{\lambda x} + \mu^2 e^{\mu x}) - (\lambda e^{\lambda x} + \mu e^{\mu x}) + (e^{\lambda x} + e^{\mu x}) \\ &= (\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x}) + (\mu^2 e^{\mu x} - \mu e^{\mu x} + e^{\mu x}) = (D^2 e^{\lambda x} - D e^{\lambda x} + 1 \cdot e^{\lambda x}) \\ &\quad + (D^2 e^{\mu x} - D e^{\mu x} + 1 \cdot e^{\mu x}) = (D^2 - D + 1)e^{\lambda x} + (D^2 - D + 1)e^{\mu x} \\ &= f(D)y_1 + f(D)y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(D)(ky_1) &= D^2 ky_1 - Dky_1 + ky_1 = D^2 ke^{\lambda x} - Dke^{\lambda x} + ke^{\lambda x} \\ &= k(\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x}) = k(D^2 e^{\lambda x} - D e^{\lambda x} + 1 \cdot e^{\lambda x}) = kf(D)e^{\lambda x} = kf(D)y_1 \end{aligned}$$

つぎに、微分演算子の積について考えよう。

$f(D)$, $g(D)$ を 2 つの微分演算子とするとき

$$f(D)g(D)y = f(D)[g(D)y] \quad (y \text{ は } x \text{ の関数})$$

によって、演算子 $f(D)g(D)$ が定義された。3 つ以上の場合も同様に定義される。

例 8 $f(D)=D^2+D+1$, $g(D)=D-1$, $h(D)=D$, $y=x^3+x^2+1$ とすると、

$$\begin{aligned} f(D)g(D)y &= (D^2+D+1)(D-1)y = (D^2+D+1)[(D-1)y] \\ &= (D^2+D+1)[D(x^3+x^2+1) - (x^3+x^2+1)] = (D^2+D+1)(-x^3+2x^2+2x-1) \\ &= D^2(-x^3+2x^2+2x-1) + D(-x^3+2x^2+2x-1) + (-x^3+2x^2+2x-1) \\ &= -x^3-x^2+5 \end{aligned}$$

$$h(D)f(D)g(D)y = h(D)[f(D)\{g(D)y\}] = D[-x^3-x^2+5] = -3x^2-2x$$

ここで、2 つの多項式 $f(t)$, $g(t)$ の積 $f(t)g(t)=F(t)$ について、 $F(D)=f(D)g(D)$ となることを示そう。はじめに $f(D)=aD^m$, $g(D)=bD^n$ (a, b は定数) の場合で考えよう。 $f(t)=at^m$, $g(t)=bt^n$ であるから、 $F(t)=abt^{m+n}$ すなわち $F(D)=abD^{m+n}$

40 第3章 線形微分方程式

$\{f(D)g(D)\}y = [aD^m b D^n]y = aD^m(bD^n y) = aD^m(by^{(n)}) = abD^m y^{(n)}$
 $= ab y^{(m+n)} = ab D^{m+n}y = F(D)y$. これは, 任意関数 y について言えるから
 $aD^m b D^n = ab D^{m+n}$, とくに $D^n = D \cdot D^{n-1} = D \cdot (D \cdot D^{n-2}) = D \cdot D \cdot \dots \cdot D$ (n 個
 の D の積)

一般の場合を示すために,

$$aD^n y + bD^n y = (a+b)D^n y \quad (a, b \text{ は定数})$$

が成り立つことに注意しておこう.

$$\text{さて, } f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

$$g(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_{m-1} t + b_m$$

($a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ は定数) とすると

$$F(t) = f(t)g(t) = a_0 b_0 t^{m+n} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t^{m+n-1} + \dots + a_n b_m$$

$$\begin{aligned} f(D)g(D)y &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)[b_0 D^m y + b_1 D^{m-1} y + \dots \\ &+ b_{m-1} D y + b_m y] = a_0 D^n [b_0 D^m y + \dots + b_m y] + a_1 D^{n-1} [b_0 D^m y + \dots + b_m y] + \\ &\dots + a_n [b_0 D^m y + \dots + b_m y] = a_0 b_0 D^{m+n} y + (a_0 b_1 + a_1 b_0) D^{m+n-1} y + \dots + a_n b_m y \\ &= F(D)y \end{aligned}$$

例 9 (1) $f(t) = t-3, g(t) = t-2$ の場合

$$F(t) = f(t)g(t) = t^2 - 5t + 6$$

$$\begin{aligned} f(D)g(D)y &= (D-3)[(D-2)y] = (D-3)(Dy-2y) = (D-3)(y'-2y) \\ &= D(y'-2y) - 3(y'-2y) = y'' - 2y' - 3y' + 6y = y'' - 5y' + 6y = (D^2 - 5D + 6)y \\ &= F(D)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } g(D)f(D)y &= (D-2)[(D-3)y] = (D-2)(Dy-3y) = \\ (D-2)(y'-3y) &= D(y'-3y) - 2(y'-3y) = y'' - 5y' + 6y = F(D)y \text{ すなわち} \\ D^2 - 5D + 6 &= (D-3)(D-2) = (D-2)(D-3) \end{aligned}$$

(2) $f(t) = t-1, g(t) = t^2+t+1$ の場合

$$F(t) = f(t)g(t) = t^3 - 1$$

$$\begin{aligned} f(D)g(D)y &= (D-1)[(D^2+D+1)y] = (D-1)[y''+y'+y] \\ &= D[y''+y'+y] - [y''+y'+y] = y''' - y = (D^3-1)y = F(D)y \\ \text{一方 } g(D)f(D)y &= (D^2+D+1)[(D-1)y] = (D^2+D+1)[y'-y] \\ &= D^2(y'-y) + D(y'-y) + (y'-y) = y''' - y = F(D)y \end{aligned}$$

従って $D^3-1=(D-1)(D^2+D+1)=(D^2+D+1)(D-1)$

$f(t)$ や $g(t)$ が t の多項式のとき, $f(t)g(t)$ ($=F(t)$ とおいた) は多項式であることは自明であるが, $f(D)$ や $g(D)$ は演算子であるから $f(D)g(D)=g(D)f(D)=F(D)$ となるかどうかはチェックしなくてはならない. これが上で長々と証明したり例をあげたりしたものである. 従って, 多項式 $f(t)$ の変数 t を演算子 D で形式的におきかえて, 微分演算子 $f(D)$ を得たのであるが, これ自身 D を変数とする多項式のような計算をしてよいことになった.

つぎに, 微分方程式を解く上で必要な $f(D)$ の性質を示しておこう. α を定数, $F(x)$ を x の関数とすると,

$$\begin{aligned} (1) \quad & D^n e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x} \\ (2) \quad & f(D) e^{\alpha x} = f(\alpha) e^{\alpha x} \\ (3) \quad & D^n [e^{\alpha x} F(x)] = e^{\alpha x} (D + \alpha)^n F(x) \\ (4) \quad & f(D) [e^{\alpha x} F(x)] = e^{\alpha x} f(D + \alpha) F(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

何故ならば, 以下に n についての数学的帰納法で証明しよう.

(1) $n=1$ のとき, $D e^{\alpha x} = (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ $n=k$ のとき, 成り立つと仮定する. $D^{k+1} e^{\alpha x} = D(D^k e^{\alpha x}) = D(\alpha^k e^{\alpha x}) = \alpha^k D e^{\alpha x} = \alpha^k \alpha e^{\alpha x} = \alpha^{k+1} e^{\alpha x}$

(2) $f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ とすると, $f(D) e^{\alpha x} = a_0 D^n e^{\alpha x} + a_1 D^{n-1} e^{\alpha x} + \cdots + a_{n-1} D e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x}$, (1)を利用して, $f(D) e^{\alpha x} = a_0 (\alpha^n e^{\alpha x}) + a_1 (\alpha^{n-1} e^{\alpha x}) + \cdots + a_n e^{\alpha x} = (a_0 \alpha^n + \cdots + a_n) e^{\alpha x} = f(\alpha) e^{\alpha x}$

(3) $n=1$ のとき, $D[e^{\alpha x} F(x)] = D(e^{\alpha x}) F(x) + e^{\alpha x} D F(x)$. (1)を利用して $D[e^{\alpha x} F(x)] = \alpha e^{\alpha x} F(x) + e^{\alpha x} D F(x) = e^{\alpha x} (D + \alpha) F(x)$. $n=k$ のとき成り立つと仮定する. $D^{k+1}[e^{\alpha x} F(x)] = D[D^k\{e^{\alpha x} F(x)\}] = D[e^{\alpha x} (D + \alpha)^k F(x)] = \alpha e^{\alpha x} (D + \alpha)^k F(x) + e^{\alpha x} D(D + \alpha)^k F(x) = e^{\alpha x} (D + \alpha)(D + \alpha)^k F(x) = e^{\alpha x} (D + \alpha)^{k+1} F(x)$

(4) $f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ とすると,
 $f(D)[e^{\alpha x} F(x)] = a_0 D^n [e^{\alpha x} F(x)] + a_1 D^{n-1} [e^{\alpha x} F(x)] + \cdots + a_{n-1} D [e^{\alpha x} F(x)] + a_n e^{\alpha x} F(x)$. (3)を利用して $f(D)[e^{\alpha x} F(x)] = a_0 e^{\alpha x} (D + \alpha)^n F(x) + a_1 e^{\alpha x} (D + \alpha)^{n-1} F(x) + \cdots + a_n e^{\alpha x} F(x)$

$$+\cdots+a_n e^{\alpha x} F(x)=e^{\alpha x}\left[a_0(D+\alpha)^n+\cdots+a_n\right] F(x)=e^{\alpha x} f(D+\alpha) F(x)$$

例10 $f(t)=t^2-t+3$, α は定数のとき,

$$\begin{aligned} f(D) e^{\alpha x} &= (D^2-D+3) e^{\alpha x} = D^2 e^{\alpha x} - D e^{\alpha x} + 3 e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} + 3 e^{\alpha x} \\ &= (\alpha^2 - \alpha + 3) e^{\alpha x} = f(\alpha) e^{\alpha x} \end{aligned}$$

例11 $f(t)=(t-\alpha)^n$, α は定数, $F(x)$ が x の関数ならば

$$f(D)=(D-\alpha)^n \text{ だから } f(D+\alpha)=\{(D+\alpha)-\alpha\}^n=D^n$$

$$\text{従って } f(D)[e^{\alpha x} F(x)]=(D-\alpha)^n[e^{\alpha x} F(x)]=e^{\alpha x} D^n F(x)$$

問1 $f(t)=t-1$, $g(t)=t^2+2t+2$ のとき, $f(D)+g(D)$, $f(D)g(D)$ の表す演算子をかけ.

§ 3 線形微分方程式の性質

定数係数の n 階線形微分方程式

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x) \quad (3.7)$$

は, 前節で述べたように, 微分作用素を用いて

$$f(D)y=R(x) \quad (3.9)$$

と表せる. ここに特性多項式は $f(t)=a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$

(3.9) に対応する同次形の線形微分方程式は

$$f(D)y=0 \quad (3.10)$$

で与えられる. すなわち

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

を (3.7) に対応する同次方程式という. 本節では, まず (3.10) の一般解について考察して, つぎにそれを用いて (3.9) の一般解の構造について調べよう.

同次方程式 (3.10) の解について, つぎのことが成立する.

(i) $y=u_1(x)$, $y=u_2(x)$ が (3.10) の2つの解であるとき,

$$(1) \quad y=cu_1(x) \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad y=u_1(x)+u_2(x)$$

は, (3.10) の解である.

何故ならば、 $f(D)u_1=0$, $f(D)u_2=0$ であるから、 $f(D)$ の線形性から

$$(イ) \quad f(D)(cu_1)=cf(D)u_1=c \cdot 0=0$$

$$(ロ) \quad f(D)(u_1+u_2)=f(D)u_1+f(D)u_2=0+0=0$$

注意 $y=u_1(x)$, $y=u_2(x)$ が (3.9) の解であって、 $R(x) \equiv 0$ のときは、(i)に対応する事実は成り立たない。

(i)の議論をくり返えすことによって、つぎの結果を得る。

(ii) $y=u_1(x)$, $y=u_2(x)$, $\dots$, $y=u_n(x)$ が (3.10) の解であれば、 n 個の任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ について

$$y=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\dots+c_nu_n(x) \quad (3.11)$$

は、(3.10) の解である。

(3.11) の右辺の形の式を $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ の **1 次結合** という。

n 階微分方程式 (3.10) の一般解は、本質的な n 個の任意定数を含む解であったから、上の(ii)によって、 n 個の相異なる解 $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ を探せばよいように見えるが、『本質的な』という言葉が示すように、それだけでは充分でない。

例12 3階線形微分方程式

$$(D-1)(D-2)(D-3)y=0 \quad (3.12)$$

を考えよう。 $y=e^{3x}$, $y=e^{2x}$ が (3.12) の解であることを確かめよう。(もちろん $y=e^x$ も解であることはわかるが)、 $(D-3)e^{3x}=De^{3x}-3e^{3x}=3e^{3x}-3e^{3x}=0$ であるから、 $(D-1)(D-2)(D-3)e^{3x}=(D-1)(D-2)[(D-3)e^{3x}]=0$ 。

同様に、 $(D-2)e^{2x}=0$ を利用して $(D-1)(D-2)(D-3)e^{2x}=(D-1)(D-3)[(D-2)e^{2x}]$

$= (D-1)(D-3)[0]=0$ 。従って、上の(i)によって $y=e^{2x}+e^{3x}$ はまた (3.12) の解である。ここで $u_1(x)=e^{2x}+e^{3x}$, $u_2(x)=e^{2x}$, $u_3(x)=e^{3x}$ とおくと、(ii)

によって、3つの任意定数 c_1, c_2, c_3 について $y=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+c_3u_3(x)$

は (3.12) の解である。任意定数を3つ含むから、これは一般解であると早合点したくなるが、 $c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+c_3u_3(x)=c_1(e^{2x}+e^{3x})+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}=$

$(c_1+c_2)e^{2x}+(c_1+c_3)e^{3x}$ 、ここで $d_1=c_1+c_2$, $d_2=c_1+c_3$ とおくと $y=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+c_3u_3(x)$ は $y=d_1e^{2x}+d_2e^{3x}$ となり、本質的には2つの任意定数 d_1 , d_2 だけを含むことになってしまう。

44 第3章 線形微分方程式

また, $y = ke^{2x}$ (k は任意定数) も, (i) から, (3.12) の解であり, $u_1(x) = ke^{2x}$, $u_2(x) = e^{2x}$, $u_3(x) = e^{3x}$ とおくと $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x) = (c_1k + c_2)e^{2x} + c_3e^{3x}$. ここで $e_1 = c_1k + c_2$ とおくと, $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x)$ は $y = e_1e^{2x} + c_3e^{3x}$ となって, この場合も, 任意定数は, e_1, c_3 の2個である. この場合, 上の2組の u_1, u_2, u_3 の1次結合はどちらも一般解ではない.

それでは, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ にどのような条件があれば, その1次結合が一般解となるかについて調べよう. $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ならば $c_1u_1(x) + \dots + c_nu_n(x) \equiv 0$ は自明である. 然しながら, この逆はいえない. 上の例12で調べたように $u_1(x) = e^{2x} + e^{3x}$, $u_2(x) = e^{2x}$, $u_3(x) = e^{3x}$ の場合定数 c_1, c_2, c_3 の中に0でないものがあるのに $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x) \equiv 0$ となってしまうことがある. たとえば $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = 1$ にとればよい. そこで, つぎの定義をしよう.

n 個の関数の組 $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が1次独立であるとは, $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x) \equiv 0$ ($c_1, c_2, \dots, c_n$ は定数) が成立するのは $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ のときに限ることを言う. とくに, $n=1$ のとき, すなわち1つの関数 $u_1(x)$ が1次独立であるというのは, $c_1u_1(x) \equiv 0$ となるのは $c_1 = 0$ のときに限ること, すなわち $u_1(x) \equiv 0$ のことである. $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が1次独立でないとき, $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ は1次従属であるという. 上で述べた $\{e^{2x} + e^{3x}, e^{2x}, e^{3x}\}$ は1次従属である. この1次独立という概念は初学者には理解しにくいかもしれないが, つぎのように表現すれば理解の一助になるかもしれない.

(iii) n 個の関数の組 $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が1次独立であるための必要十分条件は, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ のどの関数も残りの $n-1$ 個の関数の1次結合として表せないことである.

何故ならば, $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が1次独立であって, たとえば, $u_1(x) \equiv c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x)$ ($c_2, \dots, c_n$ は定数) と1次結合として表せたと仮定すれば, $c_1 = -1$ にとれば

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x) \equiv 0$$

となって, $c_1 = -1 \equiv 0$ となって $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が1次独立であ

ることに反してしまう。逆に $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が 1 次独立でなければ, n 個の定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ のうちのどれか $c_i \neq 0$ となって, $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) \equiv 0$ となる。 $c_i u_i(x) \equiv (-c_1) u_1(x) + \dots + (-c_{i-1}) u_{i-1}(x) + (-c_{i+1}) u_{i+1}(x) + \dots + (-c_n) u_n(x)$ 。この式の右辺には $u_i(x)$ 以外の $u_1(x), \dots, u_{i-1}(x), u_{i+1}(x), \dots, u_n(x)$ が現れる。 $d_1 = -\frac{c_1}{c_i}, \dots, d_n = -\frac{c_n}{c_i}$ とおけば, $u_i(x) \equiv d_1 u_1(x) + \dots + d_n u_n(x)$ となって, $u_i(x)$ は残りの $u_1(x), \dots, u_{i-1}(x), u_{i+1}(x), \dots, u_n(x)$ の 1 次結合で表せたことになる。

例13 (1) $u_1(x)=1, u_2(x)=x, u_3(x)=x^2$ のとき, $\{u_1, u_2, u_3\}$ は 1 次独立である。何故ならば $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ 。 $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) \equiv 0$ は 恒等式 $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \equiv 0$ を意味することになり, これは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ の場合に限る。

(2) $u_1(x)=x, u_2(x)=2x$ のとき, $\{u_1, u_2\}$ は 1 次従属である。 $c_1 = -2, c_2 = 1$ にとれば, $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = -2x + 2x \equiv 0$ となるからである。

(3) $u_1(x)=\sin x, u_2(x)=\cos x$ のとき, $\{u_1, u_2\}$ は 1 次独立である。何故ならば, $c_1 \sin x + c_2 \cos x \equiv 0$ とすれば $x=0$ とおくと $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$ から $c_2 = 0, x = \frac{\pi}{2}$ とおくと $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$ から $c_1 = 0$ を得る。

1 次独立であるか否かを判断する方法を, もう少し調べよう。

$n=1$ の場合はすでに述べたように, $u_1(x) \neq 0$ ならば, 任意の関数 $u_1(x)$ は 1 次独立である。 $n=2$ の場合を考えよう。2 つの関数の組 $\{u_1(x), u_2(x)\}$ が 1 次従属であれば, $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \equiv 0$ となるような定数 c_1, c_2 のうち少なくとも一方は 0 でないものを選ぶことができる。 $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \equiv 0$ を x で微分して, $c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) \equiv 0$ を得る。ここで, x を 1 つ固定して c_1, c_2 を 2 つの未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0 \\ c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

を考える。連立方程式 (3.13) が自明でない解 (c_1, c_2 のうち少なくとも一方は 0 でないような解) をもつから

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

となる。この等式の左辺の行列式を $u_1(x)$, $u_2(x)$ のロンスキアン (Wronskian) と言い, $W(u_1, u_2)$ で表わす。従って, $\{u_1(x), u_2(x)\}$ が 1 次従属ならば, $W(u_1, u_2) = 0$ 。

逆に, $y = u_1(x)$, $y = u_2(x)$ が 2 階線形微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0 \quad (3.3)$$

の解であって, $W(u_1, u_2) = 0$ ならば, 証明はやや面倒であるので省略するが, $\{u_1(x), u_2(x)\}$ は 1 次従属であることがいえる。ただし, この逆の方は, $u_1(x)$, $u_2(x)$ が (3.3) の解であるという条件が無い場合, つまり, 一般に, 2 つの関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$ について $W(u_1, u_2) = 0$ がいえただけでは, 1 次従属であることは出てこない。たとえば, $u_1(x) = x^3$, $u_2(x) = |x^3|$ にとれば, $\{u_1(x), u_2(x)\}$ は 1 次独立となるが,

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x^3 & \pm x^3 \\ 3x^2 & \pm 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

であることが, 福原満洲雄・稲葉三男共著『微分方程式通論』(共立出版) p 41 に注意されている。

一般の場合にも, n 個の関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ について, 関数から成る行列式

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

を, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ のロンスキアンという。 $n=2$ の場合と同様に, n 階線形微分方程式

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0 \quad (3.14)$$

の解 $y = u_1(x)$, $y = u_2(x)$, $\dots$, $y = u_n(x)$ について, $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ が 1 次独立であるための必要充分条件は $W(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$ がすべての x について成立することであることがいえる。

注意 n 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の n 個の関数 $u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を考えるとき, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ を成分とする行列式 $\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ をヤコビアン (Jacobian) というが, 上に述べたロンスキアンと混同してはならない.

例14 相異なる n 個の定数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ について $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$ は 1 次独立である.

何故ならば

$$W(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} & \dots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^{n-1} e^{\alpha_2 x} & \dots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} \dots e^{\alpha_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

最後に出て来た行列式は, ファンデルモンドの行列式と言って $\prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)$ となることが知られている. ここで $\prod$ は, $i < j$ なる $\alpha_j - \alpha_i$ をすべて掛けたものを表す. 各 $e^{\alpha_i x} \neq 0$ であり, どの $\alpha_j - \alpha_i \neq 0$ であるから

$$W(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}) = e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} \dots e^{\alpha_n x} \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$$

となる. 従って $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$ は 1 次独立である.

例15 $\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}\}$ は 1 次独立であることを $n=4$ の場合でロンスキアンを計算することによって確かめてみよう. $D^i(x^j e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} (D + \alpha)^i x^j$ に注意して

$$W(e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, x^3 e^{\alpha x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} & x^2 e^{\alpha x} & x^3 e^{\alpha x} \\ D e^{\alpha x} & D x e^{\alpha x} & D x^2 e^{\alpha x} & D x^3 e^{\alpha x} \\ D^2 e^{\alpha x} & D^2 x e^{\alpha x} & D^2 x^2 e^{\alpha x} & D^2 x^3 e^{\alpha x} \\ D^3 e^{\alpha x} & D^3 x e^{\alpha x} & D^3 x^2 e^{\alpha x} & D^3 x^3 e^{\alpha x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} & x^2 e^{\alpha x} & x^3 e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} (D + \alpha) x & e^{\alpha x} (D + \alpha) x^2 & e^{\alpha x} (D + \alpha) x^3 \\ \alpha^2 e^{\alpha x} & e^{\alpha x} (D + \alpha)^2 x & e^{\alpha x} (D + \alpha)^2 x^2 & e^{\alpha x} (D + \alpha)^2 x^3 \\ \alpha^3 e^{\alpha x} & e^{\alpha x} (D + \alpha)^3 x & e^{\alpha x} (D + \alpha)^3 x^2 & e^{\alpha x} (D + \alpha)^3 x^3 \end{vmatrix}$$

$$= (e^{\alpha x})^4 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ \alpha & (D+\alpha)x & (D+\alpha)x^2 & (D+\alpha)x^3 \\ \alpha^2 & (D+\alpha)^2x & (D+\alpha)^2x^2 & (D+\alpha)^2x^3 \\ \alpha^3 & (D+\alpha)^3x & (D+\alpha)^3x^2 & (D+\alpha)^3x^3 \end{vmatrix}$$

ここで、最後の行列式の第3行を $-\alpha$ 倍して第4行へ加えた行列式を計算する。
さらに第2行を $-\alpha$ 倍して第3行へ加える。得られた行列式の第1行を $-\alpha$ 倍して第2行へ加える。ここで

$$(D+\alpha)^i x^j - \alpha(D+\alpha)^{i-1}x^j = (D+\alpha)^{i-1}[(D+\alpha)x^j - \alpha x^j] = (D+\alpha)^{i-1}Dx^j$$

を利用して計算すると、上の最後の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & Dx & Dx^2 & Dx^3 \\ 0 & (D+\alpha)Dx & (D+\alpha)Dx^2 & (D+\alpha)Dx^3 \\ 0 & (D+\alpha)^2Dx & (D+\alpha)^2Dx^2 & (D+\alpha)^2Dx^3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} Dx & Dx^2 & Dx^3 \\ (D+\alpha)Dx & (D+\alpha)Dx^2 & (D+\alpha)Dx^3 \\ (D+\alpha)^2Dx & (D+\alpha)^2Dx^2 & (D+\alpha)^2Dx^3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} Dx & Dx^2 & Dx^3 \\ D^2x & D^2x^2 & D^2x^3 \\ (D+\alpha)D^2x & (D+\alpha)D^2x^2 & (D+\alpha)D^2x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D^2x^2 & D^2x^3 \\ (D+\alpha)D^2x^2 & (D+\alpha)D^2x^3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} D^2x^2 & D^2x^3 \\ D^3x^2 & D^3x^3 \end{vmatrix} = 12$$

$$\text{従って } W(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, x^3e^{\alpha x}) = 12e^{4\alpha x} \neq 0$$

ここでまとめよう。1次独立性の条件を加えて、同次方程式の一般解について、
つぎのことがわかる。

$y = u_1(x), y = u_2(x), \dots, y = u_n(x)$ は、(3.14) の解であって、

$\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ は1次独立であるとき、(3.14) の一般解は

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x)$$

($c_1, c_2, \dots, c_n$ は任意定数) で与えられる。

実際 $y = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$ は n 階線形微分方程式 (3.14) の解であり、
 $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ の1次独立性から、これらの任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ は n 個の本質的なものであるから、一般解であることがわかる。

今度は非同次の場合を考えよう.

n 階線形微分方程式 (3.1) について, 対応する同次線形微分方程式 (3.14) の 1 次独立な n 個の解の組を $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ とする. いま何らかの方法で, (3.1) の 1 つの特殊解 $y = \psi(x)$ (一般解ではない) が見つければ, (3.1) の一般解は

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + \psi(x)$$

($c_1, c_2, \dots, c_n$ は任意定数) とかける.

何故ならば, (3.1) を微分演算子を用いて $f(D)y = R(x)$ と表すと,
 $f(D)\psi(x) = R(x)$, $f(D)[c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)] = 0$ であるから,
 $f(D)[c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n + \psi] = f(D)[c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)] + f(D)\psi$
 $= 0 + R(x) = R(x)$ となって $y = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n + \psi$ は, (3.1) の解である.
 しかも, これは本質的な任意定数を n 個含んでいるから, 一般解である.

例16 2 階線形微分方程式

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^x$$

の一般解は $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$ (c_1, c_2 は任意定数) であることを示そう.

上の線形微分方程式に対応する同次方程式は $(D^2 - 5D + 6)y = 0$ である.

$(D^2 - 5D + 6)e^{2x} = D^2 e^{2x} - 5D e^{2x} + 6e^{2x} = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0$. 同様に

$(D^2 - 5D + 6)e^{3x} = 0$ なることから, $y = e^{2x}$, $y = e^{3x}$ は $(D^2 - 5D + 6)y = 0$ の 2 つの解である. さらに

$$W(e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{2x} e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0$$

であるから $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ は 1 次独立である. 従って $(D^2 - 5D + 6)y = 0$ の一般解

は, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ (c_1, c_2 は任意定数). 一方, $(D^2 - 5D + 6)\left(\frac{1}{2}e^x\right) =$

$\frac{1}{2}(D^2 - 5D + 6)e^x = \frac{1}{2}(e^x - 5e^x + 6e^x) = e^x$ であるから $y = \frac{1}{2}e^x$ は $(D^2 - 5D +$

$6)y = e^x$ の 1 つの特殊解である. 故に求める一般解は $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$ と
なる.

以上により, n 階線形微分方程式 $f(D)y = R(x)$ の解法はつぎのようになる.

$f(D)y = R(x)$ の一般解

- (1) 対応する同次線形微分方程式 $f(D)y = 0$ の 1 次独立な n 個の解の組 $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ を求める. それらの 1 次結合 $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x)$ が同次形の一般解である. ($c_1, c_2, \dots, c_n$ は任意定数)
- (2) $f(D)y = R(x)$ の 1 つの特殊解 $y = \psi(x)$ を求める.
- (3) $f(D)y = R(x)$ の一般解は

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + \psi(x)$$

($c_1, c_2, \dots, c_n$ は任意定数)

問 2 つぎの関数の各組は, いずれも [] 内に与えられた微分方程式の解であることを確かめて, 1 次独立性を調べよ.

- (1) $\{e^x, e^{-x}\}$ $[y'' - y = 0]$
- (2) $\{e^x, xe^x\}$ $[y'' - 2y' + y = 0]$
- (3) $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ $[y'' - 2y' + 2y = 0]$

問 3 つぎの関数の各組は, いずれも n 階の同次線形微分方程式 (3.14) の解であることを前提として, 1 次独立であることを示せ.

- (1) $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$
- (2) $\{e^x, xe^x, \dots, x^{n-1}e^x\}$

問 4 2 階線形微分方程式 $(D-2)^2 y = 0$ について,

- (1) $z = (D-2)y$ とおいて, $(D-2)z = 0$ の一般解 $z = \varphi(x; c_2)$ (c_2 任意定数) を求めよ.
- (2) (1) で得られた $\varphi(x; c_2)$ を用いて, $(D-2)y = \varphi(x; c_2)$ の一般解を求めよ.

§ 4 定数係数の n 階同次線形微分方程式の一般解

本節では, 同次線形微分方程式の 1 次独立な解の組の求め方を調べよう. 微分

演算子に書きかえた効果がここではじめて現れる。

例17 2 階の同次線形微分方程式

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad (3.15)$$

の一般解を求めよう。まず, (3.15) を微分演算子で書きかえて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

従って, 特性多項式は $f(t) = t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$

§ 2 で調べたとおり, さらに

$$(D+2)(D-3)y = 0 \quad (3.16)$$

と書きかえられる。ここで

$$\begin{aligned} (D+2)y_1 &= 0 \\ (D-3)y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

を満たす関数 y_1, y_2 について考えよう。

y_1 については, $(D+2)(D-3)y_1 = (D-3)(D+2)y_1 = (D-3)[(D+2)y_1] = (D-3)0 = 0$ 。同様に, y_2 についても $(D+2)(D-3)y_2 = 0$ 。従って, y_1, y_2 は (3.16) の解である。

一方, (3.17) の第 1 式より $(D+2)y_1 = \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 = 0$ $\frac{dy_1}{dx} = -2y_1$ これは, 第 2 章で学んだ変数分離形であるからこの微分方程式を満たす y_1 として, $y_1 = e^{-2x}$ とできる。同様に, (3.17) の第 2 式より $\frac{dy_2}{dx} = 3y_2$, 従って $y_2 = e^{3x}$ とできる。

ここで $W(e^{-2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{-2x}e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5e^x \neq 0$ であるから, $\{e^{-2x}, e^{3x}\}$ は 1 次独立である。故に $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ (c_1, c_2 は任意定数) は, (3.16) 従って (3.15) の一般解である。

例18 2 階の同次線形微分方程式

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (3.18)$$

の一般解を求めよう。(3.18) から

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0 \quad (3.19)$$

特性多項式は, $f(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ であるから

$$(D-1)^2 y = 0 \quad (3.20)$$

が得られる。例17と同様にして $(D-1)y=0$ の解 $y=e^x$ を得る。しかしながら、例17では、(3.16) から2つの微分方程式が得られたから、2つの解が得られたが、今度は(3.20)からは、1つの解 $y=e^x$ が得られたただけである。そこで(3.8)を思い出そう。 $(D-1)^2y=(D-1)^2[e^xe^{-x}y]=e^x\{(D+1)-1\}^2[e^{-x}y]=e^xD^2[e^{-x}y]$ 従って(3.20)を満たす y は $D^2[e^{-x}y]=0$ 。ここで、 $D^2[e^{-x}y]=(e^{-x}y)''=0$ であるから、 $(e^{-x}y)'=c_1$ (c_1 は任意定数)。故に $e^{-x}y=c_0+c_1x$ (c_0, c_1 は任意定数)。すなわち $y=(c_0+c_1x)e^x=c_0e^x+c_1xe^x$ となる。つまり、(3.20)の解として、 $y=e^x$ の他に $y=xe^x$ が得られたことになる。ここで $W(e^x, xe^x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}$
 $=e^xe^x\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0$ であるから、 $\{e^x, xe^x\}$ は1次独立である。従って、先に得られた $y=(c_0+c_1x)e^x$ (c_0, c_1 は任意定数) は、(3.18)の一般解である。

例19 2階の同次線形微分方程式

$$y''+y'+y=0 \quad (3.21)$$

の一般解を求めよう。(3.21)は $(D^2+D+1)y=0$ と表せるから、特性多項式は、 $f(t)=t^2+t+1$ となり、実数の範囲では因数分解できない。そこで、複素数の範囲で因数分解して結果を形式的に利用してみよう。 $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ とおけば、 $f(t)=t^2+t+1=(t-\alpha)(t-\beta)$ であるから(3.21)は $(D-\alpha)(D-\beta)y=0$ となる。例17と同様にして $(D-\alpha)y_1=0$ から $y_1=e^{\alpha x}$, $(D-\beta)y_2=0$ から $y_2=e^{\beta x}$ を得る。 $\alpha x=-\frac{x}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $\beta x=-\frac{x}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}x$ であるから、任意の定数 b_1, b_2 (複素数でもよい) について、 $b_1e^{\alpha x}+b_2e^{\beta x}=e^{-\frac{x}{2}}(b_1e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}+b_2e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x})$ となる。第1章で復習したオイラーの公式を利用して

$$b_1e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}+b_2e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}=(b_1+b_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+i(b_1-b_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

を得る。ここで、 b_1 の共役複素数を $\bar{b}_1$ で表して、 $b_2=\bar{b}_1$ にとって、 $c_1=b_1+b_2=b_1+\bar{b}_1$, $c_2=i(b_1-b_2)=i(b_1-\bar{b}_1)$ とおけば、 c_1, c_2 は実数となる。逆に、任意の実数 c_1, c_2 に対して上のような複素数 $b_1, b_2=\bar{b}_1$ が存在する。このとき $b_1e^{\alpha x}+b_2e^{\beta x}=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ となる。従って、 $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ が、(3.21)の1次独立な解である

ことがいえれば, $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ (c_1, c_2 は任意定数)

が, (3.21) の一般解であることになる. $(D^2 + D + 1) \left[e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left(D - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(D - \frac{1}{2} \right) + 1 \right\} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] = e^{-\frac{x}{2}} \left(D^2 + \frac{3}{4} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)'' + \frac{3}{4} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\} = 0. \text{ 同様に } (D^2 + D + 1) \left[e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

$$= 0. \text{ さらに, } W \left(e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x & e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) & e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \end{vmatrix}$$

$$= (e^{-\frac{x}{2}})^2 \begin{vmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x & \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) & -\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-x} \neq 0 \text{ となるから, 確かに, } \left\{ e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\} \text{ は 1 次独立}$$

な (3.21) の解である.

定数係数の 2 階同次線形微分方程式の一般解についてまとめておこう.

$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$ (p, q 定数) の一般解

$(D^2 + pD + q)y = 0$ の一般解は, 特性多項式 $f(t)$

$$= t^2 + pt + q = (t - \alpha)(t - \beta) \text{ が}$$

(i) α, β が異なる実数のとき

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \quad (3.22)$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき, $y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x}$

(iii) α, β が複素数 $\mu \pm i\nu$ のとき

$$y = e^{\mu x} (c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x)$$

(c_1, c_2 は任意定数)

54 第3章 線形微分方程式

問5 つぎの微分方程式を解け。

$$(1) \quad y'' - 3y' - 10y = 0$$

$$(2) \quad y'' + 8y' + 16y = 0$$

$$(3) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$(4) \quad y'' - y' - 2y = 0$$

$$(5) \quad 4y'' + 4y' + y = 0$$

$$(6) \quad y'' - 9y = 0$$

$$(7) \quad y'' + \sqrt{8}y' + 2y = 0$$

$$(8) \quad 9y'' - y = 0$$

$$(9) \quad 16y'' + \pi^2 y = 0$$

$$(10) \quad y'' - 16y' + 100y = 0$$

問6 つぎの定数係数の2階線形微分方程式を解け。

$$y'' + ky = 0$$

問7 問6の k が $k = \nu^2 > 0$ の場合、初期条件 $\left[x=0 \text{ のとき, } y=1, \frac{dy}{dx}=0\right]$ のもとで解け。

問8 つぎの微分方程式を、初期条件 $[\quad]$ のもとで解け。

$$(1) \quad y'' - y' + y = 0 \quad \left[x=0 \text{ のとき, } y=1, \frac{dy}{dx} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$(2) \quad y'' - 2y' - 3y = 0 \quad \left[x=0 \text{ のとき, } y = \frac{dy}{dx} = 2\right]$$

一般の場合はつぎのようになる。

定数係数の n 階同次線形微分方程式(3.10)は両辺に $\frac{1}{a_0}$ をかけることにより、 $a_0=1$ の場合で考えてよい。そこで、特性多項式は、 $f(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n$ となる。 $f(D)y=0$ すなわち

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (3.23)$$

の一般解を求めよう。特性多項式を実数の範囲で因数分解して $f(t)=(t-\alpha_1)^{r_1} \cdots (t-\alpha_k)^{r_k}(t^2+p_1t+q_1)^{s_1} \cdots (t^2+p_lt+q_l)^{s_l}$ とする。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_k, p_1, q_1, \dots, p_l, q_l$ は実数であり、 $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l=n$ 、各 $r_h, s_j \geq 1$ となっている。 $(D-\alpha_h)^{r_h}y=0$ から得られる解は

$$y = (c_1^h + c_2^h x + \cdots + c_{r_h}^h x^{r_h-1}) e^{\alpha_h x} \quad 1 \leq h \leq k$$

$$(c_1^h, c_2^h, \dots, c_{r_h}^h \text{ は任意定数})$$

$1 \leq j \leq l$ なる j については、 $t^2+p_jt+q_j=0$ の虚数解を $\mu_j \pm i\nu_j$ とすると、 $(D^2+p_jD+q_j)^{s_j}y=0$ から得られる解は、

$$y = e^{\mu_j x} \{ (d_1^j + d_2^j x + \cdots + d_{s_j}^j x^{s_j-1}) \cos \nu_j x + (e_1^j + e_2^j x + \cdots + e_{s_j}^j x^{s_j-1}) \sin \nu_j x \}$$

($d_1^j, d_2^j, \dots, d_{s_j}^j, e_1^j, e_2^j, \dots, e_{s_j}^j$ は任意定数)

これらの $k+l$ 個の解を加えたものが, (3.23) の一般解となる。

例20 3階の同次線形微分方程式

$$y''' - 3y' + 2y = 0 \quad (3.24)$$

の一般解を求めよう。(3.24) を書きなおして

$$(D^3 - 3D + 2)y = 0 \quad (3.25)$$

特性多項式は $f(t) = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$ であるから

$$(D-1)^2(D+2)y = 0 \quad (3.26)$$

となる。(3.26) から, 例18によって $y = (c_0 + c_1 x)e^x$ 。(3.26) から
例17によって $y = c_2 e^{-2x}$ (c_0, c_1, c_2 は任意定数) を得る。故に $y = e^x, y = xe^x,$
 $y = e^{-2x}$ という3つの解を得たことになる。ここで

$$W(e^x, xe^x, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ e^x & (x+1)e^x & -2e^{-2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = e^x e^x e^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -2 \\ 1 & x+2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

従って $\{e^x, xe^x, e^{-2x}\}$ は1次独立である。すなわち, (3.24) の一般解は
 $y = c_0 e^x + c_1 x e^x + c_2 e^{-2x}$ (c_0, c_1, c_2 は任意定数) となる。

例21 3階線形微分方程式 $(D^3 - 1)y = 0$ の一般解を求めよう。

$(D-1)(D^2 + D + 1)y = 0$ であるから, $(D-1)y_1 = 0$ から $y_1 = c_1 e^x$ (c_1 は任意定数)。 $(D^2 + D + 1)y_2 = 0$ から $y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ を得るから,

$(D^3 - 1)y = 0$ の一般解は $y = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ (c_1, c_2, c_3

は任意定数) となる。これを, つぎのようにしてもよい。与えられた微分方程式

$(D^3 - 1)y = 0$ の特性多項式 $f(t)$ について, t に関する3次方程式 $f(t) = t^3 - 1 = 0$ を解いて $t = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ を得る。これから, 求める一般解は $y = c_1 e^x +$

$e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ (c_1, c_2, c_3 は任意定数)

例22 $D(D^2 + 1)y = 0$ の一般解を求めよう。

特性多項式は $f(t) = t(t^2 + 1)$ であるから, 例21の後半にならって $f(t) = 0$ の

解は $t=0, \pm i$. 従って, 求める一般解は $y=c_1 e^{0x}+e^{0x}(c_2 \cos 1x+c_3 \sin 1x)$ となるから $y=c_1+c_2 \cos x+c_3 \sin x$ (c_1, c_2, c_3 は任意定数) となる.

例23 今度は4階の場合を考えよう.

$$(D^2+D+1)^2 y=0 \quad (3.27)$$

の一般解を求めよう. この場合も, 特性多項式 $f(t)$ を複素数の範囲で因数分解して, $f(t)=(t^2+t+1)^2=(t-\alpha)^2(t-\beta)^2$ とすると, (3.27) は $(D-\alpha)^2 \times (D-\beta)^2 y=0$ となる. 例18と同様に, $(D-\alpha)^2 y=(D-\alpha)^2 [e^{\alpha x} e^{-\alpha x} y]=e^{\alpha x} D^2 [e^{-\alpha x} y]=0$ から $y=(d_1+d_2 x)e^{\alpha x}=e^{-\frac{x}{2}}(d_1+d_2 x)e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}$ (α, β は例19と同じ). 同様に $(D-\beta)^2 y=0$ から $y=(d_3+d_4 x)e^{\beta x}=e^{-\frac{x}{2}}(d_3+d_4 x)e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}$ (d_1, d_2, d_3, d_4 は任意定数). 例19と同様に, 任意定数 d_1, d_2, d_3, d_4 を新しい任意定数 c_1, c_2, c_3, c_4 にとりなおして, (3.27) の一般解は

$$y=e^{-\frac{x}{2}} \left\{ (c_1+c_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (c_3+c_4 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\}$$

(c_1, c_2, c_3, c_4 は任意定数) となる.

問9 つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \quad y''' - y' = 0$$

$$(2) \quad y''' + y' = 0$$

$$(3) \quad y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$$

$$(4) \quad y''' - y' + 6y = 0$$

$$(5) \quad y^{(4)} - 4y = 0$$

$$(6) \quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

$$(7) \quad y''' - y'' + y' - y = 0$$

$$(8) \quad y^{(4)} - 2y''' + 6y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$(9) \quad y''' - 6y'' + 10y' = 0$$

$$(10) \quad y^{(4)} - 4y''' - 5y'' + 36y' - 36y = 0$$

$$(11) \quad (D-1)(D-2)(D-3)y=0$$

$$(12) \quad (D-1)^3(D-2)^2 y=0$$

$$(13) \quad (D^4+4)y=0$$

$$(14) \quad (D^2-2D+2)^2(D^2-4D-5)y=0$$

$$(15) \quad (D-1)(D+1)^2(D^2-2D+2)(D^2+2D+2)^2 y=0$$

問10 [] 内の式が特殊解であることを確かめて, つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \quad y''' - y'' + 2y = \cos x$$

$$\left[y = \frac{1}{10} (3 \cos x - \sin x) \right]$$

$$(2) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - x$$

$$\left[y = -(x^2 + 5x + 9) \right]$$

$$(3) \quad y''' + y = x e^{-x}$$

$$\left[y = \frac{1}{6} x(x+2) e^{-x} \right]$$

$$(4) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = x \sin x$$

$$\left[y = -\frac{1}{24} x^2 (x \sin x + 3 \cos x) \right]$$

§ 5 逆演算子と特殊解

本節では、定数係数の n 階非同次線形微分方程式

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x) \quad (3.7)$$

の特殊解の求め方について学ぶことにしよう。ここでも、なるべく記号的、機械的に求める方法を検討するのであるが、同次の場合の一般解のように簡単ではない。まず、記号を定義しよう。(3.7) は微分演算子で表せば $f(D)y = R(x)$ となる。すなわち特性多項式は

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

($a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ は定数, $a_0 \neq 0$, 以後 $a_0 = 1$ とする)

微分方程式 $f(D)y = R(x)$ を満たす 1 つの解 $y = \psi(x)$ を $y = \frac{1}{f(D)} R(x)$

または $f(D)^{-1} R(x)$ で表す。とくに $f(D) = D$ の場合, $Dy = R(x)$ であるから $\frac{dy}{dx} = R(x)$ すなわち $y = \int R(x) dx$ となるから $\frac{1}{f(D)} R(x) = \frac{1}{D} R(x) = \int R(x) dx$ となる。

$$\boxed{\frac{1}{D} R(x) = \int R(x) dx} \quad (3.28)$$

例24 (1) 微分演算子の性質 (3.8) を用いて

$(D^2 + D + 1)e^{2x} = (2^2 + 2 + 1)e^{2x} = 7e^{2x}$ であるから

$$\frac{1}{D^2 + D + 1} (7e^{2x}) = e^{2x}$$

$$(2) (D^2 + D + 1) \left[e^{2x} + e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

$$= (D^2 + D + 1)e^{2x} + (D^2 + D + 1) \left[e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

$$= 7e^{2x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(D^2 + \frac{3}{4} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x = 7e^{2x} + 0 = 7e^{2x}$$

であるから, $\frac{1}{D^2+D+1}(7e^{2x})=e^{2x}+e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

例24でわかるように, 一般に, 線形微分方程式 $f(D)y=R(x)$ の特殊解の1つを $y=\phi(x)$ とすれば, $f(D)y=0$ の任意の解 $y=u(x)$ に対して,
 $f(D)[\phi(x)+u(x)]=f(D)\phi(x)+f(D)u(x)=R(x)+0=R(x)$ であるから

$$\frac{1}{f(D)}R(x)=\phi(x)+u(x)$$

となる. とくに, $f(D)=D$ の場合は, $Dy=0$ の解は, $y=c$ (c は任意定数) であるから

$$\frac{1}{D}R(x)=\int R(x)dx=\phi(x)+c$$

となって, よく知られた原始関数の公式を得たことになる.

このように, $\frac{1}{f(D)}R(x)$ は $f(D)y=0$ の分の解だけ任意性があり, 演算子ではないが, 習慣上, $\frac{1}{f(D)}$ を逆演算子という. また具体的に計算する場合は, $u(x)$ は無視して考える.

まず, 逆演算子の性質をまとめておこう.

- (1) $f(D)\left[\frac{1}{f(D)}R(x)\right]=R(x)$
 - (2) $\frac{1}{D^n}R(x)=\int\cdots\left[\int\left\{\int R(x)dx\right\}dx\right]\cdots dx=\int\cdots\int R(x)dx\cdots dx$
(n 回積分する)
 - (3) $\frac{1}{f(D)}[R(x)+Q(x)]=\frac{1}{f(D)}R(x)+\frac{1}{f(D)}Q(x)$
 - (4) $\frac{1}{f(D)}kR(x)=k\frac{1}{f(D)}R(x)$ (k 定数)
 - (5) $\frac{1}{f(D)g(D)}R(x)=\frac{1}{f(D)}\left[\frac{1}{g(D)}R(x)\right]=\frac{1}{g(D)}\left[\frac{1}{f(D)}R(x)\right]$
 - (6) $\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$ (α 定数 $f(\alpha)\neq 0$)
 - (7) $\frac{1}{f(D)}[e^{\alpha x}F(x)]=e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}F(x)$ (α 定数)
- (3. 29)

$$(8) \left(\frac{1}{f(D)} + \frac{1}{g(D)} \right) F(x) = \frac{1}{f(D)} F(x) + \frac{1}{g(D)} F(x)$$

$R(x), Q(x), F(x)$ は x の関数

$f(D), g(D)$ は微分演算子

(1), (2), (5), (8)は定義から, (3), (4)は $f(D)$ の線形性から得られる. (6), (7)は $f(D)$ の性質 (3.8) から得られる. 等号はいずれも $f(D)y=0$ の解 $y=u(x)$ を無視して成立している.

これらの性質を利用して $\frac{1}{f(D)} R(x)$ を求めるのである. いかなる関数 $R(x)$ に対しても, $\frac{1}{f(D)} R(x)$ が簡単に求められるというわけではないが, 以下, いくつかの初等関数について考察してみよう.

1 $R(x)=ke^{\alpha x}$ (k, α は定数) の場合

$$\frac{1}{f(D)} R(x) = \frac{1}{f(D)} ke^{\alpha x} = k \frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} \text{ だから}$$

$$(i) f(\alpha) \neq 0 \text{ ならば } \frac{1}{f(D)} ke^{\alpha x} = \frac{k}{f(\alpha)} e^{\alpha x}$$

$$(ii) f(\alpha) = 0 \text{ ならば}$$

$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n = (t-\alpha)^r g(t)$ すなわち特性多項式 $f(t)$ が $t-\alpha$ という因数を丁度 r 個持っている場合, $g(\alpha) \neq 0, r \geq 1$ となる. 従って $f(D) = (D-\alpha)^r g(D)$. 故に

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(D)} ke^{\alpha x} &= k \frac{1}{(D-\alpha)^r g(D)} e^{\alpha x} = k \frac{1}{(D-\alpha)^r} \left[\frac{1}{g(D)} e^{\alpha x} \right] \\ &= k \frac{1}{(D-\alpha)^r} \left[\frac{1}{g(\alpha)} e^{\alpha x} \right] = \frac{k}{g(\alpha)} \frac{1}{(D-\alpha)^r} e^{\alpha x} = \frac{k}{g(\alpha)} e^{\alpha x} \frac{1}{\{(D+\alpha)-\alpha\}^r} \cdot 1 \\ &= \frac{k}{g(\alpha)} e^{\alpha x} \frac{1}{D^r} \cdot 1 \quad ((3.29) \text{ の(7)で } F(x)=1 \text{ として考えた}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D^r} \cdot 1 = \int \cdots \int dx \cdots dx = \frac{1}{r!} x^r \text{ であるから}$$

(r 回の積分)

$$\frac{1}{f(D)} ke^{\alpha x} = \frac{k}{g(\alpha)} \frac{1}{r!} x^r e^{\alpha x}$$

となる.

$$\text{例25 (1)} \quad \frac{1}{D^2-D+1} e^{2x} = \frac{1}{2^2-2+1} e^{2x} = \frac{1}{3} e^{2x}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{D^2-5D+6} 3e^{2x} &= \frac{1}{(D-3)(D-2)} 3e^{2x} = \frac{1}{D-2} \left[\frac{1}{D-3} (3e^{2x}) \right] \\ &= \frac{1}{D-2} \left[3 \frac{1}{D-3} e^{2x} \right] = \frac{1}{D-2} \left[3 \frac{1}{2-3} e^{2x} \right] = \frac{1}{D-2} (-3e^{2x}) \\ &= -3 \frac{1}{D-2} e^{2x} = -3e^{2x} \frac{1}{(D+2)-2} 1 = -3e^{2x} \frac{1}{D} 1 = -3e^{2x} \int dx = -3xe^{2x} \end{aligned}$$

検算してみると,

$$\begin{aligned} (D^2-D+1) \left(\frac{1}{3} e^{2x} \right) &= D^2 \left(\frac{1}{3} e^{2x} \right) - D \left(\frac{1}{3} e^{2x} \right) + \frac{1}{3} e^{2x} \\ &= \frac{4}{3} e^{2x} - \frac{2}{3} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{2x} = e^{2x} \\ (D^2-5D+6)(-3xe^{2x}) &= D^2(-3xe^{2x}) - 5D(-3xe^{2x}) + 6(-3xe^{2x}) \\ &= -3e^{2x}(D+2)^2 x + 15e^{2x}(D+2)x - 18xe^{2x} = 3e^{2x} \end{aligned}$$

従って, $(D^2-D+1)y=e^{2x}$ の特殊解は $y=\frac{1}{3}e^{2x}$, $(D^2-5D+6)y=3e^{2x}$ の特殊解は $y=-3xe^{2x}$ であるといえる.

問11 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ.

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| (1) $(D-1)(D-2)y=e^{3x}$ | (2) $(D+2)(D-5)y=e^x$ |
| (3) $(D-4)(D+2)y=e^{2x}$ | (4) $(D-1)(D-7)y=5e^{6x}$ |
| (5) $(D^2+6D+25)y=104e^{3x}$ | (6) $(D^2+1)^2y=4e^x$ |
| (7) $(D-1)^2y=e^{-x}$ | (8) $(D-1)^2(D-2)y=e^{2x}$ |
| (9) $(D-1)D^2y=e^x$ | (10) $(D^2-2D+2)^2y=e^x$ |

注意 (ロ)の場合 $\frac{1}{f(D)}ke^{ax}=\frac{k}{g(\alpha)}\frac{1}{r!}x^re^{ax}$ となった. この右辺の定数 $\frac{k}{g(\alpha)}\frac{1}{r!}$ を A とおいて, 微分方程式 $f(D)y=ke^{ax}$ が, $f(t)=(t-\alpha)^r g(t)$, $g(\alpha)\neq 0$ なる場合は $y=Ax^re^{ax}$ という形の特殊解があるはずだから, この A を探してもよい.

例26 $(D^3-6D^2+11D-6)y=e^{2x}$ の特殊解を求めよう.

$f(t)=t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t-2)(t-3)$ だから $\alpha=2$, $r=1$ であるから

$y = Axe^{2x}$ という形をした特殊解があるはずである。 $Dy = A(1+2x)e^{2x}$, $D^2y = A(4+4x)e^{2x}$, $D^3y = A(12+8x)e^{2x}$ を代入して, $-Ae^{2x} = e^{2x}$ から $A = -1$ すなわち, 特殊解 $y = -xe^{2x}$ を得た。

2 $R(x)$ が x の k 次多項式の場合

多項式に微分演算子 $f(D)$ を作用させると, 結果はまた多項式である。このことを利用して $\frac{1}{f(D)}R(x)$ を求めよう。

$f(D) = g(D)D^r$ のとき, すなわち, 特性多項式 $f(t)$ に表れる単項式から t をできるだけくりだして $f(t) = g(t)t^r$ (多項式 $g(t)$ の定数項は 0 ではない) の場合

$$\frac{1}{f(D)}R(x) = \frac{1}{D^r} \left[\frac{1}{g(D)}R(x) \right] = \frac{1}{g(D)} \left[\frac{1}{D^r}R(x) \right]$$

とすればよいから, はじめから

$$f(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n \quad (a_n \neq 0)$$

の場合を考えることにしよう。

いま, $P(x)$ が m 次多項式ならば $a_nP(x)$ は m 次多項式, $a_{n-1}DP(x)$ は $m-1$ 次多項式, $\cdots$, $a_1D^{n-1}P(x)$ は $m-n+1$ 次多項式, $D^nP(x)$ は $m-n$ 次多項式 ($m-n < 0$ のときは $D^kP(x) = 0$, $m < k \leq n$) である。従って $f(D)P(x) = D^nP(x) + a_1D^{n-1}P(x) + \cdots + a_{n-1}DP(x) + a_nP(x)$ は m 次多項式である。故に

$R(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k$ ($b_0 \neq 0$, $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}, b_k$ は定数) の場合

$$\frac{1}{f(D)}R(x) = d_0x^k + d_1x^{k-1} + \cdots + d_{k-1}x + d_k$$

となる定数 $d_0, d_1, \cdots, d_{k-1}, d_k$ が存在する。そこで

$$f(D)[d_0x^k + d_1x^{k-1} + \cdots + d_{k-1}x + d_k] = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k$$

が成り立つように $d_0, d_1, \cdots, d_{k-1}, d_k$ を定める。(これを未定係数法という。)

$r \neq 0$ の場合は k 次多項式 $R(x)$ のかわりに, $k+r$ 次多項式 $\frac{1}{D^r}R(x)$ を考えればよい。

例27 $\frac{1}{D^2-3D+2}(x^2-1)$ を求めてみよう。

$R(x) = x^2 - 1$ は 2 次式 だから $k=2$

$$\frac{1}{D^2-3D+2}(x^2-1) = d_0x^2 + d_1x + d_2 \quad \text{とおいて, 定数 } d_0, d_1, d_2 \text{ を定めよう。}$$

$(D^2-3D+2)(d_0x^2+d_1x+d_2)\equiv x^2-1$ であるから $2d_0-3(2d_0x+d_1)+2(d_0x^2+d_1x+d_2)\equiv x^2-1$, 従って $2d_0x^2+(2d_1-6d_0)x+2d_2-3d_1+2d_0\equiv x^2-1$. 係数を比較して $2d_0=1$, $2d_1-6d_0=0$, $2d_2-3d_1+2d_0=-1$ であるから $d_0=\frac{1}{2}$, $d_1=\frac{3}{2}$, $d_2=\frac{5}{4}$

すなわち
$$\frac{1}{D^2-3D+2}(x^2-1)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$$

より能率的に行うには, つぎのようにする.

$$(D^2-3D+2)(d_0x^2+d_1x+d_2)=(D^2-3D+2)(d_0x^2)+(D^2-3D+2)(d_1x+d_2) \\ =2d_0x^2-3d_0Dx^2+d_0D^2x^2+(D^2-3D+2)(d_1x+d_2)\equiv x^2-1. \text{ 故に, } 2d_0=1.$$

すなわち $d_0=\frac{1}{2}$, 従って

$$x^2-3x+1+(D^2-3D+2)(d_1x+d_2)\equiv x^2-1, \text{ 故に}$$

$$(D^2-3D+2)(d_1x+d_2)\equiv x^2-1-(x^2-3x+1)=3x-2 \text{ 従って}$$

$$(D^2-3D+2)(d_1x)+(D^2-3D+2)d_2=3x-2$$

$$2d_1x-3d_1Dx+d_1D^2x+(D^2-3D+2)d_2=3x-2, \text{ 故に, } 2d_1=3. \text{ すなわち } d_1=\frac{3}{2},$$

$$\text{従って, } 3x-\frac{9}{2}+(D^2-3D+2)d_2=3x-2. \text{ よって}$$

$$(D^2-3D+2)d_2=3x-2-\left(3x-\frac{9}{2}\right)=\frac{5}{2}, \text{ 故に } d_2=\frac{5}{4},$$

このように d_0 から順に決めていくことができる. この手順をつぎのようにかく.

$$x^2 \text{ の係数は } 1 \text{ であるから } 2d_0=1$$

$$\text{となるように } d_0 \text{ を定める. } d_0=\frac{1}{2}$$

$$(2-3D+D^2)\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x^2-3x+1$$

$$x^2-1-(x^2-3x+1)=3x-2$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \\ 2-3D+D^2 \left| \begin{array}{r} x^2-1 \\ x^2-3x+1 \\ \hline 3x-2 \\ 3x-\frac{9}{2} \\ \hline \frac{5}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{つぎに, } 2d_1=3 \text{ となるように, } d_1 \text{ を定} \\ \text{める. } d_1=\frac{3}{2} \end{array}$$

$$(2-3D+D^2)\left(\frac{3}{2}x\right)=3x-\frac{9}{2}$$

$$3x-2-\left(3x-\frac{9}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

最後に, $2d_2 = \frac{5}{2}$ となるように d_2 を

$$\text{定める. } d_2 = \frac{5}{4}$$

$$(2-3D+D^2)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

この計算は, $f(D)$ を D の昇べきの順に書いて
 $R(x)$ を $f(D)$ で, あたかも割算のように実際に

計算することであり, 山辺の方法とよばれる興味深い方法である.

例28 $(D^3-4D)y=5x^3+2$ の特殊解を求めてみよう.

$f(D)=D^3-4D=D(D^2-4)$, $R(x)=5x^3+2$ であるから, $r=1$, $k=3$ である.

特殊解は $y = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{D^2-4} (5x^3+2) \right]$ となるから, まず $\frac{1}{D^2-4} (5x^3+2)$ を求め

なくてはならない. 山辺の方法によれば

$$\begin{array}{r} \frac{5}{4}x^3 \qquad \qquad -\frac{15}{8}x - \frac{1}{2} \\ -4+D^2 \overline{) 5x^3 \qquad \qquad \qquad +2} \\ \underline{5x^3 \qquad \qquad -\frac{15}{2}x} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \frac{15}{2}x+2 \\ \qquad \qquad \underline{\frac{15}{2}x} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad 2 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{2} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

従って

$$\frac{1}{D^2-4} (5x^3+2) = -\frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x - \frac{1}{2}$$

故に

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^3-4D} (5x^3+2) &= \frac{1}{D} \frac{1}{D^2-4} (5x^3+2) \\ &= \frac{1}{D} \left(-\frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{5}{16}x^4 - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

第4章でべき級数による解法を学ぶ予定であるが, ここでもべき級数を利用した方法を示しておこう.

a を定数, t を変数とすると,

$$1-a^n t^n = (1-at)(1+at+a^2 t^2+\cdots+a^{n-1} t^{n-1}) \text{ が成り立つから,}$$

$$1-a^n D^n = (1-aD)(1+aD+a^2 D^2+\cdots+a^{n-1} D^{n-1})$$

$$\text{従って } (1-a^n D^n)R(x) = (1-aD)(1+aD+a^2 D^2+\cdots+a^{n-1} D^{n-1})R(x)$$

$$=(1-aD)[(1+aD+\cdots+a^{n-1}D^{n-1})R(x)]$$

$$\text{故に } \frac{1}{1-aD}[(1-a^n D^n)R(x)]=(1+aD+\cdots+a^{n-1}D^{n-1})R(x)$$

ここで, $R(x)$ は k 次多項式だから, $n > k$ ならば $D^n R(x) = 0$

$$\text{従って } (1-a^n D^n)R(x) = R(x) - a^n D^n R(x) = R(x)$$

$$\begin{aligned} (1+aD+\cdots+a^{n-1}D^{n-1})R(x) &= R(x) + aD[R(x)] + \cdots + a^{n-1}D^{n-1}R(x) \\ &= R(x) + aD[R(x)] + \cdots + a^k D^k R(x) \\ &= (1+aD+\cdots+a^k D^k)R(x) \end{aligned}$$

$$\text{故に } \frac{1}{1-aD}R(x) = (1+aD+\cdots+a^k D^k)R(x)$$

右辺の微分演算子に現れる $a^n D^n$ は, $a^n D^n R(x) = 0$ ($n > k$)であるから, $n > k$ なる $a^n D^n$ をいくら加えても構わない。これはべき級数展開

$$\frac{1}{1-at} = 1 + at + a^2 t^2 + \cdots + a^n t^n + \cdots \quad (|at| < 1)$$

における t に形式的に D を代入した式

$$\frac{1}{1-aD} = 1 + aD + a^2 D^2 + \cdots + a^n D^n + \cdots$$

を, 多項式 $R(x)$ に作用させるときに, 意味をもっていることを保証していることになる。

例29 (1) $\frac{1}{D+1}x^3 = \frac{1}{1+D}x^3 = \frac{1}{1-(-1)D}x^3$ は $a=-1$, $k=3$ の場合であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D+1}x^3 &= (1-D+D^2-D^3+D^4-\cdots)x^3 = (1-D+D^2-D^3)x^3 \\ &= x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{1}{D-2}x^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{D}{2}}x^2 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)x^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}\right)x^2 = -\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{D^2-3D+2}x^2 &= \frac{1}{(D-1)(D-2)}x^2 = \frac{1}{D-1}\left[\frac{1}{D-2}x^2\right] \\ &= \frac{1}{D-1}\left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2} \frac{1}{1-D}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(1+D+D^2+\cdots)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+D+D^2)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}+2x+1+2\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4} \\
(4) \quad \frac{1}{D^2-4}x^2 &= -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{D^2}{4}}x^2 = -\frac{1}{4}\left\{1+\frac{D^2}{4}+\left(\frac{D^2}{4}\right)^2+\cdots\right\}x^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)x^2 = -\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

問12 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ。

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| (1) $(D-1)^2y=x$ | (2) $(D-2)(D+1)y=x+1$ |
| (3) $D(D+2)(D+3)y=x$ | (4) $(D+1)(D-2)(D+2)y=x$ |
| (5) $(D-1)y=x^3$ | (6) $(D^3+1)y=x^2+x$ |
| (7) $(D-2)y=x^2-x+1$ | (8) $(D+2)(D-1)y=x^2$ |
| (9) $(D^2+1)y=x$ | (10) $(D^2-2D+2)Dy=x-1$ |

3 $R(x)=ke^{\alpha x}P(x)$ (k, α は定数, $P(x)$ は多項式) の場合

$$f(D)y=ke^{\alpha x}P(x) \text{ の } 1 \text{ つの特殊解は } y=\frac{1}{f(D)}ke^{\alpha x}P(x)=ke^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}P(x)$$

となる。 $\frac{1}{f(D+\alpha)}P(x)$ は2で学んだ方法で計算できる。

例30 $(D^2-2D+1)y=xe^x$ の特殊解を求めよう。

$(D-1)^2y=xe^x$ だから

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{(D-1)^2}xe^x = e^x \frac{1}{\{(D+1)-1\}^2}x = e^x \frac{1}{D^2}x = e^x \iint x dx dx \\
&= e^x \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}x^3e^x
\end{aligned}$$

問13 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ。

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| (1) $(D-2)y=xe^{2x}$ | (2) $(D-1)^2y=xe^{-x}$ |
| (3) $(D-1)(D-2)y=xe^{3x}$ | (4) $(D^2+1)y=xe^{2x}$ |
| (5) $(D^2+2D+2)y=xe^{-2x}$ | (6) $(D-1)^2y=xe^{2x}$ |
| (7) $(D-1)^2y=e^x(x^2+x)$ | (8) $D(D-1)y=(x+3)e^{2x}$ |
| (9) $D(D-2)y=xe^{2x}$ | (10) $D(D-1)^3y=2xe^{3x}$ |

4 $R(x) = k \sin(ax+b)$ または $R(x) = k \cos(ax+b)$ (k, a, b は定数)

の場合

$f(D)y = k \sin(ax+b)$ や $f(D)y = k \cos(ax+b)$ の特殊解を求めるために、オイラーの公式 $e^{i(ax+b)} = \cos(ax+b) + i \sin(ax+b)$ を思い出して、 $f(D)y = k e^{i(ax+b)}$ を考える。この方程式の1つの特殊解を $y = \varphi(x) + i\psi(x)$ とおけば $f(D)y = f(D)\varphi(x) + i f(D)\psi(x)$ 。一方 $f(D)y = k e^{i(ax+b)} = k \cos(ax+b) + i k \sin(ax+b)$ となるから、

$$f(D)\varphi(x) = k \cos(ax+b)$$

$$f(D)\psi(x) = k \sin(ax+b)$$

となつて、 $\frac{1}{f(D)} k \cos(ax+b) = \varphi(x)$

$$\frac{1}{f(D)} k \sin(ax+b) = \psi(x) \quad \text{となる。}$$

$\varphi(x)$ は $\frac{1}{f(D)} k e^{i(ax+b)}$ の実数部分、 $\psi(x)$ は $\frac{1}{f(D)} k e^{i(ax+b)}$ の虚数部分である。 $\frac{1}{f(D)} k e^{i(ax+b)}$ は、1で学んだ方法を用いればよい。

例31 $\frac{1}{D^2 - D - 2} \cos x$ を求めよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - D - 2} e^{ix} &= \frac{1}{i^2 - i - 2} e^{ix} = -\frac{1}{3+i} e^{ix} = -\frac{1}{10} (3-i) e^{ix} \\ &= -\frac{1}{10} (3-i) (\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{10} (3 \cos x + \sin x) + i \frac{1}{10} (\cos x - 3 \sin x) \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{1}{D^2 - D - 2} \cos x = -\frac{1}{10} (3 \cos x + \sin x)$

例32 $(D^2 + 4)y = \sin 2x$ の特殊解を求めよう。

まず $(D^2 + 4)y = e^{i2x}$ の特殊解を求めよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + 4} e^{i2x} &= \frac{1}{(D - i2)(D + i2)} e^{i2x} = \frac{1}{D - i2} \frac{1}{i2 + i2} e^{i2x} = \frac{1}{i4} \frac{1}{D - i2} e^{i2x} \\ &= \frac{1}{i4} e^{i2x} \frac{1}{(D + i2) - i2} \cdot 1 = \frac{1}{i4} e^{i2x} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{1}{i4} e^{i2x} x \\ &= -\frac{i}{4} (\cos 2x + i \sin 2x) x = \frac{1}{4} x \sin 2x - i \frac{1}{4} x \cos 2x \end{aligned}$$

従って $\frac{1}{D^2+4} \sin 2x = -\frac{1}{4} x \cos 2x$

問14 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ.

$$(1) (D+1)(D+2)y = \cos 2x \quad (2) (D-1)(D-2)y = \cos x$$

$$(3) (D-1)(D-4)y = 10 \sin 2x \quad (4) (D^2+D+1)y = \sin x$$

$$(5) D^2(D^2+4)y = \sin x \quad (6) (D^2-2D+2)y = 2 \cos 2x$$

$$(7) (D+1)(D+3)y = \sin x \quad (8) D(D+1)(D+2)y = \cos 2x$$

$$(9) (D^2+1)y = \sin 2x \quad (10) (D^2+D-1)y = \sin 2x$$

$f(D)y = k \sin(ax+b)$ や $f(D)y = k \cos(ax+b)$ の左辺の演算子 $f(D)$ が, D^2 で表せるときは, もう少し簡単になる. 特性多項式が $f(t)=g(t^2)$, $g(-a^2) \neq 0$ ならば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(D)} e^{i(ax+b)} &= \frac{1}{g(D^2)} e^{i(ax+b)} = \frac{1}{g(D^2)} e^{iax} e^{ib} = e^{ib} \frac{1}{g(D^2)} e^{iax} \\ &= e^{ib} \frac{1}{g((-ia)^2)} e^{iax} \quad ((3.29) \text{ の(6)を使った}), \text{ 従って} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(D^2)} e^{i(ax+b)} &= e^{ib} \frac{1}{g(-a^2)} e^{iax} = \frac{1}{g(-a^2)} e^{i(ax+b)} \quad \text{従って} \\ \frac{1}{g(D^2)} \cos(ax+b) &= \frac{1}{g(-a^2)} \cos(ax+b) \\ \frac{1}{g(D^2)} \sin(ax+b) &= \frac{1}{g(-a^2)} \sin(ax+b) \end{aligned} \quad (g(-a^2) \neq 0)$$

$g(-a^2)=0$ の場合を考えよう. たとえば

$f(D)=g(D^2)=D^2+a^2$ ($a \neq 0$) の場合

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2+a^2} e^{i(ax+b)} &= \frac{1}{D^2+a^2} e^{iax} e^{ib} = e^{ib} \frac{1}{(D-ia)(D+ia)} e^{iax} \\ &= e^{ib} \frac{1}{(D-ia)(ia+ia)} e^{iax} = \frac{1}{i2a} e^{ib} \frac{1}{D-ia} e^{iax} = \frac{1}{i2a} e^{ib} e^{iax} \frac{1}{(D+ia)-ia} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{i2a} e^{i(ax+b)} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{1}{i2a} e^{i(ax+b)} x = -i \frac{1}{2a} x \{ \cos(ax+b) + i \sin(ax+b) \} \\ &= \frac{1}{2a} x \sin(ax+b) - i \frac{1}{2a} x \cos(ax+b) \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cos(ax+b) = \frac{1}{2a} x \sin(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \sin(ax+b) = -\frac{1}{2a} x \cos(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \text{例33} \quad \frac{1}{D^4+2D^2-1} \cos(2x-1) &= \frac{1}{(-4)^2+2(-4)-1} \cos(2x-1) \\ &= \frac{1}{7} \cos(2x-1) \end{aligned}$$

$$\text{例34} \quad \frac{1}{D^2+9} \sin(3x+5) = -\frac{1}{2 \cdot 3} x \cos(3x+5) = -\frac{1}{6} x \cos(3x+5)$$

問15 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ。

$$(1) (D^2+1)^2 y = \sin(2x+1) \quad (2) (D^2+9)y = \cos(3x-5)$$

$$5 \quad R(x) = ke^{ax} \cos(ax+b) \text{ や } R(x) = ke^{ax} \sin(ax+b)$$

(k, α, a, b は定数) の場合

$\frac{1}{f(D)} ke^{ax} \cos(ax+b)$ や $\frac{1}{f(D)} ke^{ax} \sin(ax+b)$ を求めるためには、
 $\frac{1}{f(D)} ke^{ax} e^{i(ax+b)}$ を1の方法で求めて、その実数部分や虚数部分を求めればよい。

$$\text{例35} \quad \frac{1}{D^4+2D^2+2} 2e^x \cos x \text{ を求めよう。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^4+2D^2+2} 2e^{ix} &= 2 \frac{1}{(D^2+1)^2+1} e^{(1+i)x} = 2 \frac{1}{\{(1+i)^2+1\}^2+1} e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1}{i2-1} e^{(1+i)x} = -\frac{1}{5}(1+i2)(\cos x + i \sin x) e^x \\ &= -\frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x) e^x - i \frac{1}{5}(\sin x + 2 \cos x) e^x, \text{ 従って,} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D^4+2D^2+2} 2e^x \cos x \text{ は } \frac{1}{D^4+2D^2+2} 2e^{ix} e^{ix} \text{ の実数部分であるから,}$$

$$\frac{1}{D^4+2D^2+2} 2e^x \cos x = -\frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x) e^x$$

問16 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ。

$$(1) (D-1)y = e^x \cos x \quad (2) (D+1)(D+2)y = e^{2x} \sin x$$

$$(3) (D-1)(D-2)y = e^{4x} \sin x \quad (4) (D^4-1)y = e^x \cos x$$

$$(5) (D^2-1)^2 y = e^x \sin x \quad (6) D(D-1)^2 y = e^x \sin x$$

$$(7) \quad (D^2 - 6D + 13)y = e^x \cos 2x \quad (8) \quad (D^2 - 2D + 5)y = e^x \cos 2x$$

$$(9) \quad (D^2 - 3D + 2)y = e^{2x} \sin(x+1) \quad (10) \quad (D^2 - 3D + 2)y = e^x \cos(x+1)$$

6 これまでの組合せの場合

$R(x)$ が複雑な場合でも

$$f(D)y = R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_n(x)$$

と表すことができて

$$\frac{1}{f(D)}R_1(x), \quad \frac{1}{f(D)}R_2(x), \quad \cdots, \quad \frac{1}{f(D)}R_n(x)$$

が、これまで 1～5 で学んで来た方法で求められれば、計算できる。

例36 $(D^2 - 1)y = xe^{2x} + e^x$ の特殊解を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - 1} xe^{2x} &= e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 1} x = e^{2x} \frac{1}{D^2 + 4D + 3} x = e^{2x} \frac{1}{(D+1)(D+3)} x \\ &= e^{2x} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D+1} - \frac{1}{D+3} \right) x = \frac{1}{2} e^{2x} \left[\frac{1}{D+1} x - \frac{1}{D+3} x \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left[\frac{1}{1+D} x - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{D}{3}} x \right] = \frac{1}{2} e^{2x} \left[(1-D+D^2-\cdots)x - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} - \cdots \right) x \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left[(1-D)x - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{D}{3} \right) x \right] = \frac{1}{2} e^{2x} \left\{ x - 1 - \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(\frac{2}{3} x - \frac{8}{9} \right) = \frac{1}{9} e^{2x} (3x - 4) \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - 1} e^x &= \frac{1}{D-1} \frac{1}{D+1} e^x = \frac{1}{D-1} \frac{1}{2} e^x \\ &= \frac{e^x}{2} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{e^x}{2} \cdot x \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - 1} [xe^{2x} + e^x] &= \frac{1}{D^2 - 1} xe^{2x} + \frac{1}{D^2 - 1} e^x \\ &= \frac{1}{9} e^{2x} (3x - 4) + \frac{1}{2} e^x x \end{aligned}$$

すなわち、求める特殊解は $y = \frac{1}{9}(3x-4)e^{2x} + \frac{1}{2}xe^x$

問17 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ。

- (1) $(D^2+1)^2y = x \sin x + \cos x$
- (2) $D(D^2-1)y = e^x + e^{-x}$
- (3) $(D-1)(D-3)y = e^x \cos x + \cos 4x$
- (4) $(D^2+2D+5)y = xe^{-x} \cos x$
- (5) $(D-2)(D-4)y = e^{2x} + 3e^x + \sin x$

§ 6 定数係数の非同次線形微分方程式の一般解

定数係数の n 階線形微分方程式

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x) \quad (3.7)$$

($a_0=1$ とする) は、微分演算子 $f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ を用いて、 $f(D)y = R(x)$ と表せる。同次形の場合は $f(D)y = 0$ であり、その一般解は、§ 4 で学んだように、本質的な n 個の任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を含む関数 $y = \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$ で表せる。つぎに、 $f(D)y = R(x)$ の特殊解 $y = \psi(x)$ は、§ 5 で述べたように、逆演算子 $\frac{1}{f(D)}$ を用いて求めることができた。こうなれば、§ 3 で述べたように、 $f(D)y = R(x)$ の一般解 $y = \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n) + \psi(x)$ が得られる。

例37 $(D^2-1)y = xe^{2x} + e^x$ を解いてみよう。

対応する同次方程式は $(D^2-1)y = 0$ 。この一般解は $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$ (c_1, c_2 は任意定数)

$(D^2-1)y = xe^{2x} + e^x$ の特殊解は、例36で求めたように $y = \frac{1}{9}(3x-4)e^{2x} + \frac{1}{2}xe^x$ であるから、微分方程式 $(D^2-1)y = xe^{2x} + e^x$ の一般解は、

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{9}(3x-4)e^{2x} + \frac{1}{2}xe^x \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \text{ となる。}$$

例38 $(D^4+4)y = \sin 2x$ を解こう。

対応する同次方程式は $(D^4+4)y = 0$ 。特性多項式は $f(t) = t^4 + 4$ 。これを実

数の範囲で因数分解して, $f(t) = (t^4 + 4t^2 + 4) - 4t^2 = (t^2 + 2)^2 - (2t)^2$
 $= (t^2 + 2 - 2t)(t^2 + 2 + 2t) = (t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2)$. $t^2 - 2t + 2 = 0$ の解は
 $t = 1 \pm i$. $t^2 + 2t + 2 = 0$ の解は, $t = -1 \pm i$ であるから, § 4 の終りでまとめたよ
うに, $(D^4 + 4)y = 0$ の一般解は $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$
(c_1, c_2, c_3, c_4 は任意定数)
 $(D^4 + 4)y = \sin 2x$ の特殊解は, 例32 で求めたように, $y = -\frac{1}{4}x \cos 2x$ である
から, $(D^4 + 4)y = \sin 2x$ の一般解は $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x +$
 $c_4 \sin x) - \frac{1}{4}x \cos 2x$ となる.

問18 つぎの微分方程式を解け.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| (1) $(D-1)^2 y = x$ | (2) $(D-1)(D-2)y = e^{3x}$ |
| (3) $(D-1)^2 y = e^{-x}$ | (4) $(D^2+1)y = xe^{2x}$ |
| (5) $(D-1)^2 y = e^x(x^2+x)$ | (6) $(D+1)(D+2)y = \cos 2x$ |
| (7) $(D^2+D+1)y = \sin x$ | (8) $(D^3+1)y = x^2+x$ |
| (9) $D(D-1)^2 y = e^x \sin x$ | (10) $(D^4-1)y = e^x \cos x$ |

第3章 問題

1. つぎの微分方程式を解け.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| (1) $y'' - 2y' - 3y = x^2$ | (2) $y''' - 3y'' - y' + 3y = x$ |
| (3) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$ | (4) $y''' + 4y'' + 4y' = 6e^{-2x}$ |

2. つぎの微分方程式を解け.

- | | |
|--|---|
| (1) $(D^3 - 3D^2 - 4D + 12)y = x + 1$ | (2) $(D^2 + D - 2)y = 2x^2 - 3x$ |
| (3) $(D^4 - 4D^3 + 3D^2 + 4D - 4)y = e^{2x}$ | (4) $(D^2 - 2D - 3)y = (x+1)e^x$ |
| (5) $(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$ | (6) $(D^2 + 1)y = \cos x$ |
| (7) $(D-2)^2 y = e^{3x} \sin 4x$ | (8) $(D^2 - 1)y = e^x + \cos x$ |
| (9) $(D^2 - 1)y = xe^{2x} + e^x$ | (10) $(D^2 - 4D + 4)y = 4e^{3x} - 2 \sin x$ |

3. n 階線形微分方程式

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x)$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ は定数, $R(x)$ は x の関数) をオイラー形またはコーシー形と

いう. $x=e^t$ とおくと $\frac{dx}{dt}=e^t=x$ であるから, $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}=x \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=$

$x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}=x \frac{dy}{dx} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{d^3y}{dx^3}$, $\dots$ となって, 定数係数の n 階線

形微分方程式となる. つぎの微分方程式を解け.

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' - 4y = 0$$

$$(2) \quad x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$$(3) \quad x^3 y''' + 2x^2 y'' - 6xy' = 0$$

$$(4) \quad x^2 y'' + 2xy' - 6y = x \log x$$

$$(5) \quad x^2 y'' + xy' + y = \log x$$

$$(6) \quad x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^3$$

4. つぎの微分方程式を初期条件 [] のもとで解け.

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \quad (K > 0, m > 0, v_0 \text{ は定数})$$

$$\left[t=0 \text{ のとき, } x=0, \frac{dx}{dt}=v_0 \right]$$

$$(2) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + k^2 i = 0 \quad (k > 0 \text{ は定数})$$

$$\left[t=0 \text{ のとき, } i=2, \frac{di}{dt}=-2 \right]$$

$$(3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + (a^2 + k^2)x = 0 \quad (a, k > 0, h \text{ は定数})$$

$$\left[t=0 \text{ のとき, } x=0, \frac{dx}{dt}=h \right]$$

$$(4) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega^2 i = K \cos \omega t \quad (\omega, K \text{ は定数})$$

$$\left[t=0 \text{ のとき, } i=1, \frac{di}{dt}=\omega \right]$$

第4章 ベキ級数による解法など

§1 ベキ級数による解法

第3章では、定数係数の線形微分方程式を代数的方法で解くことを考えたが、本節ではベキ級数を利用して解く方法を考えよう。この方法は係数に変数を含むような線形微分方程式に有効であり、実際に手で計算するのは大変であっても、コンピューターなどの利用により簡単になることがある。ただし、級数で表されるから、収束する級数であるか否かを、つねに念頭におかなくてはならない。

微分方程式が与えられたとき、求める関数をベキ級数の形において項別微分して求める。すなわち

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\
 \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots \\
 \frac{d^2 y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \cdots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \cdots \\
 &\quad \cdots \cdots \cdots
 \end{aligned}$$

例1 $\frac{dy}{dx} = y$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \quad \text{だから, } \frac{dy}{dx} = y \quad \text{から}$$

$$c_0 = c_1, \quad c_1 = 2c_2, \quad c_2 = 3c_3, \cdots$$

$$c_0 = c \quad (c \text{ は任意定数}) \text{ にとれば}$$

$$c_1 = c$$

$$c_2 = \frac{c}{2}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} c = \frac{c}{3!}$$

.....

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots = c(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)$$

すなわち, 一般解 $y = ce^x$ を得る.

例2 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \text{ だから,}$$

$$c_0 + 2c_2 = 0, \quad c_1 + 3 \cdot 2c_3 = 0, \quad c_2 + 4 \cdot 3c_4 = 0, \quad \cdots$$

c_0, c_1 を任意定数にとれば

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3!}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!}$$

$$c_5 = \frac{c_1}{5!}$$

.....

.....

故に

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right) + c_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right)$$

従って, 一般解 $y = c_0 \cos x + c_1 \sin x$ を得る.

例3 $\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

$$xy = c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \text{ だから,}$$

$$2c_2 = 0, \quad 3 \cdot 2c_3 = c_0, \quad 4 \cdot 3c_4 = c_1, \quad \cdots$$

c_0, c_1 を任意定数にとれば, $c_2 = 0$

$$c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2},$$

$$c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3} = \frac{2c_1}{4!},$$

$$c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 4} = 0,$$

$$c_6 = \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{4c_0}{6!}, \quad c_7 = \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5 c_1}{7!}, \quad c_8 = 0, \\ \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots$$

$$c_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} c_0, \quad c_{3k+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} c_1, \quad c_{3k+2} = 0, \\ \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots$$

故に、一般解は、

$$y = c_0 \left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^6}{6!} + \cdots \right) + c_1 \left(x + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2 \cdot 5x^7}{7!} + \cdots \right) \\ (c_0, c_1 \text{ は任意定数})$$

ここで () の中の 2 つの級数は第 1 章 § 3, 4 (p11) に注意したように級数に表れる項の係数を直前の項の係数で割ったときの極限值を考えれば、任意の x について収束することがわかる。

問 1 つぎの微分方程式をべき級数を利用して解け。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y^2$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + x + y$$

$$(4) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1$$

$$(5) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$(6) \quad (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

§ 2 決定方程式

2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0$$

の解は、 a を定数として、 $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n$ と表せるとき、 $y(x) = (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ (λ は定数) の形で得られることがある。とくに、微分方程式が

$$(x-a)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-a) P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0 \quad (4.1)$$

の形に表されるとき、解を

$$y(x) = (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (c_0 \neq 0, \lambda \text{ は定数})$$

の形で求めよう。この λ を $y(x)$ の $x=a$ における指数という。

$$y = (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{\lambda+n}$$

を項別微分して

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n (x-a)^{\lambda+n-1} = (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n (x-a)^{\lambda+n-2} \\ &= (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n (x-a)^{n-2} \end{aligned}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-a)^k \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-a)^k$$

これらを (4.1) へ代入して

$$\begin{aligned} &(x-a)^2 (x-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n (x-a)^{n-2} + \\ &(x-a) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-a)^k \right\} (x-a)^\lambda \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n (x-a)^{n-1} \right\} + \\ &+ \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-a)^k \right\} (x-a)^\lambda \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right\} = 0 \end{aligned}$$

従って

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n + \sum_{i=0}^n p_{n-i} (\lambda+i) c_i + \sum_{i=0}^n q_{n-i} c_i \right\} (x-a)^{\lambda+n} = 0$$

故に,

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n + \sum_{i=0}^n p_{n-i} (\lambda+i) c_i + \sum_{i=0}^n q_{n-i} c_i = 0$$

すなわち,

$$\begin{aligned} &\{(\lambda+n)(\lambda+n-1) + (\lambda+n) p_0 + q_0\} c_n \\ &+ \{(\lambda+n-1) p_1 + q_1\} c_{n-1} + \cdots + \{\lambda p_n + q_n\} c_0 = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$n=0$ ならば $c_0 \neq 0$ に対して $\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0 = 0$, 整理して,

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0 \text{ を得る。これを決定方程式という。}$$

この2次方程式から得られる λ と, $c_0 = 1$ とから, 上の関係式を用いて,

$c_1, c_2, \dots, c_n$ が決定される。

例 4 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x(1+2x) \frac{dy}{dx} - 4y = 0$

$a=0$, $P(x)=1+2x$, $Q(x)=-4$ ($p_0=1$, $p_1=2$, $p_2=p_3=\cdots=0$, $q_0=-4$, $q_1=q_2=\cdots=0$) となっている.

$y=x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ とおけば, $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n x^{\lambda+n-1} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n x^{\lambda+n-2} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n x^{n-2}$$

これらを与えられた微分方程式へ代入して, $x^{\lambda+n}$ の係数を 0 とおけば,

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n + (\lambda+n)c_n + 2(\lambda+n-1)c_{n-1} - 4c_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

故に, $\{(\lambda+n)^2-4\}c_n + 2(\lambda+n-1)c_{n-1}=0$. この式は $c_{-1}=0$ と約束すれば $n=0$ についても成り立つ. 従って決定方程式は $\lambda^2-4=0$.

故に, $\lambda=\pm 2$

$\lambda=2$, $c_0=1$ にとれば, $c_n = -\frac{2(n+1)}{(n+2)^2-4} c_{n-1}$ ($n \geq 1$). 従って, ひとつの解

$$y=x^2 \left\{ 1 - \frac{4}{3^2-4}x + \frac{4 \cdot 6}{(3^2-4)(4^2-4)}x^2 - \cdots \right\} \text{ を得る.}$$

もちろん, これが収束するか否か検討しなくてはならないし, 2 階の微分方程式を解くのであるから, 一般解を求めるためには, もうひとつ探し出して, 1 次独立であることを確かめなくてはならない. $\lambda=-2$, $c_0=1$ にとって,

$$c_n = -\frac{2(n-3)}{n^2-4n} c_{n-1} \quad (n=1, 2), \quad 4c_n=0 \quad (n \geq 3)$$

として得られる. $y=x^{-2} \left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \right)$ が解となっていて, 得られた 2 つの解は 1 次独立であるから, 一般解は

$$y=c_1 x^2 \left\{ 1 - \frac{4}{3^2-4}x + \frac{4 \cdot 6}{(3^2-4)(4^2-4)}x^2 - \cdots \right\} + c_2 x^{-2} \left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \right)$$

(c_1, c_2 は任意定数) である. 級数はいずれも任意の x について収束する.

問 2 2 階微分方程式

$$(x-1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-1) \frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ について,}$$

- (1) 決定方程式を求め, $x=1$ における指数は, $\lambda=\pm 1$ であることを示せ.
- (2) 指数 $\lambda=1$ に対応する解 $y=\varphi(x)$ を求めよ.

- (3) (2)で得られた $\varphi(x)$ について, 与えられた微分方程式の解を $y=\varphi(x)\psi(x)$ とおいて, $\psi(x)$ を求め, 一般解を求めよ.

§ 3 特殊関数

1. ガウスの微分方程式 (超幾何級数)

α, β, r が定数であるとき, 2階線形微分方程式

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \{r - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad (4.2)$$

をガウスの微分方程式という. 両辺に x をかけて

$$(1-x)x^2 \frac{dy}{dx} + \{r - (\alpha + \beta + 1)x\} x \frac{dy}{dx} - \alpha\beta xy = 0$$

$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の形の解を求めよう.

$$\frac{dy}{dx} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{n-2} \quad \text{を代入して,}$$

$x^{\lambda+n}$ の係数を 0 とおけば,

$$\begin{aligned} & (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n - (\lambda + n - 1)(\lambda + n - 2) c_{n-1} + r(\lambda + n) c_n \\ & - (\alpha + \beta + 1)(\lambda + n - 1) c_{n-1} - \alpha\beta c_{n-1} = 0 \quad (c_{-1} = 0) \end{aligned}$$

故に, $(\lambda + n)(\lambda + n + r - 1) c_n - (\lambda + n - 1 + \alpha)(\lambda + n - 1 + \beta) c_{n-1} = 0$

$n=0$ とおけば決定方程式 $\lambda(\lambda + r - 1) = 0$ を得る. これから $\lambda = 0, 1 - r$

$\lambda = 0, c_0 = 1$ を代入して,

$$n(r + n - 1) c_n = (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1) c_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$r \neq 0, -1, -2, \dots$ ならば

$$c_n = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n(r + n - 1)} c_{n-1} = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n(r + n - 1)} \cdot \frac{(\alpha + n - 2)(\beta + n - 2)}{(n - 1)(r + n - 2)} c_{n-2}$$

.....

$$= \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{n! r(r + 1) \cdots (r + n - 1)}. \quad \text{従って,}$$

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!r}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!r(r+1)}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!r(r+1)\dots(r+n-1)}x^n + \dots$$

を得る。この級数を $F(\alpha, \beta, r; x)$ で表わし、超幾何級数という。 α, β, r が 0 や負の整数でなければ、この級数の係数 c_{n+1} を直前の項の係数 c_n でわって極限をとれば収束半径が 1 であることがわかる。

α, β, r が特別な値をとるときは、超幾何級数 $F(\alpha, \beta, r; x)$ は初等関数となることがある。

例 5 $F(1, 1, 2; -x)$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{2! \cdot 2 \cdot 3}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots n}{n! \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}x^n + \dots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \right\}$$

$$= \frac{\log(1+x)}{x} \quad (-1 < x \leq 1, x \neq 0, F(1, 1, 2; 0) = 1)$$

例 6 $F(-\alpha, \beta, \beta; -x)$

$$= 1 - \frac{-\alpha\beta}{\beta}x + \frac{-\alpha(-\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\beta(\beta+1)}x^2 + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{-\alpha(-\alpha+1)\dots(-\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}x^n + \dots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$= (1+x)^\alpha$$

例 7 $F\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right)$

$$= 1 + \frac{b}{1} \frac{x}{b} + \frac{1 \cdot 2b(b+1)}{2!1 \cdot 2} \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots nb(b+1)\dots(b+n-1)}{n!1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{x}{b}\right)^n + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} \left(1 + \frac{1}{b}\right)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{b}\right)x^n + \dots$$

$$\therefore \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

$$\text{例 8} \quad F\left(a, -a, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4a^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{a(-a)}{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{4a^2} + \frac{a(a+1)(-a)(-a+1)}{2! \frac{1}{2} \frac{3}{2}} \left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)(-a)(-a+1) \cdots (-a+n-1)}{n! \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}} \left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^n + \cdots \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{a}\right) x^2 + \cdots \\
 &\quad + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{a}\right) x^{2n} + \cdots \\
 \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, -a, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4a^2}\right) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

問 3 つぎの関係を証明せよ。

- (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, -a, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4a^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$
- (2) $F(a, -n, c; x)$ は多項式である。
- (3) $F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x}$

2. ルジャンドルの微分方程式

a が定数のとき, 2階線形微分方程式

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + a(a+1)y = 0 \quad (4.3)$$

をルジャンドルの微分方程式という。

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の形の解を求めよう。

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + a(a+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

x^n の係数を 0 とおけば,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + a(a+1)c_n = 0$$

整理して, $(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n-a)(n+a+1)c_n$

$$\text{故に, } c_{n+2} = -\frac{(a-n)(a+n+1)}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$$c_0=1, c_1=0 \text{ にとれば, } c_3=c_5=\cdots=c_{2m-1}=\cdots=0$$

$$c_2 = -\frac{a(a+1)}{2!}$$

$$c_4 = \frac{a(a-2)(a+1)(a+3)}{4!}$$

.....

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{a(a-2)\cdots(a-2m+2)(a+1)(a+3)\cdots(a+2m-1)}{(2m)!}$$

$$\text{従って, } y = 1 - \frac{a(a+1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-2)(a+1)(a+3)}{4!} x^4 - \cdots$$

$$c_0=0, c_1=1 \text{ として同様な計算をして,}$$

$$y = x - \frac{(a-1)(a+2)}{3!} x^3 + \frac{(a-1)(a-3)(a+2)(a+4)}{5!} x^5 - \cdots$$

を得る。定数 a が整数でなければ、いずれの級数も収束半径は 1 となる。定数 a が 0 または正の偶数なら $c_0=1, c_1=0$ の場合、 a が正の奇数なら $c_0=0, c_1=1$ の場合から得た解が、それぞれ a 次の多項式となる。これらの多項式の係数を $x=1$ のときの値が 1 になるように補正して得られる関数を $P_a(x)$ で表わし、ルジャンドル多項式という。

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} \quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

$$1-x=2u \text{ とおくと}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dy}{du} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{du} \right) \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \frac{d^2y}{du^2}$$

であるから、(4.3) は、

$$u(1-u) \frac{d^2y}{du^2} + (1-2u) \frac{dy}{du} + a(a+1)y = 0$$

となる。これは $\alpha=a+1, \quad \beta=-a, \quad \gamma=1$ の場合のガウスの微分方程式である。

従って、(4.3) の 1 つの特殊解として $y=F\left(a+1, -a, 1; \frac{1-x}{2}\right)$ を得る。

問 4 ルジャンドルの多項式 $P_a(x)$ は $a=n>0$ のとき $F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right)$

で与えられることを示せ.

3. ベッセルの微分方程式

a が定数のとき, 2階微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2)y = 0 \quad (a \geq 0)$$

をベッセルの微分方程式という.

$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の形の解を求めよう.

$$\begin{aligned} x^2 x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n x^{n-2} + x x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) c_n x^{n-1} \\ + (x^2 - a^2) x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \end{aligned}$$

$x^{\lambda+n}$ の係数を 0 とおけば,

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n + (\lambda+n) c_n + c_{n-2} - a^2 c_n = 0$$

従って $\{(\lambda+n)^2 - a^2\} c_n + c_{n-2} = 0$.

$n=0$ とおけば, 決定方程式 $\lambda^2 - a^2 = 0$ を得る.

故に, $\lambda = \pm a$

$\lambda = a (a \geq 0)$ にとれば, $c_{-2} = c_{-1} = 0$ として,

$$\{(a+n)^2 - a^2\} c_n = -c_{n-2}, \text{ すなわち,}$$

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(2a+n)}$$

$$c_1 = \frac{-c_{-1}}{2a+1} = 0, \quad c_3 = c_5 = \cdots = c_{2m-1} = \cdots = 0.$$

$$c_0 = 1 \text{ にとれば } c_2 = -\frac{c_0}{2^2(a+1)} = -\frac{1}{2^2(a+1)},$$

$$c_4 = (-1)^2 \frac{1}{2^4 \cdot 2(a+1)(a+2)}, \cdots,$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (a+1)(a+2) \cdots (a+m)}.$$

$$\text{故に, } y = x^a \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (a+1)(a+2) \cdots (a+m)} x^{2m} \right]$$

[] の中は a が負の整数でなければ, 任意の x で収束する.

このとき $J_a(x) = \frac{1}{2^a \Gamma(a+1)} y$ を a 次の第 1 種ベッセル関数または円柱関数

という。ここで、 $\Gamma(a+1)$ はガンマ関数とよばれ、つぎのように定義される。

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \cdots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \cdots + (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \cdots$$

.....

$\lambda = -a$ についても同様な考察ができる。

問5 $y = x^n J_n(x)$ は、

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2n) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \text{ の解であることを確かめよ。}$$

問6 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ について、つぎのことを証明せよ。

(1) $s > 1$ のとき $\Gamma(s) = (s-1) \Gamma(s-1)$

(2) 自然数 n について、 $\Gamma(n) = (n-1)!$

§ 4 逐次代入法

本書では扱わないが、初期条件 $[x=x_0, y=y_0]$ における1階微分方程式

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ の解は、つぎに述べるリプシッツの条件のように、特別な条

件の下では、ただ1つ存在することが知られている。

〔リプシッツの条件〕

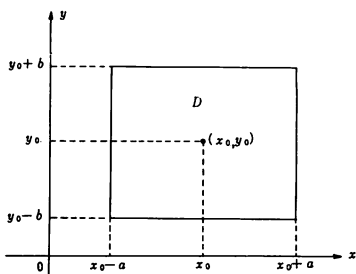
$f(x, y)$ は領域 D ;

$$|x - x_0| \leq a$$

$$|y - y_0| \leq b$$

で連続であって、 D の任意の x, y について $|f(x, y)| \leq M$ となる定数 M が存在するものとする (a, b, x_0, y_0 は定数)。このとき、

D の任意の2点 (x, y_1) (x, y_2) に対して



$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

となる定数 K が存在する。

解の存在を証明するピカールの逐次近似法を利用する方法を紹介しよう。

$\varphi_0(x) = y_0$ として,

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt,$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt,$$

.....

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt,$$

.....

を求めていくと, $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ が存在して,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))$$

となる。すなわち, $y = \varphi(x)$ が求める解である。

例 9 $\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y$ [$x=0, y=0$]

$$\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \left\{ 1 - t^2 + \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right\} dt = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3 \cdot 4},$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \int_0^x \left\{ 1 - t^2 + \left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{3 \cdot 4} \right) \right\} dt \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3} \end{aligned}$$

.....

実は、与えられた微分方程式は1階線形微分方程式だから、第2章で学んだように、一般解 $y = (x+1)^2 + ce^x$ を得る。初期条件 [$x=0, y=0$] から求める特殊解 $y = (x+1)^2 - e^x$ を得る。従って $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \dots$

この他にも、マクローリン展開されることを前提として係数を求めることもできる。

例10 $\frac{dy}{dx} = e^x - y \quad [x=0, y=0]$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - y \quad \text{だから,} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x - \frac{dy}{dx} = e^x - (e^x - y) = y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} = e^x - y,$$

.....

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

この場合も1階線形だから、一般解は $y = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$ (c は任意定数) となって、

求める特殊解は、 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) (= \sinh x)$.

この他にも、コンピューターなどを利用した近似解を求めるオイラー、ルンゲ-クッタなどの方法があるが、これらは数値計算の成書を見ていただきたい。

問7 つぎの微分方程式を初期条件 [] の下で解け。

(1) $\frac{dy}{dx} = y^2 \quad [x=0, y=1]$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2y \quad [x=0, y=1]$

(3) $\frac{dy}{dx} = xy \quad [x=0, y=2]$

(4) $\frac{dy}{dx} - 2xy = -1 \quad [x=0, y=0]$

(5) $\frac{dy}{dx} - xy = 2x - x^3 \quad [x=0, y=0]$

(6) $\frac{dy}{dx} = xy + 1 \quad [x=0, y=0]$

§ 5 ラプラス変換

次節でラプラス変換を利用した解法を述べるので、少し準備をしよう。

$x \geq 0$ で定義された関数 $f(x)$ に対して, 無限積分

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

は s の関数である. 変数 x の関数 f に, 変数 s の関数 F を対応させる変換を L で表し, ラプラス変換という.

$$f \xrightarrow{L} F \qquad F = L(f)$$

逆に, F が与えられたとき, f が決定できれば, $f = L^{-1}(F)$ で表わし, L^{-1} を逆変換という. L と L^{-1} の関係は, 積分定数を見捨てたときの微分と積分の関係によく似ている.

ラプラス変換やその逆変換は, 無限積分が存在しない場合は意味を持たないので, どのような関数 $f(x)$, $F(x)$ についても存在するわけではないから, 以下“存在すれば”という言葉に適宜補って考えなくてはならない.

i 関数 $f(x)$, $g(x)$ および, 定数 a , b について,

$$L(af(x) + bg(x)) = aL(f) + bL(g)$$

[証明]

$$\begin{aligned} L(af + bg) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \{af(x) + bg(x)\} dx = a \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &+ b \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = aL(f) + bL(g) \end{aligned}$$

ii $s > k$ のとき, $L(f) = F(s)$ ならば

$$s > k + a \text{ について, } L(e^{ax} f(x)) = F(s - a)$$

[証明]

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \text{ だから } F(s - a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} [e^{ax} f(x)] dx = L(e^{ax} f(x)) \end{aligned}$$

iii $x \geq 0$ で, $f(x)$ は連続であって, $|f(x)| \leq Me^{ax}$ となる定数 a , $M > 0$ が存在して, $f'(x)$ が区分的に連続であるとする. このとき, $s > a$ について

$$L(f') = sL(f) - f(0)$$

[証明]

$$L(f') = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = [e^{-sx} f(x)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$x > 0, s > \alpha$ ならば, $e^{sx} > e^{\alpha x}$, $|f(x)| \leq M e^{\alpha x} < M e^{sx}$ だから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-sx} f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} M e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow \infty} M e^{-(s-\alpha)x} = 0,$$

従って $[e^{-sx} f(x)]_0^\infty = -f(0)$.

iii の結果を f'' に適用して,

$$\begin{aligned} L(f'') &= sL(f') - f'(0) = s\{sL(f) - f(0)\} - f'(0) \\ &= s^2 L(f) - s f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

同様にして,

$$\text{iv} \quad L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

例11 $x > 0$ のとき, $f(x) = 1$ ならば,

$$\begin{aligned} F(s) &= L(f) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-sx} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s} [e^{-sx}]_0^t \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} (1 - e^{-st}) \end{aligned}$$

$s > 0$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ だから $F(s) = \frac{1}{s}$ すなわち, $s > 0$ ならば $L(1) = \frac{1}{s}$

例12 $x > 0$ のとき, $f(x) = e^x$ ならば,

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-sx} e^x dx = \int_0^\infty e^{(1-s)x} dx \quad \text{例11と同様にして, } s-1 > 0 \text{ なら}$$

ば $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(1-s)x} = 0$ だから $\int_0^\infty e^{(1-s)x} dx = \frac{1}{1-s} [e^{(1-s)x}]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$. 故に, $L(e^x) = \frac{1}{s-1}$

v $x \geq 0$ で $f(x)$ が区分的に連続で, $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$ となる定数 $\alpha, M > 0$ が存在すれば

$$L\left(\int_0^x f(u) du\right) = \frac{1}{s} L(f(x))$$

[証明]

$$g(x) = \int_0^x f(u) du \quad \text{とおくと} \quad g'(x) = f(x), \quad g(0) = 0.$$

$$|g(x)| \leq \int_0^x |f(u)| du \leq M \int_0^x e^{\alpha u} du = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1)$$

$$L(f(x)) = L(g'(x)) = sL(g(x)) - g(0) = sL(g(x))$$

従って

$$L(g(x)) = \frac{1}{s} L(f(x))$$

問8 つぎの関数のラプラス変換を求めよ.

(1) x^2-1

(2) $\cos^2 x$

問9 $L(f)$ がつぎの関数のとき, $f(x)$ を求めよ.

(1) $\frac{1}{s(s-1)}$

(2) $\frac{1}{s^2(s+1)}$

§ 6 ラプラス変換の応用

定数係数の2階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = \varphi(x) \quad (\omega \text{ は定数})$$

が与えられたとき, 両辺にラプラス変換をほどこして,

$$L(y'') + \omega^2 L(y) = L(\varphi)$$

$$L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) \text{ だから,}$$

$$L(y) = Y(s), \quad L(\varphi) = R(s) \text{ とおくと,}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = R(s) \text{ となる.}$$

この式を, 与えられた微分方程式の補助方程式という. これを解いて,

$$(s^2 + \omega^2) Y(s) = sy(0) + y'(0) + R(s) \text{ だから,}$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

そこで, あらかじめ用意された初等関数のラプラス変換表から

$$y(x) = L^{-1}(Y(s)) \text{ を得る.}$$

例13 $y'' + y' - 2y = 0 \quad [y(0) = 0, \quad y'(0) = 3]$

$$L(y'') + L(y') - 2L(y) = 0 \text{ だから, 補助方程式は,}$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + sL(y) - y(0) - 2L(y) = 0$$

$$L(y) = Y(s) \text{ とかくと,}$$

$$s^2 Y(s) - 3 + sY(s) - 2Y(s) = 0. \quad \therefore (s^2 + s - 2)Y(s) = 3.$$

$$\therefore Y(s) = \frac{3}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}.$$

$$y(x) = L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^x - e^{-2x}$$

問10 つぎの微分方程式を初期条件 [] の下で解け.

$$(1) \quad y'' - y' - 12y = 12 \quad [y(0) = 2, \quad y'(0) = -2]$$

$$(2) \quad y'' + y' - 2y = -12e^x \quad [y(0) = 1, \quad y'(0) = 0]$$

$$(3) \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad [y(0) = 1, \quad y'(0) = 3]$$

$$(4) \quad y'' + 4y = \sin 2x \quad [y(0) = 1, \quad y'(0) = 0]$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} - 4y + 4 \int_0^x y(u) du = \frac{x^3}{3} \quad [y(0) = 0]$$

第4章 問題

1. $n > 0$ ならば $y = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ は、ルジャンドルの微分方程式

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

を満足することを示せ.

2. つぎの微分方程式を、ベッセルの微分方程式に変形せよ.

$$(1) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (e^{2x} - 1)y = 0$$

3. ガウスの超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ について、つぎの式が成り立つことを示せ.

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x)$$

4. ベッセルの関数 $J_n(x)$ について、つぎの等式を証明せよ.

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

第 5 章 簡単な偏微分方程式

第 4 章までは、1 つの変数 x だけで決定される関数 y を求めることのみを考えて来た。然しながら、工学部では、2 つの変数 x, y によって決定される関数 z を問題にしなくてはならないことがしばしばある。このような場合、1 変数関数 $y=f(x)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$, 第 2 次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$, …… , 第 n 次導関数 $\frac{d^ny}{dx^n}$, …… をこれまで問題にしてきたのに対して、今度は、2 変数関数 $z=f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, 第 2 次偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, …… などを問題にしなくてはならない。第 4 章までに取扱って来た微分方程式を常微分方程式というのに対して、本章で取扱う微分方程式を、偏微分方程式という。偏微分方程式は一般には難しいが、簡単なもののみを取扱い、応用上重要な、波動方程式やラプラスの方程式についての説明をするのが目的である。なお連立微分方程式は、偏微分方程式を取扱う上で必要な最小限度の知識を得る程度にとどめる他はなかった。より詳しい学習を志す諸君は成書を見られたい。

§ 1 連立微分方程式

変数 t の 3 つの関数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\rho(t)$ が

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases} \quad (5.1)$$

という3つの常微分方程式を同時に満たすとき, x, y, z を (5.1) の解という. このようにいくつかの常微分方程式を同時に満たす x, y, z を求めるとき, 連立方程式にならって, 連立微分方程式という. ここで, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ はいずれも x, y, z の関数とする.

例 1 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (5.2)$$

を解いてみよう. 第3章の微分作用素 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて, (5.2) をかくと,

$Dx = -y$, $Dy = x$, $Dz = 0$ となるから

$$\begin{cases} Dx + y = 0 \\ x - Dy = 0 \\ Dz = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

(5.3) の第1式に D を施して, 第2式へ加えると $(D^2 + 1)x = 0$

従って $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ (c_1, c_2 は任意定数).

第1式から $y = -Dx = c_1 \sin t - c_2 \cos t$. 第3式から $z = c_3$ (c_3 は任意定数) となる.

(5.1) は

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} (= dt) \quad (5.4)$$

という形で与えてもよい. もちろん $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ を同時に0にしてしまう x, y, z があっては不都合である. さらに, (5.4) は

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

という形で与えてもよい. (5.5) から2つの任意定数 c_1, c_2 を含む解が得られる. これを一般解といい $y = f(x; c_1, c_2)$, $z = g(x; c_1, c_2)$ で表す. これを c_1, c_2 について解いて $F(x, y, z) = c_1$, $G(x, y, z) = c_2$ を得る. この式は

$$\begin{cases} F(x, f(x; c_1, c_2), g(x; c_1, c_2)) = c_1 \\ G(x, f(x; c_1, c_2), g(x; c_1, c_2)) = c_2 \end{cases}$$

となる。このように、連立微分方程式の解曲線に沿って一定であるような関数 F, G を連立方程式の積分という。

例2 (5.2)を変形して $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \frac{dz}{dx} = 0$

変数分離形であるから、これを解いて $x^2 + y^2 = c_1, z = c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) 従って、例1で扱った連立微分方程式の積分は $x^2 + y^2, z$ ということになる。

問1 つぎの連立微分方程式を解け

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = y \\ \frac{d^2z}{dt^2} = z \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + z = 0 \end{cases}$$

問2 つぎの連立微分方程式の積分を求めよ

$$(1) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$(2) \quad \frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

§ 2 1階同次線形偏微分方程式

x, y を変数にもつ2つの関数 $P(x, y), Q(x, y)$ に対して

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (5.6)$$

の形をした偏微分方程式を、1階同次線形という。このとき、

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \quad (5.7)$$

を(5.6)の補助方程式という。(5.7)を変形して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

ここで x, y を助変数 t の関数とみなせば

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (5.8)$$

という連立微分方程式とみなすことができる。これは先に述べた (5.1) で z =定数と考えたものになる。(5.8) の解を $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ とする。いま $z=f(x, y)$ という (5.6) の解が得られたとすれば $z=f(\varphi(t), \psi(t))$ だから

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

故に z は t については定数 c , すなわち

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = c \quad (\text{定数})$$

となる。逆に、曲線 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ に沿って定数となる関数 $z=f(x, y)$ は (5.6) を満たす。一方、このような関数が § 1 で述べた、連立微分方程式 (5.7) の積分である。従って、1 階同次線形偏微分方程式 (5.6) の解を求めることは、補助方程式 (5.8) の積分を求めることになる。

例 3 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ の 1 つの解を求めよう。

補助方程式は $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$, すなわち $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = -y$ だから, $y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = 0$

故に $\frac{d}{dt}(xy) = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = 0$, よって $xy = c$ (c 定数). 従って $z = xy$ が与えられた 1 階同次線形偏微分方程式の 1 つの解となる。もちろん例 2 のように $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ と変形して求めてもよい。

z の関数 $\Phi(z)$ と, (5.6) の 1 つの解 $z=f(x, y)$ について, $f(\varphi(t), \psi(t)) = c$ (c は定数) であるから, $\Phi[f(\varphi(t), \psi(t))] = \Phi(c) = \text{定数}$ となる。従って $\Phi(f(x, y))$ も (5.7) の積分である。例 3 では, 任意の関数 Φ について, $z = \Phi(xy)$ が, $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ の解である。従って $z = \Phi(xy)$ をこの偏微分方程式の一般解と言ってよい。常微分方程式の一般解には任意定数が現れたように, 偏微分方程式の一般解には任意関数が現れることになる。

問 3 つぎの偏微分方程式を解け

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(2) x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

§ 3 1 階準線形偏微分方程式

x, y, z を変数にもつ3つの関数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ について

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (5.9)$$

の形をした偏微分方程式を準線形またはラグランジュ形という。このとき

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (5.10)$$

を(5.9)の補助方程式という。補助方程式(5.10)の解を $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,

$z=\rho(t)$ とする。 $z=f(x, y)$ を(5.9)の解とすれば, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

$= P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$ だから, 曲面 $z=f(x, y)$ と柱面

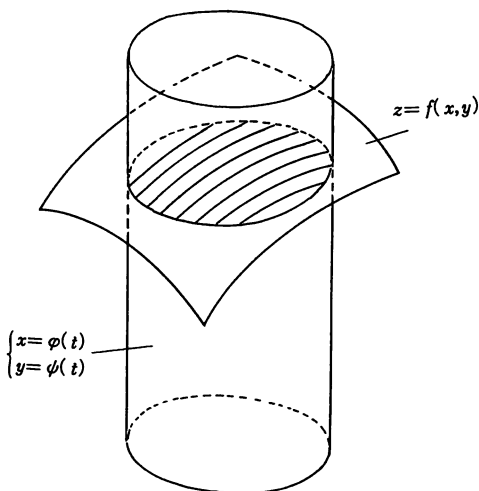
$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ との交線

は(5.10)を満たす。

逆に, この交線を通り(5.10)の解 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\rho(t)$ で表される曲線によって生成される曲面を $z=f(x, y)$ とかくと, $z=f(x, y)$ は(5.9)の解である。いま, (5.10)の2つの独立な積分を $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ とすれば(5.10)の解は

$$\begin{cases} u(x, y, z) = c_1 \\ v(x, y, z) = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \quad (5.11)$$

で与えられる。 $\phi(\varepsilon, \nu)$ を ε, ν の任意の関数とすると, $\phi(c_1, c_2) = 0$ を満たす定数 c_1, c_2 に対する(5.11)の表わす曲線は, 曲面 $\phi(u(x, y, z), v(x, y, z))$



$=0$ 上にある。これが、(5.9) の一般解となる。ここで c_1, c_2 は任意だから、 Φ も任意の関数でよいことになる。

例 4 $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = x-y$ を考えよう。

補助方程式は

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \quad (=dt \text{ とおいて})$$

$$\text{従って, } \frac{dx}{dt} = y-z, \quad \frac{dy}{dt} = z-x, \quad \frac{dz}{dt} = x-y,$$

$$\text{故に, } \frac{d}{dt}(x+y+z) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0, \text{ 従って,}$$

$$x+y+z=c_1 \quad (c_1 \text{ は任意定数})$$

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2) = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} = 2x(y-z)$$

$+2y(z-x)+2z(x-y)=0$. 従って, $x^2+y^2+z^2=c_2$ (c_2 は任意定数). ここで $x+y+z$, $x^2+y^2+z^2$ は独立であるから, Φ を任意関数とすると, 求める一般解は $\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$

問 4 つぎの偏微分方程式を解け。

$$(1) \quad zx\frac{\partial z}{\partial x} - yz\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2 \quad (2) \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

§ 4 全微分方程式

x, y, z を変数にもつ 2 つの関数 $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ について

$$dz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \quad (5.12)$$

を正規型の全微分方程式という。これは

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z) \quad (5.13)$$

を満たす関数 $z=f(x, y)$ の全微分を表している。ここで、(5.13) が成立てば

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P$$

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$ であるから, (5.12) が解をもてば

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P \quad (5.14)$$

が成り立つ.

例5 $dz = yz dx + z dy$ を考えよう.

$P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = z$ であるから,

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = z + yz \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P = yz$$

となつて, $z \neq 0$ のときは解を持たないことになる.

逆に (5.14) が成り立つと仮定する. $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z)$ は y を定数とみなせば,

第2章に学んだ方法で $z = \varphi(x, y, u(y))$ ($u(y)$ は y の任意関数) と解ける.

$z = \varphi(x, y, u(y))$ が $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$ を満たせば $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dy}$ だから

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} = Q(x, y, \varphi(x, y, u(y))), \quad \text{従つて}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{Q(x, y, \varphi(x, y, u)) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \quad (5.15)$$

(5.15) の右辺が x に関係しないとき, $u(y)$ が決定される. つまり, (5.15) の右辺を x で偏微分したとき 0 になればよい. 右辺を x で偏微分して, 分子を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ Q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(Q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(Q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x} \end{aligned} \quad (5.16)$$

一方, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, \varphi)$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ であるから,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

これらを, (5.16) へ代入して

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(Q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} P - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \varphi} Q \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

ここで, (5.14) を用いて, 上式は 0 となる. (5.15) は $\frac{du}{dy} = F(y, u)$ の形となり, 第 2 章の方法で $u(y) = \psi(y, c)$ (c は任意定数) を得る. これから (5.12) の解 $z = \varphi(x, y, \psi(y, c))$ を得る. 従って (5.14) は, (5.12) が解をもつための必要かつ充分なる条件である.

$$\text{例 6} \quad dz = \frac{1+yz}{1+xy} dx + \frac{x(z-x)}{1+xy} dy$$

$P(x, y, z) = \frac{1+yz}{1+xy}$, $Q(x, y, z) = \frac{x(z-x)}{1+xy}$ であるから正規型の全微分方程式である.

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = \frac{z-x+xyz-x^2y}{(1+xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P$$

となるから, 解が存在する. 従って

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1+yz}{1+xy} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(z-x)}{1+xy} \quad \text{となる.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{1+xy} z = \frac{1}{1+xy} \quad \text{と変形して, } y \text{ を定数とみれば, } z \text{ は } x \text{ の線形微分}$$

方程式である. 故に

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{y}{1+xy} dx} \left[\int \frac{1}{1+xy} e^{-\int \frac{y}{1+xy} dx} dx + u(y) \right] \\ &= e^{\log(1+xy)} \left[\int \frac{1}{1+xy} e^{-\log(1+xy)} dx + u(y) \right] \\ &= (1+xy) \left[\int \frac{dx}{(1+xy)^2} + u(y) \right] = (1+xy) \left[-\frac{1}{y(1+xy)} + u(y) \right] \end{aligned}$$

従って, $z = -\frac{1}{y} + u(y)(1+xy)$. ここで, $u(y)$ は y の任意関数であるが

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(z-x)}{1+xy} \quad \text{を満たさなければならない.}$$

$$z = -\frac{1}{y} + u(y)(1+xy) \quad \text{を } y \text{ で偏微分して}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + u'(y)(1+xy) + xu(y) \quad \text{だから, } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(z-x)}{1+xy} \quad \text{へ代入して整}$$

理すると

$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$ となる. すなわち $u = \frac{1}{y} + c$ (c は定数). 従って, 一般解は

$$z = -\frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y} + c\right)(1+xy) \quad \text{故に} \quad z = x + c(1+xy) \quad \text{を得る.}$$

問5 つぎの全微分方程式を解け.

$$(1) \quad yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = 0$$

$$(2) \quad x \, dx - \frac{dy}{z^2} + \frac{2y}{z^3} \, dz = 0$$

§ 5 波動方程式, ラプラスの方程式

求積法で解ける特殊な形の方程式をあげておこう. 2階偏微分方程式

$$P(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + R(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + S(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + T(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + U(x, y) z = V(x, y) \quad (\text{ここで, } P(x, y), Q(x, y), R(x, y), S(x, y), T(x, y), U(x, y), V(x, y) \text{ は 2 つの変数から成る 7 つの関数}) \text{ を線形という.}$$

$$(i) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

の形をしたものは, いずれも 2 回積分すればよい.

$$\text{例 7} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^3}{3} - xy + \varphi(y) \quad (\varphi(y) \text{ は } y \text{ の任意の関数}). \quad \text{従って}$$

$$z = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2 y}{2} + x\varphi(y) + \psi(y) \quad (\psi(y) \text{ は } y \text{ の任意の関数})$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P(y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(y) z = R(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P(x) \frac{\partial z}{\partial y} + Q(x) z = R(x, y)$$

の形をしたものは, それぞれ y, x を定数とみなせば, 定数係数の 2 階線形であるから, 第 3 章の方法で解ける.

$$\text{例 8} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} - 6z = xy$$

y を定数とみなして, 演算子の記号を流用すれば

$$(D^2 + D - 6)z = xy$$

同次の場合、 $(D^2 + D - 6)z = 0$ すなわち $(D+3)(D-2)z = 0$ 一般解は

$z = \varphi(y)e^{-3x} + \psi(y)e^{2x}$ ($\varphi(y)$, $\psi(y)$ は y の任意の関数)

$$\begin{aligned} (D^2 - D - 6)z &= xy \text{ の特殊解は } \frac{1}{D^2 + D - 6} xy = \frac{1}{(D+3)(D-2)} xy \\ &= -\frac{y}{6} \frac{1}{1 + \frac{D}{3}} \frac{1}{1 - \frac{D}{2}} x = -\frac{y}{6} \left(1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} \cdots\right) \left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \cdots\right) x \\ &= -\frac{y}{6} \left(1 + \frac{D}{6} + \cdots\right) x = -\frac{y}{6} \left(1 + \frac{D}{6}\right) x = -\frac{y}{6} \left(x + \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

従って、求める一般解は $z = \varphi(y)e^{-3x} + \psi(y)e^{2x} - \frac{1}{36} y(6x+1)$ ($\varphi(y)$, $\psi(y)$

は y の任意の関数)

(iii) 2 階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

を波動方程式という。 $u = x + y$, $v = x - y$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

これらを $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ へ代入すると $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = 0$

(i) の方法によって $\frac{\partial z}{\partial u} = \varphi(u)$ ($\varphi(u)$ は u の任意の関数)

従って $z = \int \varphi(u) du + \psi(v)$ ($\psi(v)$ は v の任意の関数)

ここで、 φ は任意の関数であるから、 $\int \varphi(u) du$ をあらためて $\varphi(u)$ で表せば、

求める一般解は $z = \varphi(u) + \psi(v)$ となる。すなわち $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$ (φ , ψ は任意の関数)。たとえば $\varphi(u) = \sin u$, $\psi(v) = \sin v$ にとれば $z = \sin(x+y)$

$+ \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$ は波動方程式の特殊解ということになる。

(iv) 2 階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

をラプラスの方程式という。 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ という記号をラプラスの演算子とよび、 Δz と表すこともできる。 $\Delta z = 0$ を満たす実数値関数 $z = f(x, y)$ を調和関数という。

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ において、 $z = \varphi(r)$ なる形の関数 φ がラプラスの方程式の解であつたしよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \text{であるから} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(r) \frac{y}{r} \quad \text{となり,} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi'(r)}{r} \right) x + \frac{\varphi'(r)}{r} = \frac{\varphi''(r) \cdot r - \varphi'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot x + \frac{\varphi'(r)}{r} \\ &= \varphi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \varphi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

同様に $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi''(r) \frac{y^2}{r^2} + \varphi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$ となるから $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ へ代入し

て $\varphi''(r) \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) + \varphi'(r) \left(\frac{2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r^3} \right) = 0$ すなわち $\varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r} = 0$

$\varphi'(r) = s$ とおくと $\frac{ds}{dr} + \frac{s}{r} = 0$ となって、変数分離形となった。故に

$sr = c_1$ (c_1 は任意定数)。従つて $\varphi'(r)r = c_1$, すなわち $\frac{d\varphi}{dr} r = c_1$ となり、

再び変数分離形 $\varphi = c_1 \log r + c_2$ (c_2 は任意定数)。従つて、ラプラスの方程式の解として

$z = c_1 \log(x^2 + y^2) + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) が得られた。

ここで、複素関数論の知識を少し借りよう。複素変数 $z = x + iy$ の関数

$F(z) = u + iv$ ($u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ は2つの実変数の実数値関数) の

導関数を $F'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z}$

で定義すると、 $F'(z)$ が存在するためには、コーシー・リーマンの方程式とよばれるつぎの関係式が成立たなくてはならない。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

考えている領域のすべての z について $F'(z)$ が存在するとき、 $F(z)$ を正則関数という。 $F(z)$ が正則関数ならば、

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

従って、 u, v 共に調和関数となる。

(iii) で用いた方法を複素数の場合にも形式的にあてはめて

$$u = x + iy, \quad v = x - iy \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\text{を得るから, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{へ代入すると } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

(iii) と同様にして、任意の関数 φ, ψ について、 $z = \varphi(u) + \psi(v)$ を得る。ここで、

$z = \varphi(u) + \psi(v)$ の実数部分 $\operatorname{Re}\{\varphi(u) + \psi(v)\}$ や虚数部分 $\operatorname{Im}\{\varphi(u) + \psi(v)\}$ は

調和関数であるから、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ の一般解 $z = \operatorname{Re}\{\varphi(x + iy) + \psi(x - iy)\}$

($z = \operatorname{Im}\{\varphi(x + iy) + \psi(x - iy)\}$ でもよい) を得る。たとえば $\varphi(u) = -i \log u$,

$\psi(v) = 0$ にとれば、

$$z = \operatorname{Re}\{\varphi(x + iy) + \psi(x - iy)\} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

また、 $\varphi(u) = \frac{1}{2} e^u$, $\psi(v) = \frac{1}{2} e^v$ にとれば、

$$z = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \{e^{x+iy} + e^{x-iy}\} = e^x \cos y \quad \text{という特殊解を得る。}$$

(v) 2 階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

を熱伝導方程式または拡散方程式という。

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad \text{にとれば, } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \left(-\frac{1}{2y} + \frac{x^2}{4y^2} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \left(-\frac{x^2}{2y} + 1\right)$$

となって $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ であるから, $z = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ は, 熱伝導方程式の解となる. この方程式の初期値問題など, 応用上極めて重要であるが, フーリエ解析などの手法を用いる他はなく, 残念ながら, 本書では扱えない.

第5章 問題

1 つぎの連立微分方程式を解け. ただし $D = \frac{d}{dt}$

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)x + (D^2 + 1)y = e^{2t} \\ (D + 1)x + Dy = 1 \end{cases}$$

2 つぎの偏微分方程式を解け

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy^2$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} - 6z = 0$$

3 熱伝導方程式 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ において $z = f(x)g(y)$ の形をした解を求めよ.

公 式 集

A 予 備 公 式

I 2 項定理

(1) 階乗 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, ただし, $0! = 1$

(2) 順列 相異なる n 個のものから, r 個をとりだして 1 列に並べる方法の数は

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

とくに ${}_nP_n = n!$

(3) 組合せ 相異なる n 個のものから r 個をとりだす方法の数は

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ただし, ${}_nC_0 = 1$

(4) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$; ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

(5) 2 項定理

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r} b^r \\ &= a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n\end{aligned}$$

II 対数の基本性質

(底は 1 でない正数, 真数は正数)

(1) $\log_a 1 = 0$ (2) $\log_a a = 1$ (3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (5) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

(6) $\log_a x^k = k \log_a x$ (7) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{n}{m} \log_a x$

(8) 底の変換公式 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (9) $\log_a b = \frac{1}{\log_{ba} a}$

III 三角関数

(公式中, 複号同順)

(1) 相互関係

(逆数関係) $\sin \theta \operatorname{cosec} \theta = 1$, $\cos \theta \sec \theta = 1$, $\tan \theta \cot \theta = 1$

$$(\text{相除関係}) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$(\text{平方関係}) \quad \begin{cases} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \end{cases}$$

(2) $-\theta, \frac{\pi}{2} \pm \theta, \pi \pm \theta$ の三角関数

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \cot \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin \theta \\ \cos(\pi \pm \theta) = -\cos \theta \\ \tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan \theta \end{cases}$$

(3) 加法定理とその派生公式

$$(\text{加法定理}) \quad \begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{cases}$$

$$(\text{2倍角公式}) \quad \begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \quad = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \quad = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

$$(\text{3倍角公式}) \quad \begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{cases}$$

$$(\text{半角公式}) \quad \begin{cases} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{積和公式}) \quad & \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{和積公式}) \quad & \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

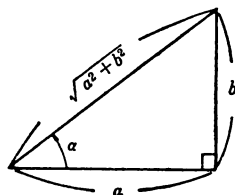
(単振動の合成)

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \alpha)$$

$$\left(\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \right.$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \left. \right)$$



B 基本的関数の導関数と不定積分

I 導関数

	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(n)}(x)$
(1)	x^a	ax^{a-1}	$a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$
(2)	e^{kx}	ke^{kx}	$k^n e^{kx}$
(3)	$\log x$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$
(4)	$\sin x$	$\cos x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
(5)	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
(6) $\tan x$	$\sec^2 x$	(14) $\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
(7) $\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$	(15) $\sinh x$	$\cosh x$
(8) $\sec x$	$\sec x \tan x$	(16) $\cosh x$	$\sinh x$
(9) $\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$	(17) $\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
(10) $\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(18) $\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(11) $\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(19) $\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
(12) $\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	(20) $\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
(13) a^x	$a^x \log a$		

II 不定積分 (積分定数は省略, a^2 の $a > 0$)

$f(x)$	$\int f(x) dx$
(1) x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$
(2) $\frac{1}{x}$	$\log x $
(3) $\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \log \left \frac{a+x}{a-x} \right = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} & (x < a) \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} & (x > a) \end{cases}$
(4) $\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
(5) $\frac{1}{(a^2 - x^2)^2}$	$\frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^2} \log \left \frac{a+x}{a-x} \right $
(6) $\frac{1}{(a^2 + x^2)^2}$	$\frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
(7) $\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$
(8) $\sqrt{x^2 + A}$	$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log x + \sqrt{x^2 + A} \right)$
(9) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1} \frac{x}{a}$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
(10) $\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$	$\log x + \sqrt{x^2+A} , \begin{cases} \sinh^{-1} \frac{x}{a} & (A=a^2) \\ \cosh^{-1} \frac{x}{a} & (A=-a^2, x>a) \end{cases}$
(11) e^x	e^x
(12) a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
(13) $\log x$	$x(\log x - 1)$
(14) $\log ax$	$\frac{1}{\log a} x(\log x - 1)$
(15) $\sin x$	$-\cos x$
(16) $\cos x$	$\sin x$
(17) $\tan x$	$-\log \cos x = \log \sec x $
(18) $\cot x$	$\log \sin x $
(19) $\sec x$	$\log \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$
(20) $\operatorname{cosec} x$	$\log \left \tan \frac{x}{2} \right = \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
(21) $\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
(22) $\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
(23) $\sec^2 x$	$\tan x$
(24) $\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x$
(25) $\sin^{-1} x$	$x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$
(26) $\tan^{-1} x$	$x \tan^{-1} x - \log \sqrt{1+x^2}$
(27) $\sinh x$	$\cosh x$
(28) $\cosh x$	$\sinh x$
(29) $e^{ax} \sin bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$
(30) $e^{ax} \cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$

(29, 30)においては $a \leq 0$ でもよい.)

C 基本的関数のべき級数展開

[] 内は級数の収束域 ($-\infty < x < \infty$ の場合は省略)

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1), \quad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n) = n! 2^n$$

$$(1) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad [\text{一般には } |x| < 1]$$

$$(1-1) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad [|x| < 1]$$

$$(1-2) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad [|x| < 1]$$

$$(1-3) \quad \frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \cdots + (\mp 1)^n (n+1)x^n + \cdots \quad [|x| < 1]$$

$$(1-4) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \\ + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \cdots \quad [|x| \leq 1]$$

$$(1-5) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots \\ + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \cdots \quad [-1 < x \leq 1]$$

$$(2) \quad e^x = \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$(3) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad [-1 < x \leq 1]$$

$$(4) \quad \log x = 2 \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \cdots \right. \\ \left. + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} + \cdots \right\} \quad [x > 0]$$

$$(5) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$(6) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(7)^* \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \\ + \frac{1382}{155925}x^{11} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots \quad \left[|x| < \frac{\pi}{2} \right]$$

$$(8)^* \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \dots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} - \dots$$

[0 < |x| < π]

$$(9)^{**} \sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

[|x| < $\frac{\pi}{2}$]

$$(10)^* \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \dots$$

$$+ \frac{(2^{2n}-2)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$$

[0 < |x| < π]

$$(11) \sin^{-1}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + \dots$$

[|x| ≤ 1]

$$(12) \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

[|x| ≤ 1]

$$(13) \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(14) \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(15)^* \tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$$

[|x| < $\frac{\pi}{2}$]

$$(16) \sinh^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + \dots$$

[|x| ≤ 1]

$$(17) \tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

[|x| < 1]

$$(18)^* \frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

[|x| < 2π]

*) B_n : ベルヌイ数 **) E_n : オイラー数

n	B_n	E_n	n	B_n	E_n
1	1/6	1	6	691/2730	2702765
2	1/30	5	7	7/6	199360981
3	1/42	61	8	3617/510	19391512145
4	1/30	1385	9	43867/798	2404879675441
5	5/66	50521	10	174611/330	370371188237525

D ラプラス変換表

$f(x)=L^{-1}(F)$	$F(s)=L(f)$	$f(x)=L^{-1}(F)$	$F(s)=L(f)$
(1) 1	$\frac{1}{s}$	(9) $\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
(2) x	$\frac{1}{s^2}$	(10) $\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
(3) x^2	$\frac{2}{s^3}$	(11) $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
(4) $x^n (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(12) $x \sin ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
(5) e^x	$\frac{1}{s-1}$	(13) $x \cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
(6) e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	(14) $x^n e^{ax} (n=1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(7) $\sin x$	$\frac{1}{s^2+1}$	(15) $\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2} (s> a)$
(8) $\cos x$	$\frac{s}{s^2+1}$	(16) $\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2} (s> a)$

問題解答

第1章

問1 (1) $y = x \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (2) $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

(3) $y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$ (4) $4y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

問2 (1) $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ (3) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(4) $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

問3 略 問4 (1) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $2e^{2x}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $(2x-1)\cos(x^2-x)$ (5) $-6\sin 3x \cos 3x (= -3\sin 6x)$

問5 (1) e^{x^2} (2) $\log(1+x^2)$ (3) $-(x+1)e^{-x}$ (4) $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

(5) $-\cos x + e^x$ (6) $\frac{1}{4}(2x - \sin 2x)$ (7) $\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)$

(8) $x\sin x + \cos x$ (9) $\frac{1}{2}\sin 2x$ (10) $\frac{1}{3}\cos x(\cos^2 x - 3)$ (11) $\tan^{-1} x$

(12) $\frac{1}{3}\left\{\log \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3}\tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}$

問6 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 3y^2$ (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + 2y$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$ (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ 問7 略

問8 (1) $2x dx$ (2) $\cos y dy$ (3) $2x dx + 2y dy$ (4) $(3x^2 + 3y^2) dx$

$$+(6xy-3y^2)dy \quad (5) \quad -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy \quad (6) \quad \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx+xdy)$$

問9 略 問10 略 問11 (1) -2 (2) 15 (3) 0 (4) -126

第1章問題

1. 略 2. 略 3. (1) 1 (2) e (3) 0 (4) 1 4. 略 5. (1) $x=7, y=6,$

$$z=5 \quad (2) \quad a=\frac{1}{15} \quad b=-\frac{1}{2} \quad c=\frac{4}{5}$$

第2章

問1 (1) $y=\frac{x^2}{2}+c$ (c は任意定数, 以下同じ) (2) $y=ce^{\frac{x^2}{2}}$

(3) $x^2+y^2=r^2$ (r は任意定数) (4) $\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+c$ または $y=\frac{x+c}{1-cx}$

(5) $y=\tan(x+c)$ (6) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\log|\sec x|+c$ (7) $\sin^{-1}x=\sin^{-1}y+c$

または $x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=c$ (8) $x^2-1=c(y^2-1)$ (9) $y=c\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

(10) $(y-cx^2)\left(y-\frac{c}{x^2}\right)=0$

問2 (1) $y=\frac{e^x}{1+e^x}$ (2) $(a-by)e^{bx}=a-by_0$

問3 (1) $y(y^2-3x^2)=c$ (2) $y=cx^2-x$ (3) $(x^2+y^2)^3=cx^4$

(4) $\sin\frac{y}{x}=cx$ (5) $x^2+y^2=cx$ (6) $y=x(\log x+c)$

(7) $(x+y)x=c$ (8) $x=X+1, y=Y-2$ とおくと $\frac{dY}{dX}=\frac{4X-Y}{2X+Y}$ となっ

て同次形, これを解いて $(y+4x-2)^2(y-x+3)^3=c$ (9) $2x-y=t$ とおくと

$\frac{dt}{dx}=\frac{3}{1-t}$ となって変数分離形. これを解いて $(2x-y-1)^2=-6x+c$

(10) $x=X+1 \quad y=Y+1$ において同次形 $\frac{dY}{dX}=\frac{2Y-X}{2X+4Y}$. これを解いて

$$\frac{1}{2}\log\{4(y-1)^2+(x-1)^2\}+\tan^{-1}\frac{2(y-1)}{x-1}=c$$

- 問4 (1) $y=e^x(e^x+c)$ (2) $y=ce^{2x}-(x^2+2x+2)e^x$ (3) $xy=c-\cos x$
 (4) $y=x(ce^x-1)$ (5) $y=2+c\sqrt{x^2-1}$ (6) $x(y+4)=c$
 (7) $y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$ (8) $y=\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{c}{x^2}$ (9) $y=c\cos x-2\cos^2 x$
 (10) $y'=t$ とおけば $\frac{dt}{dx}+t=e^x$. これを解いて, $t=\frac{1}{2}e^x+c_1e^{-x}$. 故に $y=\frac{1}{2}e^x-c_1e^{-x}+c_2$ (c_1, c_2 は任意定数)

- 問5 (1) $u=y^2$ とおくと, $x\frac{du}{dx}=2(u-1)$. 変数分離形だから $y^2+cx^2=1$
 (2) $u=\frac{1}{y}$ において $\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{x}$. これを解いて $(1+cx)y=1$ (3) $u=y^3$ とおいて, $\frac{du}{dx}=x(1-u)$. これを解いて $y^3-1=ce^{-\frac{x^2}{2}}$ (4) $u=y^3$ において,
 $\frac{du}{dx}-u=2\sin x$. これを解いて $y^3=ce^x-\sin x-\cos x$ (5) $u=y^{-2}$ において,
 $\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=-\frac{2}{x^2}$. これを解いて $x^2=(c-2x)y^2$ (6) $u=y^2$ とおくと,
 $\frac{du}{dx}+2u=2x$. これを解いて $y^2=x-\frac{1}{2}+ce^{-2x}$ (7) $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=2$ と変形して,
 $x=y+\frac{c}{y}$ 即ち $xy-y^2=c$ (8) $u=\frac{1}{y}$ において $\frac{du}{dx}+xu=xe^{-x^2}$. これを解いて
 $\frac{1}{y}=-e^{-x^2}+ce^{-\frac{x^2}{2}}$ (9) $u=y^2$ において, $\frac{du}{dx}=2x(u+1)$. これを解いて $y^2+1=ce^{x^2}$
 (10) $u=y^{-\frac{1}{3}}$ において, $\frac{du}{dx}-\frac{2}{3x}u=-\frac{2}{3}x^2$. これを解いて $y^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{7}x^3+cx^{\frac{2}{3}}$

- 問6 (1) $x^2+4y^2=c$ (2) $x^2y^2=c$ (3) $2\log x+\frac{1}{y}=c$ (4) $xy+\frac{1}{xy}=c$
 (5) $x^2+x^3y^2-y^3=c$ (6) $e^{xy}+y^2=c$ (7) $x^4\sin y=c$ (8) $\sin xy=c$
 (9) $x\tan y-y\cos x=c$ (10) $\sin x\cos y=c$

- 問7 (1) $(x-3)^2+9(y-1)^2=9$ (2) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ (3) $\sin x-y\cos x=0$ (4) $x^2y+\sin \pi y=1$

- 問8 (1) 両辺に $x^{\frac{1}{3}}$ をかけて, $x^{\frac{4}{3}}y^2=c$ (2) 両辺に $\frac{1}{x}$ をかけて, $\log x-$

$$x^2y+y^2=c \quad (3) \quad \text{両辺に } \frac{1}{x^2} \text{ をかけて, } \frac{1}{x}+xy-\frac{y^2}{2}=c \quad (4) \quad \text{両辺に } y^2 \text{ を}$$

$$\text{かけて, } \frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{2}y^4=c \quad (5) \quad \text{両辺に } y \text{ をかけて, } xy^2=c \quad (6) \quad \text{両辺}$$

$$\text{に } \frac{1}{x} \text{ をかけて, } y \log x=c \quad (7) \quad \text{両辺に } e^x \text{ をかけて, } e^x \sin y=c \quad (8) \quad \text{両}$$

$$\text{辺に } x^{-\frac{3}{2}} \text{ をかけて, } \frac{2y}{\sqrt{x}}=c \quad (9) \quad \text{両辺に } \frac{1}{x^2} \text{ をかけて, } \frac{1}{x} \sin y=c \quad (10)$$

$$\text{両辺に } \sin x \text{ をかけて, } \sin^2 x \cos y=c$$

$$\text{問 9 (1) 一般解は } y=cx+c^2, \text{ 特異解は } y=-\frac{x^2}{4}.$$

$$(2) \text{ 一般解は } c^2-cx+y=0, \text{ 特異解は } y=\frac{x^2}{4}.$$

$$(3) \text{ 一般解は } y=cx+\sqrt{c}, \text{ 特異解は } y=-\frac{1}{4x}.$$

$$(4) \text{ 一般解は } y=cx+\sqrt{c^2-1}, \text{ 特異解は } x^2-y^2=1.$$

第2章問題

$$1. (1) \text{ ベルヌイ } u=y^{-1} \text{ において, } \frac{du}{dx}-\frac{x}{x^2-1}u=\frac{x}{x^2-1}. \text{ これを解いて } \frac{1}{y}=$$

$$c\sqrt{x^2-1}-1 \quad (2) \text{ 同次形 } y=ce^{\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2} \quad (3) \text{ } x+y=t \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx}=1+\frac{1}{t^2}.$$

$$\text{これを解いて } y=\tan^{-1}(x+y)+c \quad (4) \text{ } (cx-1)y=1 \quad (5) \left(x\frac{dy}{dx}-y\right) \times$$

$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)=0 \text{ と因数分解して, } (y-cx)(y-x-c)=0$$

$$(6) \ y=1+ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7) \ xy=ce^{\frac{y}{x}} \quad (8) \ \frac{y-1}{y-2}=ce^x \quad (9) \ e^y=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c \quad (10) \ y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$$

$$2. (1) \text{ 同次形 } y=ce^{\frac{y}{x}} \quad (2) \text{ 線形 } y=\frac{x-1}{x}e^{-x}+\frac{c}{x}e^{-2x} \quad (3) \text{ 同次形}$$

$$\frac{1}{2}\left(\log \frac{y}{x}\right)^2=\log x+c \quad (4) \text{ 線形 } y=\cosh x\{\log(\cosh x)+c\} \quad (5) \text{ 完全形}$$

$$e^x+x \log y+y=c \quad (6) \text{ 完全形 } -\cos x+x \tan^{-1} \frac{y}{x}+\frac{1}{2}y \log(x^2+y^2)-y-\frac{y^2}{2}$$

$$=c \quad (7) \ \frac{y}{x}=u \text{ において } \frac{dy}{dx}=u \pm \sqrt{1+u^2} \text{ 従って } (y+\sqrt{x^2+y^2}-c)(y+$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-cx^2=0 \quad (8) \quad y=x(e^x+c) \quad (9) \quad y=\cos x(c-\cos x)$$

$$(10) \quad y^2=u \quad \text{とおくと線形, } y^2=x-1+ce^{-x}$$

$$3. \quad \frac{dZ}{dX}=1+Z^2 \quad \text{と変換されて, } (x^2y+x)\tan\left(\frac{1}{x}+c\right)=1$$

$$4. \quad (1) \quad N=N_0e^{-\lambda t} \quad (2) \quad T=a+(b-a)e^{-kt} \quad (3) \quad v^2=\frac{2gR^2}{r}+v_0^2-2gR$$

$$(4) \quad \frac{2}{5}(h^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}})=kt \quad (5) \quad i=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (6) \quad i=\frac{E_0}{\omega^2L^2+R^2}\left(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega Le^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E_0}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}\left\{\sin(\omega t-\varphi)+\sin\varphi\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right\}, \quad \text{ただし } \tan\varphi=\frac{\omega L}{R}$$

第3章

$$\text{問 1} \quad f(D)+g(D)=D^2+3D+1, \quad f(D)g(D)=D^3+D^2-2$$

$$\text{問 2} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad (2) \quad \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} e^x \sin x & e^x \cos x \\ e^x(\sin x + \cos x) & e^x(\cos x - \sin x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$\text{問 3} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & (n-1)x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (k-1)! \neq 0 \quad (2) \quad \text{略}$$

$$\text{問 4} \quad (1) \quad \frac{dz}{dx}=2z \quad \text{は変数分離形だから } z=c_2e^{2x} \quad (2) \quad (D-2)y=c_2e^{2x} \quad \text{は線形だから, } y=(c_1+c_2x)e^{2x} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$\text{問 5} \quad (1) \quad y=c_1e^{5x}+c_2e^{-2x} \quad (2) \quad y=(c_1+c_2x)e^{-4x} \quad (3) \quad y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x) \quad (4) \quad y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x} \quad (5) \quad y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{x}{2}} \quad (6) \quad y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x} \quad (7) \quad y=(c_1+c_2x)e^{-i2x} \quad (8) \quad y=c_1e^{\frac{x}{3}}+c_2e^{-\frac{x}{3}} \quad (9) \quad y=c_1\cos\frac{\pi x}{4}+c_2\sin\frac{\pi x}{4} \quad (10) \quad y=e^{8x}(c_1\cos 6x+c_2\sin 6x)$$

$$\text{問 6} \quad (イ) \quad k=-a^2<0 \quad \text{ならば } y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax} \quad (ロ) \quad k=0 \quad \text{ならば } y=c_1+c_2x \quad (ハ) \quad k=a^2>0 \quad \text{ならば } y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$$

$$\text{問 7} \quad y=\cos \nu x$$

$$\text{問8} \quad (1) \quad y = e^{\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \quad (2) \quad y = e^{3x} + e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{問9} \quad (1) \quad y &= c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x \quad (2) \quad y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad (3) \quad y = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x) e^{3x} \\ (4) \quad y &= c_1 e^{-2x} + e^x (c_2 \cos \sqrt{2} x + c_3 \sin \sqrt{2} x) \quad (5) \quad y = c_1 e^{-\sqrt{2} x} + c_2 e^{\sqrt{2} x} + c_3 \cos \sqrt{2} x + c_4 \sin \sqrt{2} x \\ (6) \quad y &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} \quad (7) \quad y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x \\ (8) \quad y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x) \quad (9) \quad y = c_1 + e^{3x} (c_2 \cos x + c_3 \sin x) \\ (10) \quad y &= c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + (c_3 + c_4 x) e^{2x} \\ (11) \quad y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \quad (12) \quad y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + (c_4 + c_5 x) e^{2x} \\ (13) \quad y &= e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x) \quad (14) \quad y = e^x \{ (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x \} + c_5 e^{5x} + c_6 e^{-x} \\ (15) \quad y &= e^x (c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x) + e^{-x} \{ c_4 + c_5 x + (c_6 + c_7 x) \cos x + (c_8 + c_9 x) \sin x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問10} \quad (1) \quad y &= c_1 e^{-x} + e^x (c_2 \cos x + c_3 \sin x) + \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x \quad (2) \quad y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x - (x^2 + 5x + 9) \\ (3) \quad y &= c_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3} x}{2} + c_3 \sin \frac{\sqrt{3} x}{2} \right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} \right) e^{-x} \\ (4) \quad y &= (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x - \frac{1}{24} x^3 \sin x - \frac{1}{8} x^2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問11} \quad (1) \quad y &= \frac{1}{2} e^{3x} \quad (2) \quad y = -\frac{1}{12} e^x \quad (3) \quad y = -\frac{1}{8} e^{2x} \quad (4) \quad y = -e^{6x} \\ (5) \quad y &= 2e^{3x} \quad (6) \quad y = e^x \quad (7) \quad y = \frac{1}{4} e^{-x} \quad (8) \quad y = x e^{2x} \quad (9) \quad y = x e^x \\ (10) \quad y &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問12} \quad (1) \quad y &= x + 2 \quad (2) \quad y = -\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \quad (3) \quad y = \frac{1}{12} x^2 - \frac{5}{36} x \quad (4) \quad y = -\frac{1}{4} (x-1) \\ (5) \quad y &= -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \quad (6) \quad y = x^2 + x \quad (7) \quad y = -\frac{1}{2} (x^2 + 1) \\ (8) \quad y &= -\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 3) \quad (9) \quad y = x \quad (10) \quad y = \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問13} \quad (1) \quad y &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \quad (2) \quad y = \frac{1}{4} (x+1) e^{-x} \quad (3) \quad y = \frac{1}{4} (2x-3) e^{3x} \\ (4) \quad y &= \frac{1}{25} (5x-4) e^{2x} \quad (5) \quad y = \frac{1}{2} (x+1) e^{-2x} \quad (6) \quad y = (x-2) e^{2x} \quad (7) \quad y = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12}x^3(x+2)e^x \quad (8) \quad y = \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x} \quad (9) \quad y = \frac{1}{4}(x^2-x)e^{2x} \quad (10) \quad y = \frac{1}{72}(6x+11)e^{3x}$$

$$\text{問14} \quad (1) \quad y = \frac{1}{20}(3\sin 2x - \cos 2x) \quad (2) \quad y = \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$$

$$(3) \quad y = \cos 2x \quad (4) \quad y = -\cos x \quad (5) \quad y = -\frac{1}{3}\sin x \quad (6) \quad y = -\frac{1}{5}(\cos 2x$$

$$+ 2\sin 2x) \quad (7) \quad y = \frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x) \quad (8) \quad y = \frac{-1}{40}(3\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(9) \quad y = -\frac{1}{3}\sin 2x \quad (10) \quad y = -\frac{1}{29}(2\cos 2x + 5\sin 2x)$$

$$\text{問15} \quad (1) \quad y = \frac{1}{9}\sin(2x+1) \quad (2) \quad y = \frac{1}{6}x\sin(3x-5)$$

$$\text{問16} \quad (1) \quad y = e^x \sin x \quad (2) \quad y = \frac{1}{170}e^{2x}(11\sin x - 7\cos x) \quad (3) \quad y = \frac{1}{10}e^{4x}$$

$$\times (\sin x - \cos x) \quad (4) \quad y = -\frac{1}{5}e^x \cos x \quad (5) \quad y = \frac{1}{25}e^x(4\cos x - 3\sin x)$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) \quad (7) \quad y = \frac{1}{20}e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) \quad (8) \quad y =$$

$$\frac{1}{4}xe^x \sin 2x \quad (9) \quad y = -\frac{1}{2}e^{2x}\{\cos(x+1) + \sin(x+1)\} \quad (10) \quad y = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\times \{\cos(x+1) - \sin(x+1)\}$$

$$\text{問17} \quad (1) \quad y = -\frac{1}{24}x^3 \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x \quad (2) \quad y = \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) \quad (3) \quad y =$$

$$-\frac{1}{5}e^x(\cos x + 2\sin x) - \frac{1}{425}(13\cos 4x + 16\sin 4x) \quad (4) \quad y = \frac{1}{9}e^{-x}(3x\cos x +$$

$$2\sin x) \quad (5) \quad y = -\frac{1}{2}xe^{2x} - 3e^x + \frac{1}{85}(6\cos x + 7\sin x)$$

$$\text{問18} \quad (1) \quad y = (c_1 + c_2x)e^x + x + 2 \quad (2) \quad y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} \quad (3) \quad y = (c_1 +$$

$$c_2x)e^x + \frac{1}{4}e^{-x} \quad (4) \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{25}e^{2x}(5x - 4) \quad (5) \quad y = (c_1 + c_2x)e^x$$

$$+ \frac{1}{12}x^3(x+2)e^x \quad (6) \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{20}(3\sin 2x - \cos 2x) \quad (7) \quad y = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\times \left(c_1\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \cos x \quad (8) \quad y = c_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(c_2\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$$+x^2+x \quad (9) \quad y=c_1+(c_2+c_3x)e^x+\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x) \quad (10) \quad y=c_1e^x+c_2e^{-x}+$$

$$c_3\cos x+c_4\sin x-\frac{1}{5}e^x\cos x$$

第3章問題

$$1. (1) \quad y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27} \quad (2) \quad y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+c_3e^x+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}$$

$$(3) \quad y=c_1e^{-3x}+c_2e^{4x}+\frac{1}{7}xe^{4x} \quad (4) \quad y=c_1+(c_2+c_3x)e^{-2x}-\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$$

$$2. (1) \quad y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\frac{x}{12}+\frac{1}{9} \quad (2) \quad y=c_1e^{-2x}+c_2e^x-x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$$

$$(3) \quad y=c_1e^x+c_2e^{-x}+(c_3+c_4x)e^{2x}+\frac{1}{6}x^2e^{2x} \quad (4) \quad y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{4}(x+1)e^x$$

$$(5) \quad y=(c_1+c_2x)e^x+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)e^{3x} \quad (6) \quad y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$$

$$(7) \quad y=(c_1+c_2x)e^{2x}-\frac{1}{289}e^{3x}(8\cos 4x+15\sin 4x) \quad (8) \quad y=c_1e^x+c_2e^{-x}+$$

$$\frac{1}{2}(xe^x-\cos x) \quad (9) \quad y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{9}\right)e^{2x}+\frac{1}{2}xe^x \quad (10) \quad y=(c_1+$$

$$c_2x)e^{2x}+4e^{3x}-\frac{2}{25}(4\cos x+3\sin x)$$

$$3. (1) \quad y=c_1x^2+c_2x^{-2} \quad (2) \quad y=c_1x^2+c_2x^3 \quad (3) \quad y=c_1+c_2x^3+c_3x^{-2}$$

$$(4) \quad y=c_1x^{-3}+c_2x^2-\frac{1}{16}x(4\log x+3) \quad (5) \quad y=c_1\cos(\log x)+c_2\sin(\log x)+\log x$$

$$(6) \quad y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\frac{1}{2}x^3\log x$$

$$4. (1) \quad x=\sqrt{\frac{m}{K}}v_0\sin\sqrt{\frac{K}{m}}t \quad (2) \quad i=2\cos kt-\frac{2}{k}\sin kt \quad (3) \quad x=\frac{h}{k}e^{-at}\sin kt$$

$$(4) \quad i=\cos\omega t+\sin\omega t+\frac{1}{2\omega}Kt\sin\omega t$$

第4章

$$\text{問1} \quad (1) \quad y=cx \quad (c \text{ は任意定数}) \quad (2) \quad y=-\frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}-\dots\dots\dots\right)=$$

$$-\frac{1}{x+c} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad (3) \quad y=c+(c+1)x+\frac{1}{2}(c+2)x^2+\frac{1}{3!}(c+2)x^3+\dots$$

$$\cdots = -2 - x + (c+2)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right) = -2 - x + (c+2)e^x \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$(4) \quad y = x + c\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots\right) = x + c\sqrt{1+x^2} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad (5) \quad y =$$

$$x(c_1 + c_2 x) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \quad (6) \quad \text{ルジャンドル } y = c_1 x + c_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots) = c_0(1 - x \tanh^{-1} x) + c_1 x \quad (c_0, c_1 \text{ は任意定数})$$

問2 (1) $\lambda^2 - 1 = 0$ (2) $y = x - 1$ (3) $3 \frac{d\phi}{dx} + (x-1) \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$ を導いて,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{c_1}{(x-1)^3}, \text{ 従って } \phi(x) = -\frac{c_1}{2(x-1)^2} + c_2. \text{ 故に, 求める一般解は, } y = c_1(x-1) + \frac{c_2}{x-1} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数. ここで, } c_1, c_2 \text{ はとりなしている. 一方, この方程式は } x-1=e^t \text{ とおけば簡単になる.})$$

$$\begin{aligned} \text{問3 (1)} \quad F\left(a, -a, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4a^2}\right) &= 1 - \frac{a^2}{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{4a^2} + \frac{a(a+1)(-a)(-a+1)}{2! \frac{3}{2} \frac{5}{2}} \left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^2 \\ &+ \cdots + \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)(-a)(-a+1) \cdots (-a+n-1)}{n! \frac{3}{2} \frac{5}{2} \cdots \frac{2n+1}{2}} \left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{a^2}\right) x^{2n+1} \right. \\ &\left. + \cdots \right\} \longrightarrow \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\} = \frac{\sin x}{x} \quad (a \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$(2) \quad F(a, -n, c; x) = 1 - \frac{an}{c} x + \frac{a(a+1)n(n-1)}{2! c(c+1)} x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1)} x^n$$

$$(3) \quad F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots = \frac{1}{2x} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \right\} = \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x}$$

問4 略

$$\text{問5} \quad y = x^n J_n, \quad y' = nx^{n-1} J_n + x^n J'_n, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2} J_n + 2nx^{n-1} J'_n + x^n J''_n$$

$$\text{だから } xy'' + (1-2n)y' + xy = x^{n-1} \{x^2 J''_n + x J'_n + (x^2 - n^2) J_n\} = 0 \quad \text{問6 略}$$

問7 (1) $y = \frac{1}{1-x}$ (2) $y = e^{2x}$ (3) $y = 2e^{\frac{x^2}{2}}$ (4) $y = -x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{15}x^5 - \dots$ (5) $y = x^2$ (6) $y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots$

問8 (1) $\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}$ (2) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} \right)$

問9 (1) $y = e^x - 1$ (2) $-1 + x + e^{-x}$

問10 (1) $y = e^{4x} + 2e^{-3x} - 1$ (2) $y = -e^{-2x} + 2e^x - 4xe^x$ (3) $y = xe^x + e^{2x}$
 (4) $y = \cos 2x + \frac{1}{8}(\sin 2x - 2x \cos 2x)$ (5) $y = \frac{3}{8} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$

第4章問題

1. 略 2. (1) $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ とおくとベッセルの微分方程式が得られるが,
 $xy = z$ とおく方が簡単. $xy = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (c_1, c_2 は任意定数)
 (2) $x = \log t$ とおくと, ベッセル 3. 略 4. 略

第5章

- 問1 (1) $x = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}$, $y = -c_1 e^{3t} - c_2 e^{4t}$ (c_1, c_2 は任意定数)
 (2) $x = c_1 e^t$, $y = c_2 e^t$, $z = c_3 e^t$ (c_1, c_2, c_3 は任意定数), または $\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}$ (3) $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y = c_3 e^t + c_4 e^{-t}$, $z = c_5 e^t + c_6 e^{-t}$ ($c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ は任意定数) (4) $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = c_3 \cos t + c_4 \sin t$, $z = c_5 \cos t + c_6 \sin t$ ($c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ は任意定数)

問2 (1) $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$ (2) $x + y + z, x^2 + y^2 + z^2$

- 問3 (1) $z = \phi(2y - x^2)$ (ϕ は任意関数) (2) $z = \phi\left(\log x + \frac{1}{y}\right)$ (ϕ は任意関数)

問4 (1) $\phi(xy, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ (ϕ は任意関数) (2) $\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ (ϕ は任意関数)

問5 (1) $xyz = c$ (2) $\frac{x^2}{2} - \frac{y}{z^2} = c$ (c は任意定数)

第5章問題

1. $x=1-2e^{2t}$, $y=3e^{2t}+c$ となるが, 第1式へ代入して $c=-1$ 2. (1) $z=\frac{1}{6}x^2y^3+\varphi(x)+\psi(y)$ (φ, ψ は任意関数) (2) $z=\varphi(y)e^{-2x}+\psi(y)e^{3x}$ (φ, ψ は任意の関数) 3. $f(x)g'(y)=f''(x)g(y)$ から $\frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{g'(y)}{g(y)}=\text{定数}$ を導いて $f(x), g(y)$ を求める.

索引

(あ 行)

一般解	2
1 次結合	43
1 次独立	44
1 次従属	44
n 階微分方程式	2
円柱関数	82
オイラーの公式	12
オイラー形微分方程式	72

(か 行)

解曲線	5
拡散方程式	101
完全形 1 階微分方程式	26
ガウスの微分方程式	78
ガンマ関数	83
逆変換	86
逆演算子	58
求積法	17
クレロー形 1 階微分方程式	29
決定方程式	76
コーシー形線形微分方程式	72
コーシー・リーマンの方程式	100

(さ 行)

常微分方程式	1
初期条件	3
初期値問題	3
指数	76
準線形偏微分方程式	94
全微分	10
線形微分方程式	22
線形性	38
線形演算子	39

(1 階同次) 線形偏微分方程式	92
積分因数	28
(連立微分方程式の) 積分	92
正規型の全微分方程式	95
正則関数	101
存在定理	3

(た 行)

調和関数	100
超幾何関数	79
置換積分法	8
同次形 1 階微分方程式	20
同次形線形微分方程式	34
特殊解 (特別解)	3
特異解	3
特性多項式	38

(な 行)

熱伝導方程式	101
--------	-----

(は 行)

波動方程式	99
微分方程式	1
微分演算子	37
ピカールの逐次近似法	84
ファンデルモンドの行列式	47
部分積分法	8
偏微分	9
偏微分方程式	90
べき級数	10
変数分離形 1 階微分方程式	17
ベルヌイ形 1 階微分方程式	24
ベッセルの微分方程式	82
ベッセル関数	82
補助方程式	92

包絡線..... 5

(や 行)

ヤコビアン.....47

山辺の方法..... 63

(ら 行)

ラプラス変換.....86

ラプラスの演算子.....100

ラプラスの方程式.....100

ラグランジュ形微分方程式..... 30

ラグランジュ形偏微分方程式..... 94

リッカチ形1階微分方程式..... 33

リプシッツの条件..... 83

ルジャンドルの微分方程式..... 80

ルジャンドルの多項式..... 81

連立微分方程式..... 91

ロンスキアン..... 46

人 名 表

オイラー	Leonhard Euler (1707-1783)
ガウス	Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
クレーロー	Alexis Claude Clairaut (1713-1765)
コーシー	Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
リーマン	Georg Friedrich Riemann (1826-1866)
ピカール	Charles Emile Picard (1856-1941)
ファンデルモンド	Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796)
ベルヌイ	Johann Bernoulli (1667-1748)
ベッセル	Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)
山辺	山辺英彦 (1923-1960)
ライプニッツ	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
ラプラス	Pierre Simon Laplace (1749-1827)
ラグランジュ	Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
リッカチ	Jacopo Francesco Riccati (1676-1754)
リプシッツ	Rudolf Lipschitz (1832-1903)
ルジャンドル	Adrien Marie Legendre (1752-1833)
ロンスキ	Höené Joseph Maria Wronski (1778-1853)
ヤコビ	Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

著者略歴

飯尾 力 (いいお つとむ)

1962年 山梨大学学芸学部数学科卒業
東京都立大学大学院

現在 関東学院大学工学部教授

著書 『新数学概論』学書房 1980年(共著)
『理工基礎微分積分学』理学書院 1989年(共著)

堀田 和久 (ほった かずひさ)

1969年 早稲田大学理工学部数学科卒業
東京都立大学大学院

現在 関東学院大学工学部助教授

著書 『数理統計学』開成出版 1982年(共著)

微分方程式

昭和60年3月20日	第1版発行	(本体1,650円)
昭和62年3月16日	第2版発行	
平成元年3月16日	第3版発行	
平成4年3月16日	第4版発行	
平成6年3月16日	第5版発行	著者 飯尾 力
平成7年3月16日	第6版発行	堀田 和久
平成9年4月10日	第7版発行	発行人 吉井 克明

検印
省略

発行所 吉井書店

〒102 東京都千代田区飯田橋3-7-11
電話 東京 3261-5077/振替 00160-0-56049

発売元 産業図書

〒102 東京都千代田区飯田橋2-11-3
電話 東京 3261-7821(代)/振替 00120-7-27724

ISBN4-946439-15-3 C1041