

目 次

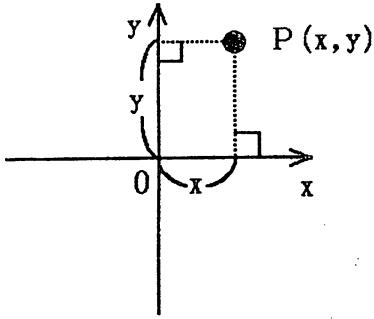
第 1 章	三角関数	1
第 2 章	複素数	17
第 3 章	微分	27
第 4 章	積分	35
第 5 章	常微分方程式	43

第1章 三角関数

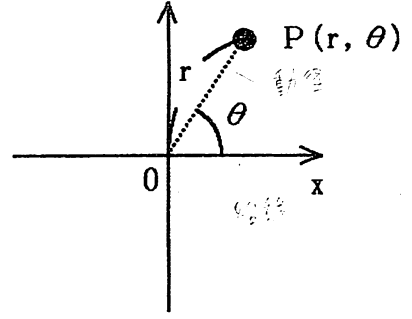
[1] 座標と三角関数の定義

x-y平面上の点Pの表現の方法は2通りある。

(1) 直交座標



(2) 極座標



直交するx軸,y軸との距離（負の距離も含む）で表現

原点からの距離 r と始線からの傾き θ で表現

(3) 直交座標と極座標との関係

三角関数を次のように定義する。

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

この関係より

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cdot \cos \theta \quad y = r \cdot \sin \theta$$

という関係があることが分かる。

また、 $\tan \theta$ も定義する。

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

電気を含む物理系では直交座標とともに極座標をよく使用する

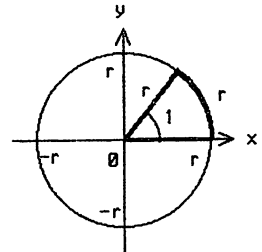
[2] 角度の表記法

(1) 60分法

1周 = 360° と定める。

(2) 弧度法

☆ 半径 r 、弧の長さ r のおうぎ形の中心角を $1[\text{rad}]$ と定義する。



→ 円周 = $2\pi r$ ゆえ、1周を $x[\text{rad}]$ とすると、

$$1 : r = x : 2\pi r \quad \therefore x = 2\pi [\text{rad}]$$

$$\underline{\underline{360^\circ = 2\pi [\text{rad}]}}$$

(3) 60分法 \Leftrightarrow 弧度法 の変換

同じ角度に対して、 x° 、 $y[\text{rad}]$ の変換は、

$$y = \frac{2\pi}{360} x [\text{rad}] \quad x = \frac{360}{2\pi} y [^\circ]$$

(例) ① 55° は $y = \frac{2\pi}{360} 55 = \frac{11}{72} \pi [\text{rad}]$

② $\frac{2}{7} \pi [\text{rad}]$ は $x = \frac{360}{2\pi} \cdot \frac{2}{7} \pi = \frac{360}{7} [^\circ]$

電気・電子の世界では、弧度法を使用することが多い(微分・積分との関係で)

[3] 三角関数の基本定理 (高校の数学で既習済み → 復習をすべし)

(1) 三角関数の定義

① $\sin \theta$ ② $\cos \theta$ ③ $\tan \theta$ の定義は前出

$$\textcircled{4} \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \textcircled{5} \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \textcircled{6} \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

(2) 基本定理

$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \textcircled{2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (\text{注: } \cos^2 \theta = (\cos \theta)^2)$$

$$\textcircled{3} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \quad \textcircled{4} 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

(3) 加法定理 (複号同順)

$$\textcircled{1} \cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi \quad \textcircled{2} \sin(\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi \quad \textcircled{3} \tan(\theta \pm \phi) = \frac{\tan \theta \pm \tan \phi}{1 \mp \tan \theta \tan \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad \cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi/3 - \pi/4) \\ &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) \\ &= (1/2) \cdot (\sqrt{2}/2) + (\sqrt{3}/2) \cdot (\sqrt{2}/2) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4 \end{aligned}$$

(4) 倍角の公式

$$\textcircled{1} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\textcircled{2} \sin 2\theta = 2\sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\textcircled{3} \tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

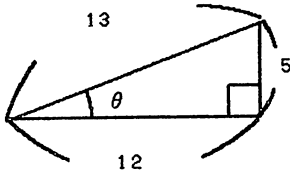
(導出) 加法定理で $\theta = \phi$ とすれば、容易に導ける。

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2\sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \\ &= 2\cos^2 \theta - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2\cos^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

他も同様に導くことができる。

(例) $\sin \theta = 5/13$ のとき、 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \pi/2$

$\sin \theta = 5/13$ となる第1象限の角度関係は図のようになる。
これより、 $\cos \theta = 12/13$ となる。よって、



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta = 2 \cdot (5/13) \cdot (12/13) = 120/169$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \cdot (5/13)^2 = 119/169$$

(5) 半角の公式

$$\textcircled{1} \cos(\theta/2) = \pm \sqrt{(1+\cos\theta)/2} \quad (\text{または } \cos^2(\theta/2) = (1+\cos\theta)/2)$$

$$\textcircled{2} \sin(\theta/2) = \pm \sqrt{(1-\cos\theta)/2} \quad (\text{または } \sin^2(\theta/2) = (1-\cos\theta)/2)$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta/2) = \pm \sqrt{(1-\cos\theta)/(1+\cos\theta)} \quad (\text{または } \tan^2(\theta/2) = (1-\cos\theta)/(1+\cos\theta))$$

(導出) 倍角の公式で、 $\theta = \alpha/2$ を代入すれば、すぐ得られる。

$$\cos \alpha = \cos \{2 \cdot (\alpha/2)\} = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$$

$$\therefore \cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2 \rightarrow \cos^2(\theta/2) = (1+\cos\theta)/2$$

$\alpha \rightarrow \theta$ に置換

よって、

(i) $-\pi/2 \leq \theta/2 \leq \pi/2$ のとき

(ii) $\pi/2 \leq \theta/2 \leq 3\pi/2$ のとき

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{(1+\cos\theta)/2}$$

$$\cos(\theta/2) = -\sqrt{(1+\cos\theta)/2}$$

他も同様に導ける。

(例) $\cos(\pi/12) = \cos\{(\pi/6)/2\} = \sqrt{\{1+\cos(\pi/6)\}/2}$ $0 < \pi/12 < \pi/2$ ゆえ、
 $\cos(\pi/12) > 0 \rightarrow +$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\{1+(\sqrt{3}/2)\}/2} \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{3})/4} \\ &= \sqrt{(2 \cdot 2 + 2\sqrt{3})/(2 \cdot 4)} \\ &= \sqrt{(1+\sqrt{3})^2/8} \\ &= (1+\sqrt{3})/(2\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{2}+\sqrt{6})/4 \end{aligned}$$

◎二重根号は可能であれば

はずす。この場合は、

加えて 4 乗じて 3

となる組み合わせで、

1 と 3 を選ぶ。

(6) 積→和・差の公式 (積和公式)

$$\textcircled{1} \cos \theta \cos \phi = \{\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)\}/2$$

$$\textcircled{2} \sin \theta \sin \phi = -\{\cos(\theta + \phi) - \cos(\theta - \phi)\}/2$$

$$\textcircled{3} \cos \theta \sin \phi = \{\sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi)\}/2$$

$$\textcircled{4} \sin \theta \cos \phi = \{\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)\}/2$$

(導出) 加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\ + \cos(\theta - \phi) &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

$$\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi) = 2\cos \theta \cos \phi$$

$$\therefore \cos \theta \cos \phi = \{\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)\}/2$$

他も同様に導ける。

(7) 和・差→積の公式 (和積公式)

$$\textcircled{1} \cos \theta + \cos \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\textcircled{2} \cos \theta - \cos \phi = -2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\textcircled{3} \sin \theta + \sin \phi = 2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\textcircled{4} \sin \theta - \sin \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}$$

(導出) 加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2\cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

ここで、

$$\alpha + \beta = \theta \quad \alpha - \beta = \phi$$

と置くと、

$$\alpha = \frac{\theta + \phi}{2} \quad \beta = \frac{\theta - \phi}{2}$$

となるので、

$$\therefore \cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

が容易に導ける。

他も同様に導ける。

(8) 三角関数の合成

同じ周期 θ の正弦波 (sin) と余弦波 (cos) の和は、同じ周期 θ の正弦波 (sin) [または余弦波 (cos)] で表現できる。

$$A \sin \theta + B \cos \theta = R \sin(\theta + \phi) \quad \text{ここで } A, B, R, \phi \text{ は定数}$$

$$[A \sin \theta + B \cos \theta = R \cos(\theta + \phi) \quad \text{ここで } A, B, R, \phi \text{ は定数}]$$

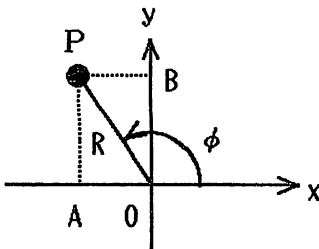
☆ R, ϕ の決定法

$$A \sin \theta + B \cos \theta = R \sin(\theta + \phi)$$

において、加法定理より、

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= R(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi) \\ &= (R \cos \phi) \sin \theta + (R \sin \phi) \cos \theta \\ &= A \times \sin \theta + B \times \cos \theta = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} A = R \cos \phi \\ B = R \sin \phi \end{cases}$$



この式は、左図のような点 P の直交座標表示 $P(A, B)$ と極座標表示 $P(R, \phi)$ の変換式となっている。

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{だから、定数 } \phi \text{ は、}$$

$$\cos \phi = A / \sqrt{A^2 + B^2} \quad \sin \phi = B / \sqrt{A^2 + B^2}$$

を満たす角である。

(注意) 本によっては、 $\tan \phi = B/A$ となっているが、これでは $\tan \phi$ が π の周期関数であるので、 $0 \leq \phi < 2\pi$ の範囲で ϕ が一つに確定できない。

(例)

$$3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = -\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} \sin(\theta + \phi) \\ &= 2\sqrt{3}\sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

ここで、

$$\cos\phi = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\phi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より、 $\phi = 2\pi/3$

$$\therefore \text{与式} = 2\sqrt{3}\sin(\theta + 2\pi/3)$$

【MEMO】

[4] 逆三角関数

$y=\sin(x)$ の逆関数: $y=\sin^{-1}(x)$ あるいは $y=\arcsin(x)$
 $y=\cos(x)$ の逆関数: $y=\cos^{-1}(x)$ あるいは $y=\arccos(x)$
 $y=\tan(x)$ の逆関数: $y=\tan^{-1}(x)$ あるいは $y=\arctan(x)$

逆三角関数の値は一つの x に対して周期的に存在する。

(例) $y=\sin^{-1}(1)$ は $1=\sin(y)$ となる y だから、 $y=\pi/2+2n\pi$
 $y=\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$ は $\sqrt{3}/2=\cos(y)$ となる y だから、 $y=\pm\pi/3+2n\pi$
 $y=\tan^{-1}(1)$ は $1=\tan(y)$ となる y だから、 $y=\pi/4+n\pi$

☆代表的な値を「主値」という。→ y の値が一つに確定する。

$y=\sin^{-1}(x)$ の主値を $y=\text{Sin}^{-1}(x)$ と表記し、
値域を $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$ 定義域を $-1 \leq x \leq +1$ に限定する。
 $y=\cos^{-1}(x)$ の主値を $y=\text{Cos}^{-1}(x)$ と表記し、
値域を $0 \leq y \leq \pi$ 定義域を $-1 \leq x \leq +1$ に限定する。
 $y=\tan^{-1}(x)$ の主値を $y=\text{Tan}^{-1}(x)$ と表記し、
値域を $-\pi/2 < y < +\pi/2$ 定義域を $-\infty \leq x \leq +\infty$ に限定する。

(例) $y=\text{Sin}^{-1}(x)$ で $x=\sqrt{3}/2$ のときは、 $y=\pi/6$

(参考) 逆関数

$y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ と表記する。

(例) $y=x^2$ の逆関数を求める。

(Step 1) y と x を入れ換える。 $x=y^2$

(Step 2) y について解く。 $y=\pm\sqrt{x}$

※逆関数の定義域は元の関数の値域となる。また、逆関数は正確な意味では関数とならないことが多い。

[5] 三角関数のグラフ

一般的に、 $y=a \cdot f(k(x-p))+b$ のグラフは、基本となる $y=f(x)$ のグラフを

- ① y 軸方向に a 倍
- ② y 軸方向に $+b$ 移動

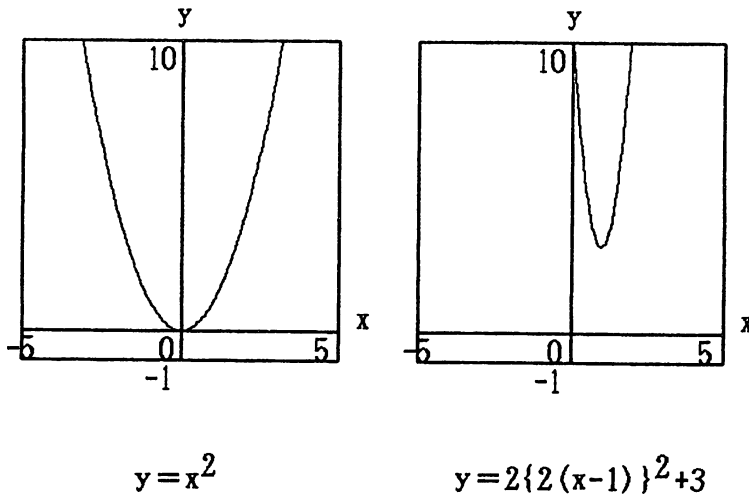
- ③ x軸方向に $1/k$ 倍
- ④ x軸方向に $+p$ 移動

したグラフとなる。

(例) $y=2\{2(x-1)\}^2+3$ のグラフは、 $y=x^2$ のグラフを

- ① y軸方向に 2倍
- ② y軸方向に $+3$ 移動
- ③ x軸方向に $1/2$ 倍
- ④ x軸方向に $+1$ 移動

するので、下図のようになる。



従って、 $y=a\cdot\sin\{k(x-\theta)\}+b$ のグラフは、 $y=\sin(x)$ のグラフを

- ① y軸方向に a 倍
- ② y軸方向に $+b$ 移動
- ③ x軸方向に $1/k$ 倍
- ④ x軸方向に $+\theta$ 移動

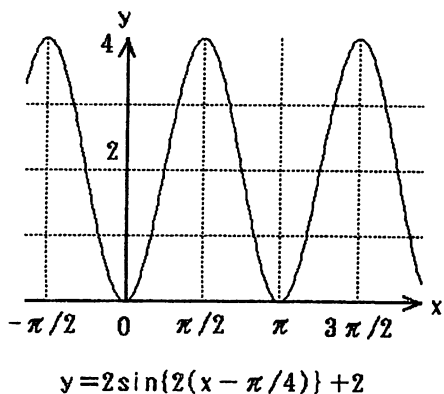
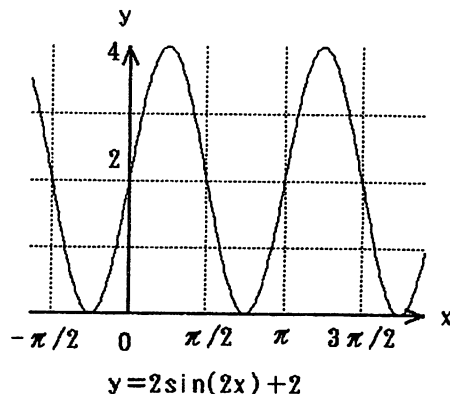
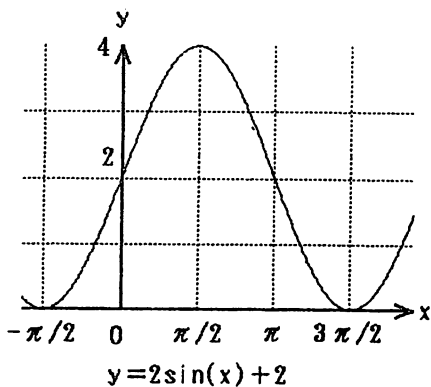
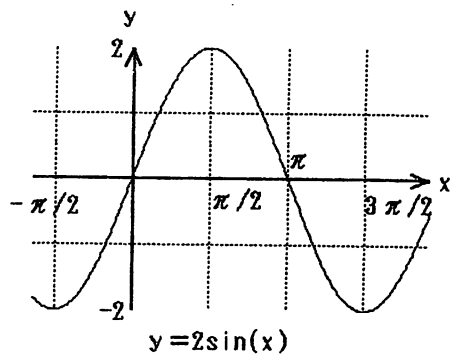
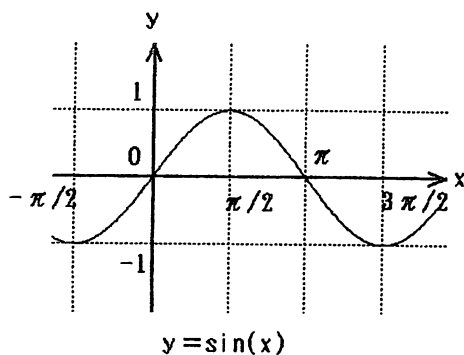
したグラフとなる。

(例) $y=2\sin(2x-\pi/2)+2$ のグラフ

まず、与式を $y=a\cdot\sin\{k(x-\theta)\}+b$ の形にする。

$$y=2\sin(2x-\pi/2)+2=2\sin\{2(x-\pi/4)\}+2$$

このグラフは、 $y=\sin(x)$ を基本形とする。



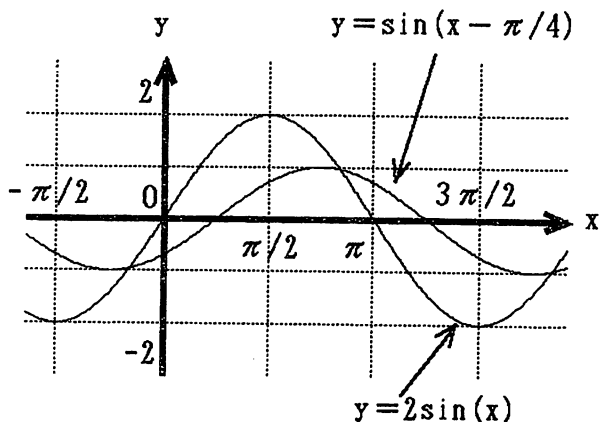
※グラフ作成上のポイント

- ①三角関数では少なくとも1周期以上描く
- ②主なx切片, y切片を記入する。

[6] 位相

2つの三角関数 $y=2\sin(x)$ と $y=\sin(x-\pi/4)$ は、下図に示すように周期は等しく、x軸方向に移動したグラフとなる。(大きさは考慮しない。)

このとき、 $y=2\sin(x)$ は $y=\sin(x-\pi/4)$ と比較して $x=\pi/4$ だけ早くグラフが現れる。このことを、「 $y=2\sin(x)$ は $y=\sin(x-\pi/4)$ より $\pi/4$ だけ位相が進んでいる。」と表現する。逆に、「 $y=\sin(x-\pi/4)$ は $y=2\sin(x)$ より $\pi/4$ だけ位相が遅れている。」と言うこともできる。



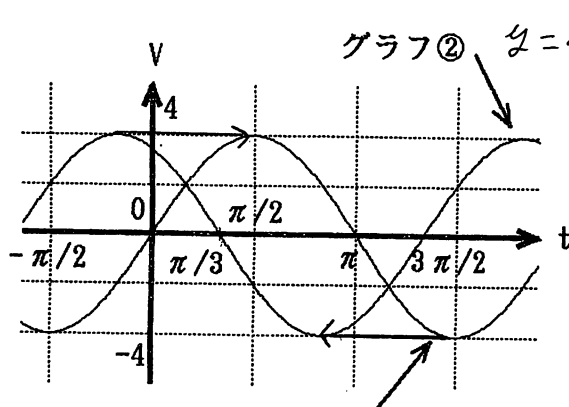
このように、 $y=a\cdot\sin\{k(x-\theta)\}$ と $y=a\cdot\sin(kx)$ とをくらべた場合、($\theta > 0$)

$y=a\cdot\sin\{k(x-\theta)\}$ は $y=a\cdot\sin(kx)$ より θ だけ位相が遅れている。

$y=a\cdot\sin(kx)$ は $y=a\cdot\sin\{k(x-\theta)\}$ より θ だけ位相が進んでいる。

となる。「位相が進む」とは、グラフが「左」にずれ、「位相が遅れる」とは、グラフが「右」にずれることになる。

(例) 次の2つのグラフを表す式を決定し、グラフ①がグラフ②に対し、位相がどうなっているかを答えよ。



グラフ① $y=4\sin x$

グラフ② $y=4\sin(x+\frac{2}{3}\pi)$

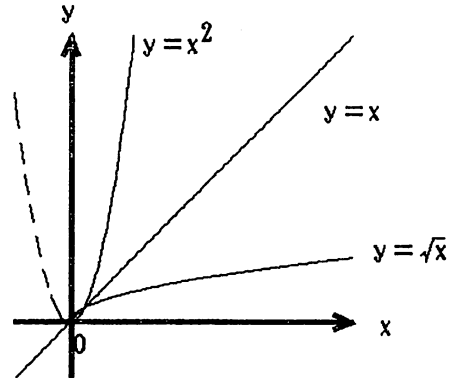
①は②より $\frac{2}{3}\pi$ だけ位相が遅れている

②は①より $\frac{2}{3}\pi$ だけ位相が進んでいる

[7] 逆三角関数のグラフ

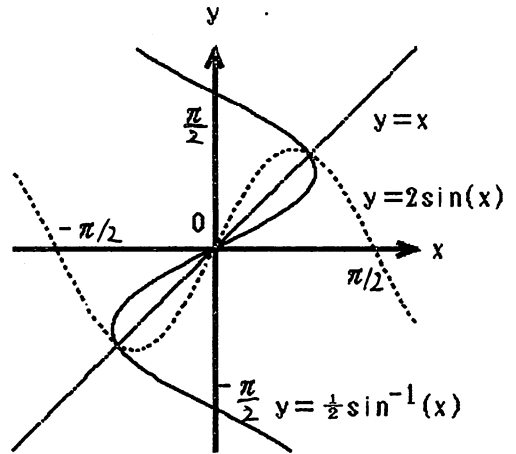
一般的に、 $y=f^{-1}(x)$ ($y=f(x)$ の逆関数) のグラフは、元の関数 $y=f(x)$ のグラフを $y=x$ に関して対称移動したグラフとなる。

(例) $y=\sqrt{x}$ のグラフは $y=x^2$ ($x \geq 0$) のグラフから描ける。



従って、逆三角関数のグラフも元の三角関数にグラフを $y=x$ に関して対称移動させれば描ける。

(例) $y=\frac{1}{2}\sin^{-1}(x)$ のグラフ
元の三角関数は $y=\sin(2x)$ である



(例) $y=2\sin^{-1}(x/2-1)+\pi/2$ のグラフ

元の三角関数を求める。

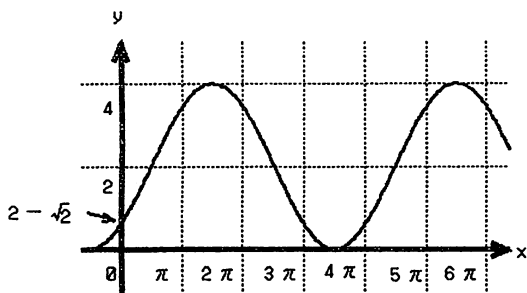
$$x=2\sin^{-1}(y/2-1)+\pi/2$$

$$(x-\pi/2)/2=\sin^{-1}(y/2-1)$$

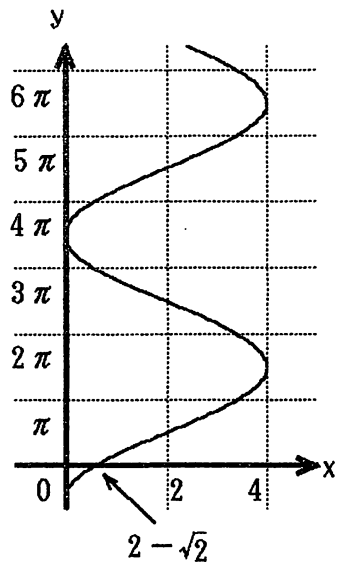
$$\sin\{(x-\pi/2)/2\}=y/2-1$$

$$\therefore y=2\sin\{\frac{1}{2}(x-\pi/2)\}+2$$

このグラフは、左図のようになる。よって、求める逆三角関数のグラフは右図になる。



周期： 4π
 振幅： ± 2
 x軸中心： 2
 y軸中心： $\pi/2$



[7] 三角方程式

☆三角関数の基本定理を使って解く。

(例) $\cos(2x) = \cos(x)$

倍角の公式を用いて、

$$2\cos^2(x) - 1 = \cos(x)$$

$$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

ここで、

$$\cos(x) = t$$

と置換する。このとき、

$$-\infty < x < \infty \quad \text{に対して} \quad -1 \leq t \leq 1$$

となることに注意する。

$$2t^2 - t - 1 = 0 \quad \therefore t = -1/2, 1$$

これはどちらも範囲内なので解である。

tを $\cos(x)$ に再置換して、

$$\cos(x) = -1/2, 1 \quad \therefore x = \cos^{-1}(-1/2), \cos^{-1}(1)$$

$$\therefore x = \pm \pi/3 + 2n\pi, 2n\pi \dots \dots \text{(答)}$$

POINT: x の範囲 (定義域) と t の範囲

(例) $\cos(2x) + 6\sin(x) + 7 = 0$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$1 - 2\sin^2 x + 6\sin x + 7 = 0$$

$$\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$$

$$\sin x = t \quad t \neq \angle \angle, \quad -1 \leq t \leq 1..$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -1, 4$$

条件より $t = -1$.

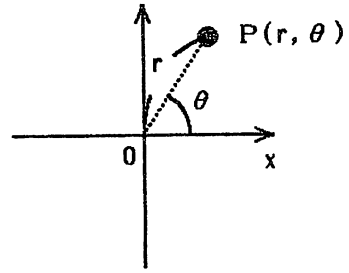
$$\therefore \sin x = -1 \quad \therefore x = \sin^{-1}(-1)$$

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

【MEMO】

とすると、 $x=r \cdot \cos \theta$, $y=r \cdot \sin \theta$ ゆえ、

$$z = r \cdot \cos \theta + j r \cdot \sin \theta$$
$$\therefore z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$



複素数の三角関数表示
 $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$

(注意) $z = r \cdot \cos \theta + j r \cdot \sin \theta$ は直交座標表示である。

→ 複素数は長さ(r)と方向(θ)を持つベクトルと言える。

複素数のベクトル表示 $z = r \angle \theta$

→ オイラーの公式 $e^{j\theta} = \exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta$ を用いて

複素数の指数関数表示 $z = r e^{j\theta} = r \cdot \exp(j\theta)$

まとめると・・・

複素平面 (z 平面) 上の複素数 z の表示方法は、

(1) 直交座標表示・・・直交座標 (x, y) を用いる

$$z = x + j y$$

(2) 極座標表示・・・極座標 (r, θ) を用いる

① 三角関数表示 $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$

② ベクトル表示 $z = r \angle \theta$

③ 指数関数表示 $z = r e^{j\theta} = r \cdot \exp(j\theta)$

☆ それぞれ一長一短なので、必要に応じて使い分ける。

[3] 直交座標表示 \rightleftharpoons 極座標表示 の変換

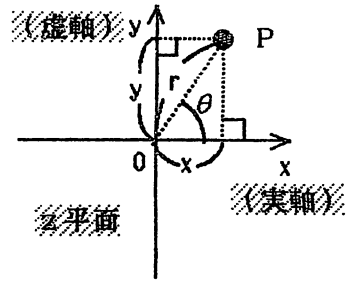
基本的には、直交座標と極座標の座標の変換である。(→第1章 [1] 参照)

右図において、

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$



を用いて変換する。

ここで、

$ z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$	z の絶対値 (大きさ)
$\text{Arg}(z) = \theta = \{\cos \theta = x/r \text{ かつ } \sin \theta = y/r \text{ となる } \theta\}$	$(= \tan^{-1}(y/x))$
(アークユイト z)	z の偏角 (位相角)

と定義する。

(1) 直交座標表示→極座標表示の変換

$z = x + jy$ から $|z|$ と $\text{Arg}(z)$ を定義に従って求める。

(例) $z = \sqrt{3} + j$

これは、 $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ になるから、定義式に代入して、

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{Arg}(z) = \theta = \{\cos \theta = x/r \text{ かつ } \sin \theta = y/r \text{ となる } \theta\} = \frac{\pi}{6}$$

よって、

$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)$	(三角関数表示)
$= 2 \angle \frac{\pi}{6}$	(ベクトル表示)
$= 2 e^{j \frac{\pi}{6}}$	(指数関数表示)

となる。

(例) $z = 1$

これは、 $x = 1$, $y = 0$ になるから、定義式に代入して、

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0} = 1$$

$$\text{Arg}(z) = \theta = \{\cos \theta = x/r \text{ かつ } \sin \theta = y/r \text{ となる } \theta\} = 0$$

よって、

$$z = \cos 0 + j \sin 0 \quad (\text{三角関数表示})$$

$$= \angle 0 \quad (\text{ベクトル表示})$$

$$= e^{j0} \quad (\text{指数関数表示})$$

となる。

(2) 極座標表示→直交座標表示の変換

三角関数表示 $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ or ベクトル表示 $z = r \angle \theta$ or
 指数関数表示 $z = r e^{j\theta} = r \cdot \exp(j\theta)$ の r , θ より、 x , y を求める。

(例) $z = 3 e^{j\pi/3} = 3 \exp(j\pi/3)$
 これは、 $|z| = r = 3$, $\text{Arg}(z) = \theta = \pi/3$ より、

$$x = r \cdot \cos \theta = \frac{3}{2} \quad y = r \cdot \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

よって、

$$z = \frac{3}{2} + j \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。

(例) $z = 2 \angle (3\pi/4)$
 これは、 $|z| = r = 2$, $\text{Arg}(z) = \theta = 3\pi/4$ より、

$$x = r \cdot \cos \theta = -\sqrt{2} \quad y = r \cdot \sin \theta = \sqrt{2}$$

よって、

$$z = -\sqrt{2} + j\sqrt{2} \quad (\text{直交座標表示})$$

と求まる。

[4] 複素数の演算

2つの複素数 z_1, z_2 を

$$z_1 = x_1 + j y_1 = r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) = r_1 \cdot \exp(j \theta_1) = r_1 \angle \theta_1$$

$$z_2 = x_2 + j y_2 = r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) = r_2 \cdot \exp(j \theta_2) = r_2 \angle \theta_2$$

とする。

(1) 相等

z_1 と z_2 は、

$$x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2 \quad (\text{実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しい})$$

または

$$r_1 = r_2 \text{ かつ } \theta_1 = \theta_2 \quad (\text{大きさどうし、位相角どうしがそれぞれ等しい})$$

ときに相等しく、これを

$$z_1 = z_2$$

と記す。

(2) 四則演算

① 和

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= (x_1 + j y_1) + (x_2 + j y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + j (y_1 + y_2) \\ &= (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + j (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

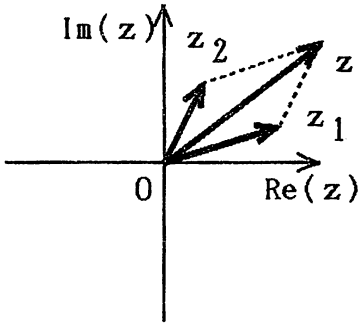
(実部どうし、虚部どうしをそれぞれ加算する。)

② 差

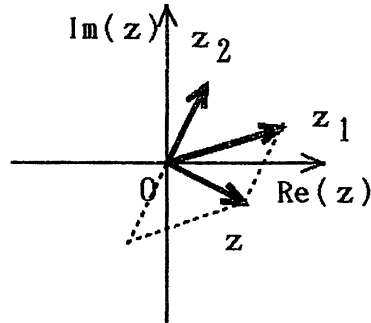
$$\begin{aligned} z = z_1 - z_2 &= (x_1 + j y_1) - (x_2 + j y_2) \\ &= (x_1 - x_2) + j (y_1 - y_2) \\ &= (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) + j (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

(実部どうし、虚部どうしをそれぞれ減算する。)

和（加法），差（減法）の演算をベクトル図で示すとそれぞれ下図のようになる。



和のベクトル図



差のベクトル図

☆加法，減法は「直交座標表示」で計算するのが良い。

(例) $z_1 = 1 + j$, $z_2 = e^{j\pi/3}$ のとき、 $z = z_1 + z_2$ を求めよ。

$$z_2 = e^{j\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= z_1 + z_2 = (1 + j) + \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} + j \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}} \end{aligned}$$

③ 積

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (x_1 + j y_1) \times (x_2 + j y_2) \\ &= x_1 x_2 + j (x_1 y_2 + x_2 y_1) + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j (x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(直交座標表示)} \\ &= r_1 \exp(j \theta_1) \times r_2 \exp(j \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \exp\{j (\theta_1 + \theta_2)\} && \text{(指数関数表示)} \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)\} && \text{(三角関数表示)} \\ &= r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) && \text{(ベクトル表示)} \end{aligned}$$

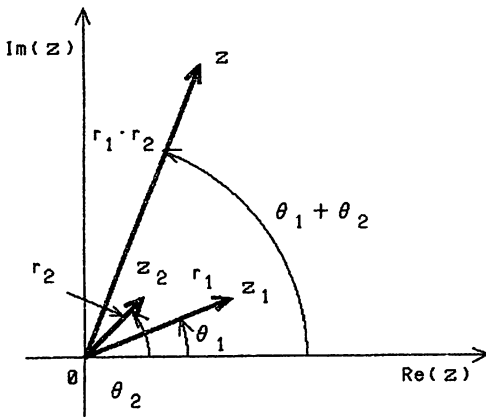
(極座標表示のときは、大きさは大きさどうしの積、
位相角は位相角どうしの和となる。)

④ 商

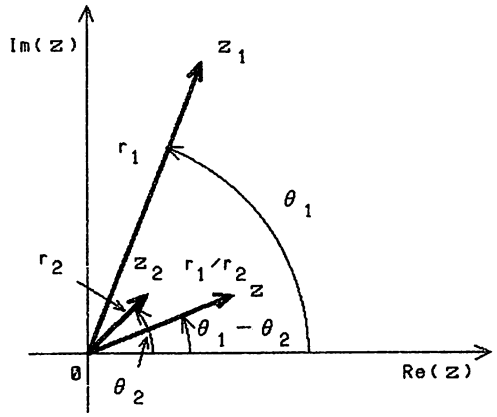
$$\begin{aligned}
 z = z_1 \div z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{分母の} \\ \text{有理化} \end{array} \right) \\
 &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \left(\text{直交座標表示} \right) \\
 &= \frac{r_1 \exp(j\theta_1)}{r_2 \exp(j\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp\{j(\theta_1 - \theta_2)\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{指数関} \\ \text{数表示} \end{array} \right) \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{三角関} \\ \text{数表示} \end{array} \right) \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \angle(\theta_1 - \theta_2) \quad \left(\text{ベクトル表示} \right)
 \end{aligned}$$

(極座標表示のときは、大きさは大きさどうしの商、
位相角は位相角どうしの差となる。)

積 (乗法) , 商 (除法) の演算をベクトル図で示すとそれぞれ下図のようになる。



積のベクトル図



商のベクトル図

☆乗法、除法は「極座標表示 (特に指数関数表示)」で計算するのが良い。
(但し、位相角がきれいに求まらないときは、直交座標表示を使用する。)

(例) $z_1 = 1 + j$, $z_2 = e^{j\pi/3}$ のとき、 $z = z_1 z_2$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt{1^2 + 1^2} e^{j\phi} & \phi &= \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\
 &= \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore z = z_1 z_2 = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \times e^{j\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{j\frac{7}{12}\pi}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = z_1 z_2 = (1 + j) \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) + j\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$$

(例) $z_1 = 3 + j4$, $z_2 = e^{j\pi/3}$ のとき、 $z = z_1 z_2$ を求めよ。

$$z_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = z_1 z_2 = (3 + j4) \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{2} + j\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = 3 + j4 \text{ は } r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \cos\theta = \frac{3}{5}, \sin\theta = \frac{4}{5} \text{ と } \theta = 30^\circ$$

$$z = 5 e^{j\theta}, e^{j\frac{\pi}{3}} = 5 e^{j(\theta + \frac{\pi}{3})}$$

$$= 5 \left\{ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

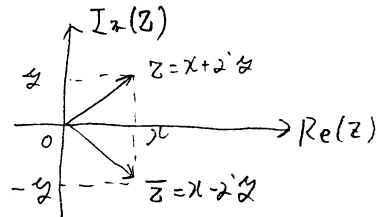
$$= 5 \left\{ \left(\cos\theta \cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{3} \right) + j \left(\sin\theta \cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= 5 \left\{ \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{2} + j\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$$

(3) 共役複素数の四則演算

共役複素数を、

$$z = x + jy \quad \bar{z} = x - jy$$



とする。これに対して、次の四則が成立する。

① 和 $z + \bar{z} = 2x \quad \therefore x = \operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$

② 差 $z - \bar{z} = j2y \quad \therefore y = \operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2j)$

③ 積 $z \bar{z} = x^2 + y^2 \quad \therefore |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (z \bar{z})^{1/2}$

④ 商 $z/\bar{z} = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) - j(2xy)/(x^2 + y^2)$

(4) 累乗

$z = x + jy = r e^{j\theta} = r \cdot \exp(j\theta)$ の n 乗は、

$z^n = (x + jy)^n =$ [ひたすら展開するしかない]	(直交座標表示)
$= (r e^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta} = r^n \exp(jn\theta)$	(複素数表示)
$= r^n \{ \cos(n\theta) + j \sin(n\theta) \}$	(三角関数表示)
$= r^n \angle(n\theta)$	(ベクトル表示)

(極座標表示のときは、大きさは n 乗、位相角は n 倍となる。)

☆極座標表示に変換しづらいときは、直交座標表示で展開して求めるしかない。

(参考) $r=1$ すなわち、 $z = e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ のとき

$$z^n = (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

より、

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

となることを、「ド・モアブルの定理」と言う。

(例) $z=1+j$ の9乗を求めよ。 $(0 \leq \theta < 2\pi)$

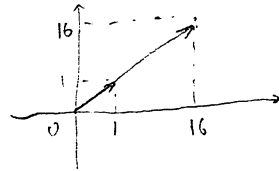
$$z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ より}$$

$$z^9 = (\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}})^9 = 2^4 \sqrt{2} e^{j\frac{9}{4}\pi} = 16\sqrt{2} e^{j\frac{9}{4}\pi} = \underline{16\sqrt{2} e^{j\frac{9}{4}\pi}}$$

$$= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{9}{4}\pi + j \sin \frac{9}{4}\pi \right)$$

$$= 16\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \underline{16 + j16} \quad \left(\frac{16}{\sqrt{2}} \right)$$



(5) 累乗根

$z = r e^{j\theta} = r \cdot \exp(j\theta)$ の n 乗根は、次のように n 個の根になる。

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= z^{1/n} = (r e^{j\theta})^{1/n} = \{r \cdot \exp(j\theta)\}^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r} \exp\{j(\theta + 2k\pi)/n\} \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ または} \\ &\quad k=0, -1, -2, \dots, -(n-1) \end{aligned}$$

(例) $z=1+j$ の3乗根をすべて求めよ。

$$z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ より}$$

$$\sqrt[3]{z} = (\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{2} e^{j\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{2} e^{j\frac{\pi}{12}} \quad (k=0) \\ &= \sqrt[3]{2} e^{j\frac{3}{4}\pi} \quad (k=1) \\ &= \sqrt[3]{2} e^{j\frac{17}{12}\pi} \quad (k=2) \end{aligned} \right\} \left(\frac{16}{\sqrt{2}} \right)$$

(証明) $z = r e^{j\theta} \dots \textcircled{1}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\theta}{n}} = a e^{j\frac{\theta}{n}}$$

とする。

$$(\sqrt[n]{z})^n = z = a^n e^{j\theta} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を比較する。

$$r e^{j\theta} = a^n e^{j\theta}$$

$$\therefore r = a^n, \theta + 2k\pi = \theta$$

$$\therefore a = \sqrt[n]{r}, k = \frac{\theta + 2k\pi}{\pi}$$

$$= \frac{\theta}{\pi} + 2\frac{k}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

(例) $z = \sqrt{3 + j4}$ をすべて求めよ。

$$z' = 3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j \tan^{-1} \frac{4}{3}} = 5 e^{j \tan^{-1} \frac{4}{3}} = 5 e^{j\theta} \quad (\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3})$$

$$z = z'^{\frac{1}{2}} = (5 e^{j\theta})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{2}} \quad (k=0,1) \quad (\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3})$$

$$\therefore z = \sqrt{5} e^{j \frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{5} e^{j \frac{\theta + 2\pi}{2}} = \sqrt{5} e^{j(\frac{\theta}{2} + \pi)} \quad \left. \vphantom{\frac{\theta}{2}} \right\} \left(\frac{z}{z'} \right)$$

(例) $z = 8$ の3乗根をすべて求めよ。また、そのベクトル図を描け。

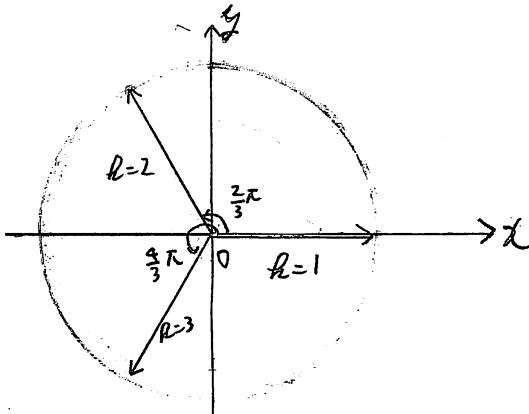
$$z = 8 e^{j0} \quad (\theta = 0)$$

$$z^{\frac{1}{3}} = (8 e^{j0})^{\frac{1}{3}} = 2 e^{j \frac{0 + 2k\pi}{3}} = 2 e^{j \frac{2}{3} k\pi}$$

$$\therefore z^{\frac{1}{3}} = 2 e^{j0} \quad (k=0) = 2$$

$$= 2 e^{j \frac{2}{3}\pi} \quad (k=1) = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + j \sin \frac{2}{3}\pi \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + j\sqrt{3}$$

$$= 2 e^{j \frac{4}{3}\pi} \quad (k=2) = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + j \sin \frac{4}{3}\pi \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - j\sqrt{3} \quad \left. \vphantom{\frac{4}{3}\pi} \right\} \left(\frac{z}{z'} \right)$$



第3章 微分

[1] 関数の極限值

(1) 関数の極限值

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとって限りなく a に近づくととき、 $f(x)$ が限りなく一定の値 b に近づくなれば、

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow b \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

と表し、 b のことを、 x が限りなく a に近づいたときの $f(x)$ の極限值という。

(2) 関数の極限値の公式

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \quad \text{ならば、}$$

- ① $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha$ (ただし k は定数)
- ② $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha + \beta$
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha - \beta$
- ④ $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)/g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha/\beta$ (ただし $\beta \neq 0$)

(3) 関数の極限値の求め方

極限値を求めようとしたとき、 $0/0$ あるいは ∞/∞ のような不定形になるときは、

- 分母・分子を約分する
- 分母か分子を有理化する

などの手法を用いて極限値を計算すると良い。

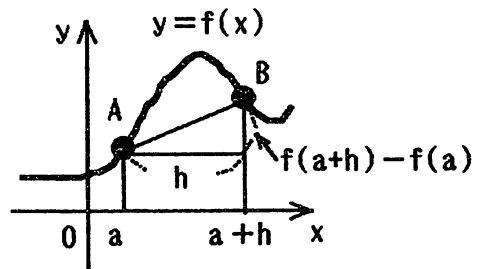
[2] 微分係数と導関数

(1) 平均変化率

関数 $y=f(x)$ において、 x が a から $a+h$ まで変わるとき、 y の変化 $f(a+h)-f(a)$ と x の変化 h との比

$$\{f(a+h)-f(a)\}/h$$

を $y=f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ ま



での平均変化率という。グラフでは直線ABの傾きを表す。

(2) 微分係数

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が定まるならば、これを $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数といい、 $f'(a)$ で表す。

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

これは、グラフ上では点Bを限りなく点Aの近づけたときに相当し、点A $(a, f(a))$ における接線の傾きを表す。

(3) 導関数

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき、 x の各々の値 a にそれぞれ微分係数 $f'(a)$ を対応させれば、この対応は一つの関数になる。この関数を $f'(x)$ で表し、 $f(x)$ の導関数という。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\Delta x = h$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ とすれば、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x について微分するという。微分するということは、連続的に変化する変数に対して、変数のある値に応じた関数の極限の変化量を求めることである。

(4) 導関数を表す記号

$f'(x)$ y' $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d}{dx} f(x)$ など

(例) $y=x^2$ のとき、

- ① $x=2$ から $x=5$ までの平均変化率を求めよ。
- ② $x=2$ における微分係数を上記の定義に従って求めよ。
- ③ 導関数を上記の定義に従って求めよ。

① $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \underline{7}$

② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = \underline{4}$

③ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)$
 $= \underline{2x}$

[3] 初等関数の導関数

本来、導関数を求めるには、[2] で記したような定義に従って計算する必要がある。しかし、初等関数については「公式」として一般化されているので、これを用いた方が計算が楽になる。

(1) x の累乗の x^m の導関数

$$f(x) = x^m \quad (m: \text{整数または有理数}) \text{ のとき、} \quad f'(x) = mx^{m-1}$$

(2) 三角関数・逆三角関数の導関数

① $f(x) = \cos(x)$ のとき、 $f'(x) = -\sin(x)$

② $f(x) = \sin(x)$ のとき、 $f'(x) = \cos(x)$

③ $f(x) = \tan(x)$ のとき、 $f'(x) = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x)$

④ $f(x) = \text{Cos}^{-1}(x)$ のとき、 $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$

⑤ $f(x) = \text{Sin}^{-1}(x)$ のとき、 $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

⑥ $f(x) = \text{Tan}^{-1}(x)$ のとき、 $f'(x) = 1/(1+x^2)$

(3) 対数関数の導関数

$$f(x) = \log_e |x| \text{ のとき、} \quad f'(x) = 1/x$$

(4) 指数関数の導関数

① $f(x) = e^x = \exp(x)$ のとき、 $f'(x) = e^x = \exp(x)$

② $f(x) = a^x$ ($a > 0$ かつ $a \neq 1$) のとき、 $f'(x) = a^x \log_e(a)$

[4] 導関数の公式

次にあげる導関数に関する公式は、[3] の初等関数の導関数と組み合わせて、自由自在に使えるように訓練を積んでおくことが必要である。

(1) 定数の導関数

$$y = f(x) = k = \text{一定} \text{ であれば、} \quad y' = f'(x) = 0$$

(2) 関数の和または差の導関数

$$y = f(x) \pm g(x) \text{ であれば、} \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

(3) 関数の積の導関数

$$y = f(x)g(x) \text{ であれば、} \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$y = Kf(x)$ (K : 定数) であれば、 $y' = Kf'(x)$

(4) 関数の商の導関数

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ であれば、 } y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$y = \frac{K}{f(x)} \text{ (K : 定数) であれば、 } y' = -\frac{Kf'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

(5) 合成関数の導関数

$$y = f(u), u = g(x) \text{ であれば、 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

(6) 逆関数の導関数

$$y = f(x) \text{ の逆関数を } x = g(y) \text{ とすると、 } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)}$$

(7) 媒介変数表示の関数の導関数

x, y が媒介変数 t の関数で、 $x = f(t), y = g(t)$ であれば、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(例) 次の関数の導関数を [3] と [4] の諸公式を用いて求めよ。

① $y = x^4 + \sin(4x)$

$$y' = 4x^3 + 4 \cos 4x$$

② $y = \sqrt{5x} + 6x \cdot \cos(-2x+4)$

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 6 \cos(-2x+4) + 2 \cdot 6x \sin(-2x+4) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} + 6 \cos(-2x+4) + 12x \sin(-2x+4) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{\cos(3x)}{a^x}$$

$$y' = \frac{-3 \sin 3x \cdot a^x - \cos 3x \cdot a^x \log a}{(a^x)^2}$$

$$\therefore y' = - \frac{3 \sin 3x + \log a \cos 3x}{a^x}$$

④ $x = a \cdot \cos \theta$, $y = a \cdot \sin \theta$ のとき、 dy/dx

$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta = -y, \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-y}{x}$$

(例) $y = e^x$ の逆関数 $x = \log_e y$ を用いて、 $y' = dy/dx$ を求めよ。

$$x = \log y \text{ より } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y = e^x$$

(例) $y = \sin^{-1}(x)$ の逆関数 $x = \sin(y)$ を用いて、 $y' = dy/dx$ を求めよ。

$$x = \sin y \text{ より } \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

[5] 高次導関数

(1) 高次導関数の定義

x の関数 $y=f(x)$ の導関数 $y'=f'(x)$ を再び x について微分することが可能であれば、 $f'(x)$ の導関数を求めることができる。これを $f(x)$ の2次導関数とい

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy'}{dx}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

と表記する。

同様にして、さらに3次、4次、 \dots 、 n 次導関数を求めていくことができる。

$$y'''=f'''(x), y^{(4)}=f^{(4)}(x), \dots, y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

2次以上の導関数を高次導関数という。

(2) 高次導関数の例

① 三角関数

$$f(x)=\sin(x), f'(x)=\cos(x)=\sin(x+\pi/2),$$

$$f''(x)=-\sin(x)=\sin(x+2\pi/2), f^{(3)}(x)=-\cos(x)=\sin(x+3\pi/2),$$

$$f^{(4)}(x)=\sin(x)=\sin(x+4\pi/2), \dots, f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)$$

② 対数関数

$$f(x)=\log|x|, f'(x)=1/x=x^{-1}, f''(x)=-1 \cdot x^{-2}=-1 \cdot 1! \cdot x^{-2},$$

$$f^{(3)}(x)=2 \cdot x^{-3}=(-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3}, \dots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

[6] テイラー展開とマクローリン展開及びその応用

(1) テイラー展開

関数 $f(x)$ が $x=a$ を含む閉区間において無限回微分可能な場合、 $f(x)$ は次のような $x-a$ のべき級数に展開される。

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

これを関数 $f(x)$ の $x=a$ のまわりのテイラー展開といい、上式のべき級数をテイラー級数という。

(2) マクローリン展開

テイラー展開で $a=0$ の場合、すなわち、

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

を関数 $f(x)$ のマクローリン展開といい、上式のべき級数をマクローリン級数という。

(3) マクローリン展開の例

① 二項定理 $\dots \cdot n$ を正の整数として、

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n$$

② 三角関数

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

③ 対数関数

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

④ 指数関数

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(4) マクローリン展開の応用 \dots 関数の近似式

マクローリン展開は無限級数であるが、これを適当な次数で打ち切ると、近似式となる。特に次にあげるような1次近似式と2次近似式は工学や物理学でよく用いるので覚えておくと良い。ただし、近似式の成立条件は、

$ x \ll 1$ のとき	(x の絶対値が非常に小さいとき)
-----------------	----------------------

であることに注意すること。

① 1次近似式

$$(1+x)^n \doteq 1+nx \quad \sin(x) \doteq x \quad \cos(x) \doteq 1 \quad \log(1+x) \doteq x$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} \doteq 2x \quad e^x \doteq 1+x$$

② 2次近似式

$$(1+x)^m \doteq 1+mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 \quad \sin(x) \doteq x \quad \cos(x) \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} \quad \log \frac{1+x}{1-x} \doteq 2x \quad e^x \doteq 1+x + \frac{x^2}{2}$$

[7] 偏微分

偏微分法とは、多変数関数(2つ以上の独立変数の関数)に関連する微分法である。ここでは、2変数関数の場合について簡単に説明する。

$z=f(x,y)$ を x で偏微分するとは、 y を一つの定数と考え、 x で微分することである。すなわち、次のような定義となる。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\partial \text{ は「ラウンド」と読む})$$

これを、 x に関する偏導関数という。

同様に、 $z=f(x,y)$ を y で偏微分するとは、 x を一つの定数と考え、 y で微分することである。すなわち、次のような定義となる。

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

これを、 y に関する偏導関数という。

(例) $z=x^2y$ において、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

☆この他、微分法に関連して、「極大・極小」「微分係数と接線」など復習しておくこと。

第4章 積分

[1] 原始関数と不定積分

独立変数 x の関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であるとき、すなわち、

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

のとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。また、 K を任意定数とすると、

$$\frac{d\{F(x)+K\}}{dx} = f(x)$$

となるので、 $F(x)+K$ も $f(x)$ の原始関数である。

このような任意定数をもつ原始関数 $F(x)+K$ を関数 $f(x)$ の不定積分といい、次式のように書き表す。

$$\int f(x)dx = F(x)+K$$

ここで、 x を積分変数、 $f(x)$ を被積分関数、 K を積分定数といい、また、 $f(x)$ の原始関数あるいは不定積分を求めることを、 $f(x)$ を x について積分するという。なお、積分定数 K は、特に必要な場合を除いて省略されることが多い。

[2] 初等関数の不定積分

上述したように、被微分関数 $F(x)$ を微分したものが導関数 $f(x)$ であるので、被微分関数が原始関数あるいは不定積分に対応し、その導関数が被積分関数に対応する。従って、第3章 微分 [3] で示した初等関数の導関数を参照して、次のような初等関数の不定積分が得られる。ただし、積分定数 K は省略している。

(1) x の累乗 x^m の不定積分

m を整数または有理数とするとき、

$$\int x^m dx = x^{m+1}/(m+1) \quad m \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int (1/x) dx = \log |x|$$

(2) 三角関数の不定積分

a を定数とするとき、

$$\int \cos(ax) dx = (1/a) \sin(ax)$$

$$\int \sin(ax) dx = -(1/a) \cos(ax)$$

$$\int \sec^2(ax) dx = \int (1/\cos^2(ax)) dx = (1/a) \tan(ax)$$

(3) 逆三角関数になる不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

(4) 指数関数の不定積分

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{\pm ax} dx = \pm \frac{e^{\pm ax}}{a} \quad (a: \text{定数})$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)}$$

(5) 対数関数になる不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log |x + \sqrt{x^2+a}|$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|$$

[3] 不定積分に関する公式

次にあげる不定積分に関する公式は、[2]の初等関数の不定積分と組み合わせて、自由自在に使えるように訓練を積んでおくことが必要である。

(1) 定数と関数の積の不定積分

$$\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx$$

(2) 関数の和または差の不定積分

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

(3) 部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

(4) 置換積分法

独立変数 t のある既知関数 $\phi(t)$ を選んで、

$$\phi(t) = x$$

とおくと、

$$\int f(x) dx = \int f\{\phi(t)\} \phi'(t) dt, \quad \phi'(t) = \frac{dx}{dt}$$

このように、変数変換によって積分する方法を置換積分法という。なお、上式は形式的に

$$f(x) = f\{\phi(t)\}, \quad dx = \phi'(t) dt$$

とおいたものとなっている。

◎覚えておくと便利な置換方法

① $\tan(x) = t$ とおくと、

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

② $\tan(x/2) = t$ とおくと、

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

(例) 次の不定積分を [2], [3] の公式を用いて求めよ。

$$\textcircled{1} \int \exp(3x+1) dx = \frac{1}{3} \exp(3x+1) + C$$

$$\textcircled{2} \int \sin(2\pi f \cdot t) dt = -\frac{1}{2\pi f} \cos 2\pi f t + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{\cos^2 \lambda}{1+\tan^2 \lambda} dt = \int dt = t = \tan^{-1} x + C$$

$$t = \tan \lambda \text{ とおく } \quad dt = \sec^2 \lambda \cdot d\lambda$$

$$\textcircled{4} \int \log|x| dx = x \log|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \underline{x(\log|x| - 1) + C}$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad t \neq 0 \quad dt = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \times \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

[4] 不定積分と定積分の関係

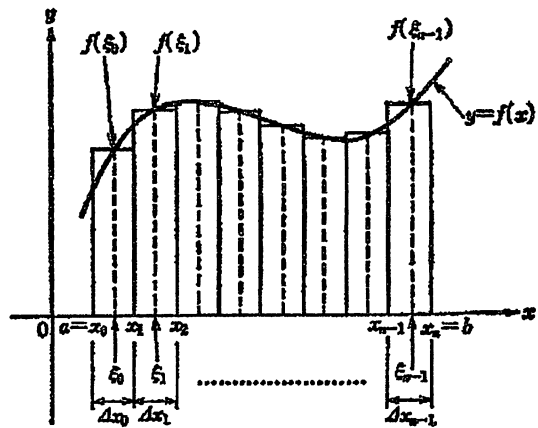
(1) 区分求積法と定積分

ある与えられた x の関数 $y=f(x)$ の表す曲線と x 軸との間で、 $x=a$ から b までの間の面積 S を求めることを考える。

右図のように、閉区間 $[a, b]$ を $(n+1)$ 個の点 $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b$ 、ただし、

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$$

によって n 個の小区間に分割する。さらに、



$$x_1 - x_0 = \Delta x_0, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_1, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$$

とし、また、小区間内にそれぞれ任意の一点 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ (注: ξ は「クシー」と読むギリシャ文字) をとると、 $y=f(x)$ の曲線の近似を与える階段状グラフと x 軸間の面積 S_n は、

$$S_n = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \{f(\xi_k) \Delta x_k\}$$

$\Delta x_k \rightarrow 0$ になるように $n \rightarrow \infty$ とすることにより、微小になった各長方形の面積 $f(\xi_k) \Delta x_k$ の総和 S_n を求める方法を 区分求積法 という。

次に、 $\Delta x_k \rightarrow 0$ になるように $n \rightarrow \infty$ としたとき、上式の S_n が一定の極限值 S に収束する場合、 S を $y=f(x)$ の $x=a$ から b までの定積分 といい、次のように書き表す。

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \{f(\xi_k) \Delta x_k\} = \int_a^b f(x) dx$$

この場合、 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ において積分可能であるといい、また、 a, b をそれぞれ定積分の下限、上限という。

(2) 不定積分と定積分の関係

関数 $y=f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき、 $y=f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ の定積分は次式のように与えられる。

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \left[\int f(x) dx \right]_a^b$$

これが不定積分と定積分との関係を表す公式である。

(参考) 区分求積法の考え方は、コンピュータで定積分を実行するときや、複雑なグラフの面積の計算などに用いられる。

[5] 定積分に関する公式

(1) 上限と下限が等しい場合の定積分

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(2) 上限と下限を交換した場合の定積分

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(3) 閉区間 $[a, b]$ 内外に任意の点 c をとる場合の定積分

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(4) 定数と関数の積の定積分

$$\int_a^b K \cdot f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

(5) 関数の和または差の定積分

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(6) 部分積分法

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

(7) 置換積分法 $x = \phi(t)$, $t_{x=a}=p$, $t_{x=b}=q$ とするとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_p^q f\{\phi(t)\} \phi'(t) dt$$

[6] 関数の平均値

閉区間 $[a, b]$ において連続な関数 $f(x)$ の平均値 f_{ave} は次式で定義される。

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \{f(x)\}_{min} \leq f_{ave} \leq \{f(x)\}_{max}$$

(参考) 正弦波交流電流 $i = I \sin(\omega t) = I \sin(2\pi ft) = I \sin(2\pi t/T)$ の平均値 I_a と実効値 I_e は次式で定義される。

$$I_a = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt \quad I_e = \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right)^{1/2}$$

なお、 I_e/I_a を 波形率 という。

[7] 重積分

$z = f(x, y)$ という2変数関数において、変数 x と変数 y でそれぞれ積分することを 2重積分 という。すなわち、

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \int (f(x, y) \text{ を } x \text{ の関数とみて } x \text{ で積分}) dy = \int dy \int f(x, y) dx \\ &= \int \int f(x, y) dy dx \\ &= \int (f(x, y) \text{ を } y \text{ の関数とみて } y \text{ で積分}) dx = \int dx \int f(x, y) dy \end{aligned}$$

なお、積分の順序 (x から積分するか、 y から積分するか) を変更しても積分の値は変わらない。計算のしやすい方から行うべきである。ただし、定積分のときは、区間に注意せよ。

(例) 次の重積分を行え。

$$(1) \iint x^2 y dx dy = \int dy \int x^2 y dx = \int \frac{x^3}{3} y dy = \frac{x^3 y^2}{6} + C'$$
$$= \int dx \int x^2 y dy = \int \frac{1}{2} x^2 y^2 dx = \frac{x^3 y^2}{6} + C'$$

$$(2) \int_0^1 \int_0^2 x^2 y dx dy = \int_0^1 dy \int_0^2 x^2 y dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_0^2 dy$$
$$= \int_0^1 \frac{8}{3} y \cdot dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$
$$= \int_0^2 dx \int_0^1 x^2 y dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^1 dx$$
$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

【MEMO】

第5章 常微分方程式

[1] 常微分方程式の定義

(1) 定義と解

$a(x)$ 、 $b(x)$ 、 $c(x)$ 、 $Q(x)$ を x の与えられた関数とするとき、例えば、

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = Q(x), \quad a(x) \frac{d^2y}{dx^2} + b(x) \frac{dy}{dx} + c(x)y = Q(x)$$

などのように、一つの独立変数 x とその関数 y 、導関数 dy/dx 、 d^2y/dx^2 などを含む方程式を、未知関数 y に関する常微分方程式といい、この方程式を満足する $y=f(x)$ を解という。解は、少なくとも一つの任意定数を含む一般解と、一般解に現れる任意定数を初期条件などの付帯条件によって特定の値に定めた特殊解(特解)の二種類ある。また、微分方程式の解を求めることを微分方程式を解くという。

(例)

$dy/dx=2$ を解くと、 $y=2x+K$ である。そこで、 $y=2x+K$ が一般解、例えば、 $y=2x+2$ が特解である。

(2) 階数と次数

常微分方程式において、方程式に現れる最高次の導関数の次数をその常微分方程式の階数といい、 y 、 dy/dx 、 d^2y/dx^2 など従属変数その導関数が1乗の項だけのものを線形常微分方程式、また、 y^2 、 $(dy/dx)^3$ 、 $\sin(y)$ など従属変数とその導関数が1乗の項以外のものがある場合を非線形常微分方程式という。

(例)

- ① $x^2y'' + xy' + (x^2 - y) = 0$ 2階線形常微分方程式
- ② $y'' + 4xy' + 2y = \cos(x)$ 2階線形常微分方程式
- ③ $y' + \sin(y) = 0$ 1階非線形常微分方程式
- ④ $(y'')^2 = 2$ 2階非線形常微分方程式

(参考) 微分方程式には、上記の常微分方程式の他に、

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

のような、偏微分方程式がある。特に断りなく“微分方程式”といった場合は、常微分方程式を意味する。

また、微分方程式は多種多様あるが、ここでは、1階常微分方程式の解法について学ぶ。

[2] 1階常微分方程式の解法

(1) 変数分離形

$f(x)$ 、 $g(y)$ がそれぞれ x 、 y の与えられた関数であるとき、次の形をもつ微分方程式、

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

を変数分離形の微分方程式という。その一般解は、上式を形式的に

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

のように変数分離し、左辺を y 、右辺を x について積分した形になる。すなわち、

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + K \quad (K: \text{積分定数})$$

結果は、 $y = \dots$ の形にする (y について解く) のが望ましい。

また、 $M(x, y)$ 、 $N(x, y)$ が x 、 y の与えられた関数であり、それらの全ての項が変数 x 、 y について同次であるとき、次の形を持つ微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = M(x, y)N(x, y)$$

を同次1階方程式という。この方程式は置換 $y=ux$ または $x=uy$ によって変数分離形に代えることができる。ここで、 u は x または y の関数である。

(3) 1階線形常微分方程式

先に記したとおり、

$$f(x) \frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$$

の形となる1階線形常微分方程式は次のような形で解く。

① 両辺を $f(x)$ で割る。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \left[P(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad Q(x) = \frac{h(x)}{f(x)} \right]$$

② 積分因子

$$\exp\left\{\int P(x)dx\right\}$$

を計算する。

③ ①の方程式に②の積分因子を掛ける。

$$\left\{ \frac{dy}{dx} + P(x)y \right\} \exp\left\{\int P(x)dx\right\} = Q(x) \cdot \exp\left\{\int P(x)dx\right\}$$

④ この結果の左辺の積分は「常に積分因子のちょうど y 倍したものである」という数学的事実を利用してその両辺を積分する。

$$y \cdot \exp\left\{\int P(x)dx\right\} = \int [Q(x) \exp\left\{\int P(x)dx\right\}] dx + K \quad (K: \text{積分定数})$$

⑤ その積分した方程式を y について解く。($y = \dots$ の形にする。)

$$y = \exp\left\{-\int P(x)dx\right\} \cdot \int [Q(x) \exp\left\{\int P(x)dx\right\}] dx + K \cdot \exp\left\{-\int P(x)dx\right\}$$

(例)

(1) $dy/dx - y/x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + K$$

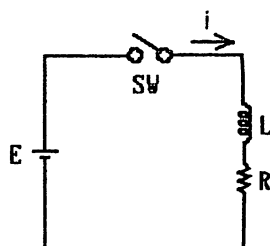
$$\therefore \log|y| = \log|x| + K$$

$$\begin{aligned} \log\left|\frac{y}{x}\right| &= k \\ \therefore y &= \pm e^{kx} x = kx \\ & \text{(kは積分定数 } k = \pm e^k) \end{aligned}$$

(2) 右図のような抵抗 R とインダクタンス L の直列回路において、時刻 $t=0$ でスイッチ SW を閉じて直流電圧 E を印加したとき、 $t>0$ で

$$L(di/dt) + R \cdot i = E$$

という微分方程式が成立する。この微分方程式を解き、そのグラフを描け。



(解法1) ... 変数分離形で解くとき。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{E}{R} \right)$$

$$\int \frac{di}{i - \frac{E}{R}} = \int -\frac{R}{L} dt$$

$$\log \left| i - \frac{E}{R} \right| = -\frac{R}{L}t + c'$$

$$e^{\log \left| i - \frac{E}{R} \right|} = e^{-\frac{R}{L}t + c'}$$

$$\left| i - \frac{E}{R} \right| = e^{c'} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\therefore i = \pm e^{c'} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

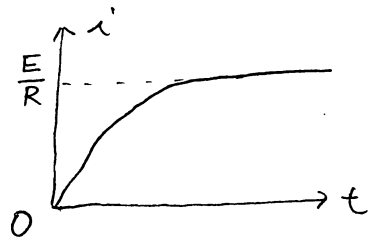
$$\rightarrow i = k e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

$$t=0 \text{ として } i=0.$$

$$0 = k + \frac{E}{R}$$

$$\therefore k = -\frac{E}{R}$$

$$\therefore i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



(解法2) ... 1階線形常微分方程式として解くとき。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

積分因数は

$$\exp \left(\int \frac{R}{L} dt \right) = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$i e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} dt$$

$$= \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c'$$

$$i = \frac{E}{R} + c' e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$t=0 \text{ として } i=0 \text{ として}$$

$$0 = \frac{E}{R} + c'$$

$$c' = -\frac{E}{R}$$

$$\therefore i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$(3) (x^2 + 3y^2)dx - 2xy \cdot dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$y = ux \text{ とする.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{1 + 3u^2}{2u}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 3u^2}{2u} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{2u}$$

$$\int \frac{2u}{1 + u^2} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log(1 + u^2) = \log|x| + C'$$

$$\log \frac{1 + u^2}{|x|} = C$$

$$\frac{1 + u^2}{x} = e^C = C$$

$$\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{x} = C$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3} = C$$

$$(4) (1 + x^2)(dy - dx) = 2xy \cdot dx \quad \text{ただし、} x=0 \text{ のとき } y=1$$

$$(1 + x^2)dy - (1 + x^2)dx = 2xy dx$$

$$(1 + x^2)dy = (1 + x^2 + 2xy)dx$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^2}y = 1$$

$P(x) = -\frac{2x}{1 + x^2}$, $Q(x) = 1$ より系形である。積分因子は

$$\exp\left(\int -\frac{2x}{1 + x^2} dx\right) = \exp\left(\int \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx\right) = \exp(-\log|1 + x^2|) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\therefore \frac{y}{1 + x^2} = \int \frac{dx}{1 + x^2} + C = \tan^{-1}x + C$$

$$2x \int \frac{dx}{1 + x^2}, \tan \theta = x \text{ とおく } dx = d\theta \sec^2 \theta$$

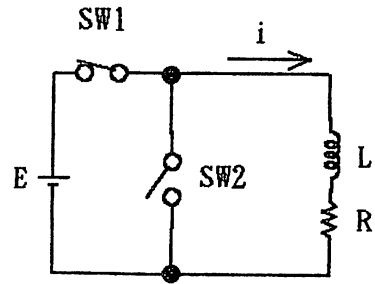
$$\therefore \int \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \int d\theta = \theta = \tan^{-1}x$$

$$\therefore y = (1 + x^2)(\tan^{-1}x + C)$$

$$x=0 \text{ のとき } y=1 \text{ より } 1 = 1 \cdot (0 + C) \quad \therefore C=1$$

$$\therefore y = (1 + x^2)(\tan^{-1}x + 1)$$

(5) 右図において、 R と L の直列回路に直流電圧 E を加え、十分時間が経過した後、電流 $i = E/R$ になったとする。このとき、スイッチ $SW1$ を開くと同時にスイッチ $SW2$ を閉じる。この時刻を $t=0$ とすると、 $t>0$ での回路方程式は次のようになる。



$$L(di/dt) + R \cdot i = 0$$

この微分方程式を解き、グラフに描け。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\therefore \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i$$

$$\therefore \int \frac{L}{Ri} \cdot di = \int dt$$

$$-\frac{L}{R} \log|i| = t + K' \quad (K' \text{ は積分定数})$$

$$\log i = -\frac{R}{L}(t + K')$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} k \quad (k = e^{-\frac{R}{L}K'})$$

$$\because t=0 \text{ のとき } i = \frac{E}{R} \text{ より } k = \frac{E}{R}$$

$$\therefore i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

————— (答)

よってグラフは下図の通り

