電気基礎数学　演習問題　＃1

［1］次の角度を，360分法は弧度法に，弧度法は360分法に変換せよ．

(1)　$-154°$

$$\theta = \frac{2\pi}{360} \times (-154°)$$
$$= -\frac{77}{90}\pi$$

(2)　$4\pi/5$

$$\theta = \frac{360°}{2\pi} \times \frac{4}{5}\pi = 144°$$

［2］次の計算をせよ．

(1)　$\cos(5\pi/12) = \cos\left(\frac{2}{12}\pi + \frac{3}{12}\pi\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\sin(\pi/8) = \sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

［3］$\sin\theta = 4/5$ のとき，$\sin2\theta$，$\cos2\theta$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とする．

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{より}$$
$$\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$
$$\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

［4］$y = \sqrt{2}\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta$ を合成せよ．

$$y = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{より}\ \theta = -\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\ y = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

［5］$0 \leqq \theta \leqq (\pi/2) \leqq \phi \leqq \pi$ で，$\sin\theta = 1/3$，$\cos\phi = -2/3$ のとき，$\sin(\theta+\phi)$ を求めよ．

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$= \frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\sin\phi = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

［6］$\cos\theta - \cos3\theta$ を積の形に変換せよ．

$$\cos\theta - \cos3\theta = -2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\sin\frac{\theta-3\theta}{2}$$
$$= -2\sin2\theta\sin(-\theta)$$
$$= 2\sin2\theta\sin\theta$$

［7］$\sin\theta - \sin(\theta-\pi/3) - \cos(\theta+2\pi/3)$ を $A\sin(B+C)$ の形にせよ．

$$\sin\theta - \left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi + \sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos\theta$$
$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}+3+3+2\sqrt{3}+1}{4}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

電気基礎数学　演習問題　＃2

１．次の値を弧度法を用いて表せ。

(1) $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) = x$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$

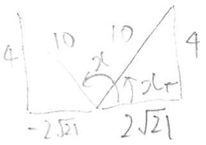
(2) $\mathrm{Cos}^{-1}(1/\sqrt{2}) = x$

$\mathrm{Cos}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

２．次の計算をせよ。

(1) $\cos\{\sin^{-1}(0.4)\}$



図より $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}, -\frac{\sqrt{21}}{5}$

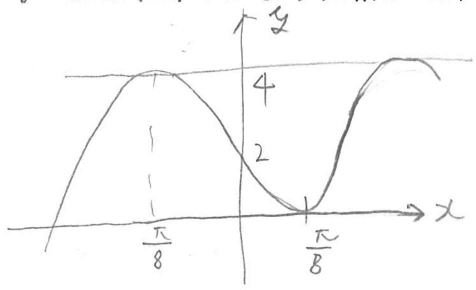
(2) $\cos[\cos^{-1}\{\cos(\pi/3)\}]$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

３．$y = 2\sin(4x) + 2$ より位相が $\pi/4$ だけ進んでいる波形を図示せよ。



$y = 2\sin 4x + 2$

$y = 2\sin 4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

周期：$2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

振幅：± 2

x軸方向に：$-\frac{\pi}{4}$（$\frac{\pi}{4}$左にずらす）

y軸方向に：$+2$（2上ずらす）

４．$\cos\{\pi - \cos^{-1}(1/2)\}$ を求めよ。

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ より

$\cos\left\{\pi - \frac{\pi}{3}\right\} = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

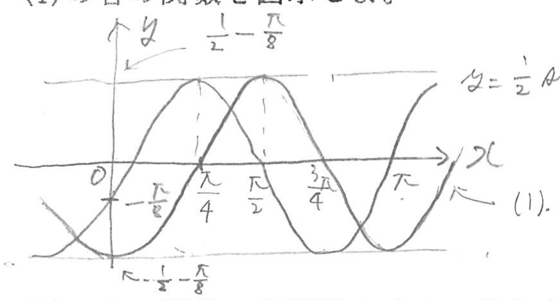
５．次の各問に答えよ。

(1) $y = \frac{1}{2}\sin(x/2) - \pi/8$ より位相が $\pi/2$ だけ遅れている波形の式を求めよ。

$y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{8}$

周期：$2\pi \times 2 = 4\pi$，振幅：$\pm\frac{1}{2}$　$\rightarrow \frac{\pi}{2}$　$\downarrow \frac{\pi}{8}$

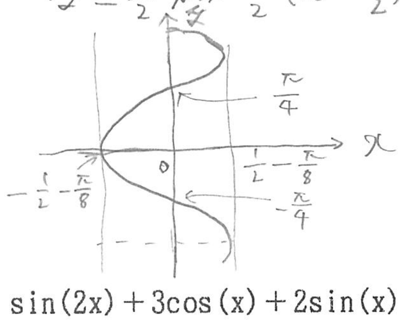
(2) (1)の答の関数を図示せよ。



(3) (1)の答の関数の逆関数を求め、それを図示せよ。

$y = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\left(y + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}$　$\therefore \sin^{-1} 4\left(y + \frac{\pi}{8}\right) = x - \frac{\pi}{2}$，

$\therefore y = \sin^{-1} 4\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{2}$



６．$\sin(2x) + 3\cos(x) + 2\sin(x) + 3 = 0$ を解け。但し、$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より

$2\sin x\cos x + 3\cos x + 2\sin x + 3 = 0$

$2\sin x(\cos x + 1) + 3(\cos x + 1) = 0$

$(2\sin x + 3)(\cos x + 1) = 0$

$\therefore \sin x = -\frac{3}{2},\ \cos x = -1$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1,\ -1 \leqq \cos x \leqq 1$ より

$\cos x = -1$

$\therefore x = \pi$

電気基礎数学　演習問題　＃3

複素数の表示法を変換せよ。但し、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

	直交座標表示	三角関数表示	指数関数表示	ベクトル表示
(1)	$1 + j(\sqrt{3}/3)$ $= \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} + j1)$ $= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\angle\frac{\pi}{6}$
(2)	$\frac{5}{2}(-\sqrt{3} + j)$	$5\{\cos(5\pi/6) + j\sin(5\pi/6)\}$ $= 5\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ $= 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$	$5e^{j\frac{5}{6}\pi}$	$5\angle\frac{5}{6}\pi$
(3)	$\frac{3}{2}(1 + j\sqrt{3})$	$3\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $= 3\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$3e^{j\pi/3}$	$3\angle\frac{\pi}{3}$
(4)	$-j6$ $= 0 - j6$ $= 6(0 - j)$	$6\left(\cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi\right)$	$6e^{j\frac{3}{2}\pi}$	$6\angle\frac{3}{2}\pi$
(5)	$3 - j\sqrt{3}$ $= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)$	$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + j\sin\frac{11}{6}\pi\right)$	$2\sqrt{3}e^{j\frac{11}{6}\pi}$	$2\sqrt{3}\angle\frac{11}{6}\pi$
(6)	$2\sqrt{2}(1 + j)$	$4\{\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)\}$ $= 4\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$4e^{j\frac{\pi}{4}}$	$4\angle\frac{\pi}{4}$
(7)	j	$\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$	$e^{j\pi/2}$	$\angle\frac{\pi}{2}$
(8)	-2 $= -2 + j0$ $= 2(-1 + j0)$	$2(\cos\pi + j\sin\pi)$	$2e^{j\pi}$	$2\angle\pi$

電気基礎数学　演習問題　＃4

演算結果を直交座標表示で表示せよ。但し、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$4\{\cos(5\pi/6) + j\sin(5\pi/6)\} + 2e^{j\pi/3}$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= (-2\sqrt{3} + 1) + j(2 + \sqrt{3})$

(2)　$(-3 + j\sqrt{3}) \times 3\{\cos(\pi/6) + j\sin(\pi/6)\}$

$\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5}{6}\pi$

$= 2\sqrt{3}e^{j\frac{5}{6}\pi} \times 3e^{j\frac{\pi}{6}}$

$= 6\sqrt{3}e^{j\pi}$

$= 6\sqrt{3}(\cos\pi + j\sin\pi)$

$= -6\sqrt{3}$

(3)　$(2\sqrt{3} + j2)^4$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$= \left(4e^{j\frac{\pi}{6}}\right)^4$

$= 4^4 e^{j\frac{4}{6}\pi}$

$= 256e^{j\frac{2}{3}\pi} = 256\left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -128 + j128\sqrt{3}$

(4)　1の3乗根（$=1^{1/3}$）をすべて求めよ。

$Z = e^{j0}$ より

$Z^{\frac{1}{3}} = (e^{j0})^{\frac{1}{3}} = e^{j\frac{2}{3}k\pi}$

$$\therefore Z^{\frac{1}{3}} \left.\begin{aligned} &= e^{j0} = 1 \\ &= e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= e^{j\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \text{(答)}$$

(5)　$(-5 + j5) - 5e^{j3\pi/4}$

$= -5 + j5 - 5\left(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$= -5 + j5 - 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{-10 + 5\sqrt{2}}{2} + j\frac{10 - 5\sqrt{2}}{2}$

(6)　$(-2\sqrt{3} - j2) \div (-1 - j)$

$= \frac{2\sqrt{3} + j2}{1 + j}$

$= \frac{(2\sqrt{3} + j2)(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)}$

$= \frac{2\{\sqrt{3} + j(1 - \sqrt{3}) + 1\}}{2} = (1 + \sqrt{3}) + j(1 - \sqrt{3})$

(7)　$(5 - j5) \div 3e^{j5\pi/3} - \{\cos(\pi/8) + j\sin(\pi/8)\}^6$

$= 5\sqrt{2}e^{j\frac{7}{4}\pi} \div 3e^{j\frac{5}{3}\pi} - \left(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$= \frac{5}{3}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{12}} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{5\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + j\sin\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + j\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5 + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} + j\frac{5 - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}$

(8)　$(1 - j)^{2/3}$

$= \left(\sqrt{2}e^{j\frac{7}{4}\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}e^{j\frac{7}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi}$

$$\left.\begin{aligned} &= \sqrt[3]{2}e^{j\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \sqrt[3]{2}e^{j\frac{11}{6}\pi} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \sqrt[3]{2}e^{j\frac{15}{6}\pi} = \quad j\sqrt[3]{2} \end{aligned}\right\} \text{(答)}$$

$-\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

$\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

$-j\sqrt[3]{2}$

電気基礎数学　演習問題　＃５

１．つぎの関数を微分し、導関数を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

(1)　$f(x)=(2x+1)(x^3-1)$

$$f'(x)=2(x^3-1)+(2x+1)\cdot 3x^2$$
$$=2x^3-2+6x^3+3x^2$$
$$=\underline{8x^3+3x^2-2}$$

(2)　$f(x)=(x+3)/(x-1)$

$$f'(x)=\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}$$
$$=\underline{-\frac{4}{(x-1)^2}}$$

(3)　$f(x)=\sin^3(3x)$

$$f'(x)=(3x)'(\sin^3 3x)'$$
$$=3\cdot 3\sin^2 3x\cos 3x$$
$$=9\sin^2 3x\cos 3x$$
$$=\frac{9}{2}\sin 3x\sin 6x$$
$$=\underline{\frac{9}{4}(\cos 3x-\cos 9x)}$$

(4)　$f(x)=(x+3)\cdot\log(x+3)-(x+3)$

$$f'(x)=\log(x+3)+(x+3)\cdot\frac{1}{(x+3)}-1$$
$$=\underline{\log(x+3)}$$

２．次の関数をx及びyについてそれぞれ偏微分せよ。

$z=5x^4y+10x^2y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\underline{20x^3y+20xy^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{5x^4+30x^2y^2}$$

３．つぎの関数を微分し、(1)は導関数を、(2)は2次導関数を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

(1)　$f(x)=5\cos(2x)\sin(3x)$

$$f'(x)=5\cdot 2(-\sin 2x)\sin 3x+5\cos 2x\cdot 3\cos 3x$$
$$=-10\sin 2x\sin 3x+15\cos 2x\cos 3x$$
$$=-10\left\{\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)\right\}+15\left\{\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x)\right\}$$
$$=\underline{\frac{5}{2}(\cos x+5\cos 5x)}$$

(2)　$f(x)=xe^x+e^{-3x}$

$$f'(x)=e^x+xe^x-3e^{-3x}=\underline{e^x(x+1)-3e^{-3x}}$$
$$f''(x)=e^x(x+1)+e^x+9e^{-3x}$$
$$=\underline{e^x(x+2)+9e^{-3x}}$$

４．次の関数を(1)はxについて、(2)はyについてそれぞれ偏微分せよ。

(1)　$z=\log_{3y}2x=\frac{\log_e 2x}{\log_e 3y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\log_e 3y}\cdot\frac{2}{2x}=\underline{\frac{1}{x\log_e 3y}}$$

(2)　$z=x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{x^y\log_e x}$$

電気基礎数学　演習問題　＃6

１．次の不定積分を行え。但し、積分係数は省略してよい。

(1)　$\int (4x^2+3x+2)\,dx$

$= 4\cdot\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}+2x$

$= \frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$

(2)　$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと　$x^2+1=t^2$　$x\,dx=t\,dt$

$\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

(3)　$\int (2e^{-x}+xe^{x})\,dx$

$=-2e^{-x}+xe^{x}-\int e^{x}dx$

$=-2e^{-x}+e^{x}(x-1)$

(4)　$\int (\log_a x)^2 dx$　$=\int\left(\frac{\log_e x}{\log_e a}\right)^2=\frac{1}{(\log_e a)^2}\int(\log_e x)^2 dx$

$=\frac{1}{(\log_e a)^2}\left\{x(\log_e x)^2-\int x\cdot 2\log_e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$

$=\frac{1}{(\log_e a)^2}\left\{x(\log_e x)^2-2(x\log x-x)\right\}$

$=\frac{x}{(\log_e a)^2}\left\{(\log_e x)^2-2(\log x-1)\right\}$

(5)　$\int \sin(ax)\,dx$

$=-\frac{1}{a}\cos ax$

(6)　$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(-a\leqq x\leqq a)$　ﾋﾝﾄ：$x=a\cdot\sin(t)$

$x=a\sin t$ とおくと　$dx=a\cos t\cdot dt$

$\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt$

$=\int a^2\cos^2 t\,dt$

$=a^2\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)$

２．次の定積分を行え。

(1)　$\int_0^1(-3x+1)^3dx$

$=\left[-\frac{1}{12}(-3x+1)^4\right]_0^1$

$=-\frac{1}{12}\left\{(-2)^4-1\right\}$

$=-\frac{15}{12}=-\frac{5}{4}$

(2)　$I=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin(x)\,dx$

$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x}\cos x)\,dx$

$=\left[-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi}-I$

$\therefore I=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

(3)　$I=\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cos^2(x)\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　$-dx\sin x=dt$

$\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1\to 0\end{array}$

$I=\int_1^0-t^2\,dt$

$=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

(4)　$I=\int_1^e(1/x)\log(x)\,dx$

$\log x=t$ とおくと　$dx\cdot\frac{1}{x}=dt$

$\begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$

$I=\int_0^1 t\cdot dt=\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

３．次の２重積分を行え。

(1)　$\int_0^1\int_0^1(x^3+y)\,dxdy$

$=\int_0^1 dy\int_0^1(x^3+y)\,dx$

$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+xy\right]_0^1 dy$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y\right)dy$

$=\left[\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$

$=\frac{3}{4}$

(2)　$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(y)\,dxdy$

$=\int_0^{\pi}\cos y\cdot dy\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\int_0^{\pi}\cos y\left[-\cos x\right]_0^{\pi}dy$

$=\int_0^{\pi}2\cos y\cdot dy$

$=2\left[\sin y\right]_0^{\pi}$

$=0$

電気基礎数学　演習問題　＃７

１．次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$3x^2(1+y^2)y'=1$

$$3x^2(1+y^2)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\int\frac{dx}{3x^2}=\int(1+y^2)dy$$

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{x}=y+\frac{y^3}{3}+c$$

$$y^3+3y+\frac{1}{x}=c$$

(2)　$x-3y=(3x+2y)y'$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-3y}{3x+2y}=\frac{1-\frac{3y}{x}}{3+\frac{2y}{x}}$$

$y=ux$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=u+\dfrac{du}{dx}x$

$$\therefore u+\frac{du}{dx}x=\frac{1-3u}{3+2u}\qquad\therefore x\frac{du}{dx}=\frac{1-6u-2u^2}{3+2u}$$

$$\int\frac{3+2u}{2u^2+6u-1}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log|2u^2+6u-1|=-\log|x|+C$$

$$|2u^2+6u-1|=|x|^{-2}e^{2C}$$

$$2u^2+6u-1=Kx^{-2}$$

$$2y^2+6xy-x^2=K$$

(3)　$x^2y'+2xy-x+1=0$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2}$$

積分因数 $e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\log|x|}=x^2$

$$\therefore y\cdot x^2=\int x^2\times\frac{x-1}{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-x+c$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}$$

(4)　$y'+y\cdot\cos(x)/\sin(x)=\sin(2x)$

$$\frac{dy}{dx}+y\frac{\cos x}{\sin x}=\sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sin 2x$$

積分因子 $e^{\int\cot x\,dx}=e^{\log|\sin x|}=\sin x$

よって $y\sin x=\int\sin x\cdot 2\sin x\cos x\,dx$

$$y=\frac{2}{3}\sin^2 x+\frac{c}{\sin x}$$

２．　$y'+2xy+x=\exp(-x^2)$　の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx}+2xy+x=e^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}-x$$

積分因数 $e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$

$$\therefore ye^{x^2}=\int e^{x^2}(e^{-x^2}-x)dx=x-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

$$\therefore y=xe^{-x^2}-\frac{1}{2}+ce^{-x^2}=(x+c)e^{-x^2}-\frac{1}{2}$$

３．　$y'(2x+y)+2x-5y=0$　を解け。（ヒント：$y=ux$　とおけ）

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-5y}{2x+y}=-\frac{2-5\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}}$$

$y=ux$ より　$\dfrac{dy}{dx}=u+\dfrac{du}{dx}x$

$$\therefore u+\frac{du}{dx}x=-\frac{2-5u}{2+u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{-2+3u-u^2}{2+u}$$

$$\int\frac{2+u}{-2+3u-u^2}du=\int\frac{du}{x}$$

$$\int$$

４．容量Cのコンデンサーが電圧$e(t)=E_0\cancel{\sin(\omega t)}$を供給する電源により、抵抗Rを通して充電されているとき、そのコンデンサーの瞬間的な電荷Qは微分方程式

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E_0\cancel{\sin(\omega t)}$$

を満足する。コンデンサーに最初充電していなかったとして、Qをtの関数として求めよ。

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E_0\Rightarrow\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{RC}=\frac{E_0}{R}$$

積分因子 $e^{\int\frac{1}{RC}dt}=e^{\frac{t}{RC}}$

$$\therefore Qe^{\frac{t}{RC}}=\int e^{\frac{t}{RC}}\cdot\frac{E_0}{R}dt+K$$

$$Qe^{\frac{t}{RC}}=\frac{E_0}{R}RC\times e^{\frac{t}{RC}}+K$$

$$Q=CE_0+Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$t=0$ のとき $Q=0$

$$0=CE_0+K\Rightarrow K=-CE_0$$

$$Q=CE_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{R}\left(E_0-\frac{Q}{C}\right)$$