

第 5 章

ラプラス変換

制御理論は、時間領域で表現した微分方程式にラプラス変換を施すことによって、 s 領域の代数方程式に変換して議論するので、ラプラス変換をマスターすることは必須である。また、微分方程式を解く手法としても、4章で述べた手法とともに大切である。

5.1 ラプラス変換

ラプラス変換は、時間 t の関数 $f(t)$ を複素数 s の関数 $F(s)$ に変換させたものである。

いま、時間関数 $f(t)$ がつぎの条件を満たしているとする。

- (i) $f(t)$ は少なくとも $t > 0$ で定義されている。
- (ii) $f(t)$ は連続であるか、または不連続であっても不連続点は有限個である。
- (iii) $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$ となる実数 σ が存在する。

このとき、 $f(t)$ はラプラス変換可能であるという。われわれになじみの深い関数はほとんどラプラス変換可能であると考えて差し支えない。ラプラス変換可能なとき、ラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5.1)$$

で定義する。ここで、複素数 s の実数部は、 $f(t)$ がラプラス変換可能であるための最小の σ より大きな値であることが必要である。

定義に基づいて代表的な関数のラプラス変換を求める。

(1) 単位階段関数 (ステップ関数)

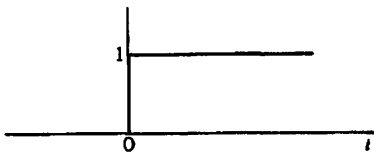


図 5.1 ステップ関数

図 5.1 のような波形の関数、すなわち、

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

なる関数を単位階段関数という。 $u(t)$ のラプラス変換は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (5.3)$$

(2) デルタ関数 (単位インパルス関数)

デルタ関数は任意の連続関数 $f(t)$ に対して、

$$\int_0^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (5.4)$$

の作用をする関数である。

したがって、 $\delta(t)$ のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad (5.5)$$

となる。

[注] デルタ関数をつぎのように定義することもある。

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \\ \text{かつ} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

(3) ランプ関数

図 5.2 のように、時間とともに一定速度で変化する関数をランプ関数という。
つまり、

$$f(t) = t \quad (5.7)$$

であるので、そのラプラス変換は、

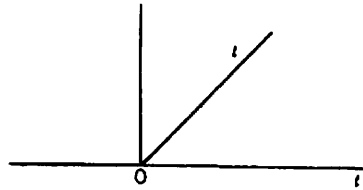


図 5.2 ランプ関数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

(4) $f(t) = e^{-at}$ のラプラス変換

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= \left[\frac{-1}{a+s} e^{-(a+s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5) $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換

オイラーの公式より、

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (5.10)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right] \\ &= \frac{1}{2j} \{ \mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

(6) $f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] \\
 &= \frac{1}{2}\{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) \\
 &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad (5.12)
 \end{aligned}$$

このように、定義に従って、 $f(t)$ のラプラス変換を求めることができる。
 章末の付表 (p. 115) に代表的な関数のラプラス変換表を示しておく。

例題 6.1 t^2 をラプラス変換せよ。**【解答】**

定義により、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t^2] &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt \\
 &= \left[t^2 \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\
 &= 0 + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\
 &= \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}
 \end{aligned}$$

例題 6.2 $\cos^2 t$ をラプラス変換せよ。**【解答】**

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos^2 t] &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{1}{s}\right) \\
 &= \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}
 \end{aligned}$$

5.2 ラプラス変換の性質

ラプラス変換の主要な性質を法則の形で述べる。ここで、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とする。

(1) 線形性

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \quad (5.13)$$

また、 c を定数とすれば、

$$\mathcal{L}[cf(t)] = c \mathcal{L}[f(t)] \quad (5.14)$$

(2) 実微分の法則

微分のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0+) \quad (5.15)$$

また、 n 階微分のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad (5.16)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s}f(0+) + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

ここで、 $f(0+)$ は $t > 0$ から 0 に近づいたときの $f(t)$ の値を表す。

同様に、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt \\ &= \left[f'(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= -f'(0+) + s\{sF(s) - f(0+)\} \\ &= s^2 F(s) - sf'(0+) - f'(0+) \end{aligned}$$

このような操作を続けると式 (5.16) が得られる。

(3) 実積分の法則

いま,

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_0^t f(t) dt \\ f^{(-2)}(t) &= \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt \\ &\vdots \\ f^{(-n)}(t) &= \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t f(t) (dt)^n}_n \end{aligned}$$

と書くことにすれば,

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}[f^{(-n)}(t)] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(0+)}{s^{n-k+1}} \quad (5.18)$$

(証明) 部分積分を用いれば,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^{(-1)}(t) e^{-st} dt &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(t) dt \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s} \end{aligned}$$

ここで, $f^{(-1)}(0+)$ は, $t > 0$ から 0 に近づいたときの $f^{(-1)}(t)$ の値を表す。

同様に,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(-2)}(t)] &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s} \right\} + \frac{f^{(-2)}(0+)}{s} \\ &= \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0+)}{s} \end{aligned}$$

このような操作を繰り返せば式 (5.18) が得られる。

(4) 複素推移の法則

$$\mathcal{L}[e^{sa} f(t)] = F(s \pm a) \quad (5.19)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{sa}f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{sa}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt \\ &= F(s-a) \end{aligned}$$

(5) 時間推移の法則

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-sa}F(s) \quad (a \geq 0) \quad (5.20)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] &= \int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-sa}F(s) \end{aligned}$$

ただし、 $u(t)$ は単位階段関数である。

〔注〕 $f(t-a)u(t-a)$ は $f(t)$ の波形を $a > 0$ だけ遅らせた波形になる。したがって、時間推移の法則は、時間領域で a だけ遅らせることは s 領域では e^{-sa} をかけることを意味している (図 5.3 参照)。

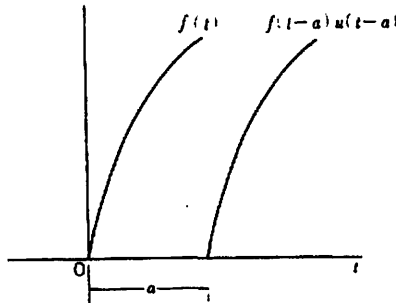


図 5.3 時間領域の推移

(6) 最終値の定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5.21)$$

(証明)

$sF(s) = f(0+) + \mathcal{L}[f'(t)]$ より,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) &= f(0+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0+) + \int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0+) + [f(t)]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)\end{aligned}$$

(7) 初期値の定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (5.22)$$

(証明)

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) &= f(0+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0+) + \int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0+) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t)\end{aligned}$$

(8) 相似法則

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0) \quad (5.23)$$

(証明)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt \\ (at = \tau \text{ と置けば}) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

(9) 複素微分の法則

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)] \quad (5.24)$$

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)] \quad (5.25)$$

(10) 複素積分の法則

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] \quad (5.26)$$

$$\underbrace{\int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty}}_n F(s) (ds)^n = \mathcal{L} [t^{-n} f(t)] \quad (5.27)$$

(11) 周期関数のラプラス変換

周期を a 秒とする周期関数 $f(t)$ が与えられたとき、 $f_1(t)$ を $0 < t < a$ では $f(t)$ に等しくそれ以外では 0 であるとすると、

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-as}} \quad (5.28)$$

(12) たたみ込み積分のラプラス変換

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] = F(s) G(s) \quad (5.29)$$

(証明)

$f(t)$, $g(t)$ のたたみ込み積分 (あるいは合成積) とは、

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (5.30)$$

のことで、これのラプラス変換を求める。

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left[\int_0^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} d\tau \right\} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

(ここで、 $t - \tau = \xi$ と変数変換し、 $\xi < 0$ で $f(\xi) = 0$ なることに注意すると)

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-s\xi} d\xi \right\} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= F(s) \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= F(s) G(s) \end{aligned}$$

式 (5.30) において、 $\tau > t$ では $f(t-\tau) = 0$ であるから、結局式 (5.29) が得られたことになる。

以上のようなラプラス変換の性質を知っていれば、ラプラス変換の計算が容易にできるようになる。後述する逆ラプラス変換を求めるときにも利用でき

る。

例題 5.3

$e^{-2t} \sin t$ のラプラス変換を求めよ。

【解答】

$f(t) = \sin t$ と置けば、

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2+1}$$

である。そこで、式 (5.19) を利用すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-2t} \sin t] &= F(s+2) \\ &= \frac{1}{(s+2)^2+1} \end{aligned}$$

例題 5.4

$\cos(t-\tau)u(t-\tau)$ のラプラス変換を求めよ。

【解答】

$f(t) = \cos t$ と置けば、

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+1}$$

である。そこで、式 (5.20) を利用すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(t-\tau)u(t-\tau)] &= e^{-\tau s} F(s) \\ &= \frac{se^{-\tau s}}{s^2+1} \end{aligned}$$

例題 5.5

$f(t)$ のラプラス変換が、

$$\frac{s+2}{s(s^2+3s+1)} \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ と } \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

を求めよ。

【解答】

最終値の定理より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+2}{s(s^2+3s+1)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s^2+3s+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

初期値の定理より、

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s+2}{s(s^2+3s+1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+2}{s^2+3s+2} \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

例題 5.6

te^{-3t} のラプラス変換を求めよ。

【解答】

$f(t) = e^{-3t}$ と置けば,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+3}$$

である。そこで、式 (5.24) を利用すれば,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[te^{-3t}] &= -F'(s) \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+3} \right) \\
 &= \frac{1}{(s+3)^2}
 \end{aligned}$$

例題 5.7

$t^{-1} \sin 2t$ のラプラス変換を求めよ。

【解答】

$f(t) = \sin 2t$ と置けば,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s^2+4}$$

である。そこで、式 (5.26) を利用すれば,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] &= \int_s^\infty F(s) ds \\
 &= \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4} ds \\
 &= \left[\tan^{-1} \frac{s}{2} \right]_s^\infty \\
 &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{2} = \cot^{-1} \frac{s}{2}
 \end{aligned}$$

例題 5.8

$\int_0^t e^{-s(t-\tau)} \sin 3\tau d\tau$ のラプラス変換を求めよ。

【解答】

$f(t) = e^{-5t}$, $g(t) = \sin 3t$ と置くと,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+5}$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{3}{s^2+9}$$

である。そこで、式 (5.29) を利用すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-5(t-\tau)} \sin 3\tau d\tau\right] &= F(s)G(s) \\ &= \frac{1}{s+5} \times \frac{3}{s^2+9} = \frac{3}{(s+5)(s^2+9)} \end{aligned}$$

5.3 ラプラス逆変換

時間関数 $f(t)$ のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

で定義したが、今度は逆に $F(s)$ を知って $f(t)$ を求めることをラプラス逆変換と呼び、記号 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ で表す。複素関数論によれば、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (5.31)$$

与えられる。ここに、 c は $f(t)$ のラプラス変換可能性を満たす最小の σ より大きい任意の実数である。

つぎに、ラプラス逆変換を求める方法を述べる。

一般に式 (5.31) の複素積分を計算することは容易でないが、最初に定義に基づいた求め方を示す。

定理 5.1

図 5.4 のように $F(s)$ の分母の根をすべて左半面に含むように積分路 $c-j\infty$, $c+j\infty$ を決めると、この直線の左側にすべての極*を含む。このとき、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = [F(s)e^{st} \text{ の領域内の留数の和}] \quad (5.32)$$

* $F(s) = B(s)/A(s)$ 。ただし、 $A(s)$, $B(s)$ は s の多項式とするとき、
 $B(s) = 0$ の根を $F(s)$ の零点 } という。
 $A(s) = 0$ の根を $F(s)$ の極 }

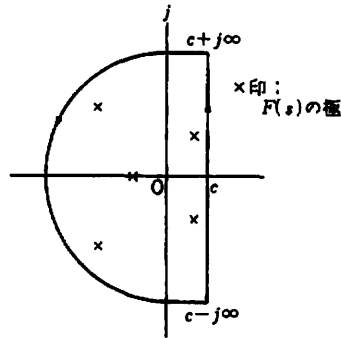


図 5.4 積分路

で求められる。なお留数はつぎのように計算できる。 $s = a$ で 1 位の極の場合の留数は、

$$R_a = \lim_{s \rightarrow a} [(s-a)F(s)e^{st}]$$

となり、 m 位の極ならば、

$$R_a = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left\{ (s-a)^m F(s)e^{st} \right\} \right]$$

である。

つぎに、 $F(s)$ が、

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (5.33)$$

と表せるとする。ここに、係数はすべて実数、 $n > m$ とする。このような場合には、ヘビサイドの展開定理によって容易にラプラス逆変換が得られる。

定理 5.2

(a) $A(s) = 0$ の根 $s_k (k=1, 2, \dots, n)$ は全部単根であり、 $B(s_k) \neq 0$ とする。しかるときは、

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} \cdot \frac{1}{s-s_k} \quad (5.34)$$

と部分分数に展開できる。ここに、 $A'(s_k)$ は、

$$A'(s_k) = \left[\frac{dA(s)}{ds} \right]_{s=s_k}$$

このとき、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{A(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t} \quad (5.35)$$

(b) 重根のある場合: $A(s)=0$ の根のうち, s_1, s_2, \dots, s_{n-r} は単根であり, α は r 重根であるとする。また, $\phi(s)$ を,

$$\phi(s) = (s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)}$$

とすると, この $\phi(s)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{A(s)}\right] &= \sum_{k=1}^{n-r} \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t} + \sum_{k=1}^r \left[\frac{1}{(k-1)!} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{d^{(k-1)}\phi(s)}{ds^{k-1}} \cdot \frac{t^{r-k}}{(r-k)!} e^{s t} \right]_{s=\alpha} \end{aligned} \quad (5.36)$$

となる。

ところで, 式 (5.33) を部分分数に分解するのに未定係数法を用いても容易にラプラス逆変換が得られる。

(a) $A(s)=0$ の根 $s_k (k=1, 2, \dots, n)$ は全部単根であり, $B(s_k) \neq 0$ とする。このとき,

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n} \quad (5.37)$$

のように部分分数に分解できる。未定係数 c_1, c_2, \dots, c_n は,

$$\begin{aligned} c_k &= \left[(s-s_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=s_k} \\ & \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.38)$$

によって決定することができる。ゆえに,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-s_k}\right] = e^{s_k t}$$

になることに注意すれば,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{A(s)}\right] = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t} \quad (5.39)$$

(b) 重根のある場合: $A(s)=0$ の根のうち, s_1, s_2, \dots, s_{n-r} は単根であり, α は r 重根であるとする。このとき,

$$\begin{aligned} \frac{B(s)}{A(s)} &= \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_{n-r})(s-\alpha)^r} \\ &= \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \dots + \frac{c_{n-r}}{s-s_{n-r}} \end{aligned}$$

$$+\frac{K_r}{(s-\alpha)^r}+\frac{K_{r-1}}{(s-\alpha)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_1}{s-\alpha} \quad (5.40)$$

のように部分分数に分解できる。未定係数 $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}, K_1, K_2, \dots, K_r$ のうち、 c_1, c_2, \dots, c_{n-r} は (a) と同様に式 (5.38) によって求められる。つぎに、 K_1, K_2, \dots, K_r の求め方を示す。

式 (5.40) の両辺に $(s-\alpha)^r$ を掛けると、

$$(s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} = (s-\alpha)^r \left\{ \frac{c_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{c_{n-r}}{s-s_{n-r}} \right\} + K_r + K_{r-1}(s-\alpha) + \cdots + K_1(s-\alpha)^{r-1} \quad (5.41)$$

となる。ここで、 $s = \alpha$ と置くと、

$$\left[(s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=\alpha} = K_r \quad (5.42)_1$$

となり、 K_r が決定する。つぎに、式 (5.41) を s で微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left\{ (s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right\} \\ &= r(s-\alpha)^{r-1} \left\{ \frac{c_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{c_{n-r}}{s-s_{n-r}} \right\} \\ &+ (s-\alpha)^r \frac{d}{ds} \left\{ \frac{c_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{c_{n-r}}{s-s_{n-r}} \right\} \\ &+ K_{r-1} + 2K_{r-2}(s-\alpha) + \cdots \\ &+ (r-1)K_1(s-\alpha)^{r-2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $s = \alpha$ と置くと K_{r-1} が決定する。

$$\left[\frac{d}{ds} \left\{ (s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right\} \right]_{s=\alpha} = K_{r-1} \quad (5.42)_2$$

同様にしていくと、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right\} \right]_{s=\alpha} = K_{r-2} \\ & \vdots \\ & \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left\{ (s-\alpha)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right\} \right]_{s=\alpha} = K_1 \end{aligned} \quad (5.42)_3$$

が決定できる。ゆえに、

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-\alpha)^r} \right] = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\alpha t}$$

になることに注意すれば、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{A(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n-r} c_k e^{s_k t} + \sum_{k=1}^r K_k \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_k t} \quad (5.43)$$

となる。

例題 5.9

$f(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s+2)}\right]$ を以下の3つの場合に基づいて求めよ。

- (1) ラプラス逆変換の定義に基づいて
- (2) ヘビサイドの展開定理に基づいて
- (3) 未定係数法による部分分数展開に基づいて

【解答】

- (1) $s=0$ と $s=-2$ における留数は定理 5.1 より,

$$R_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{3}{s(s+2)} \cdot e^{st} \right] = \frac{3}{2}$$

$$R_{-2} = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \cdot \frac{3}{s(s+2)} \cdot e^{st} \right] = -\frac{3}{2} e^{-2t}$$

したがって、式 (5.32) より,

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t}$$

- (2) 定理 5.2 を適用するためにつぎのような表を作る。

s	0	-2
$B(s)$	3	3
$A'(s)$	2	-2
$B(s)/A'(s)$	3/2	-3/2

したがって、式 (5.35) より,

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t}$$

- (3) 部分分数に分解する。

$$\frac{3}{s(s+2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+2}$$

未定係数 c_1, c_2 は式 (5.38) より,

$$c_1 = \left[s \times \frac{3}{s(s+2)} \right]_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = \left[(s+2) \times \frac{3}{s(s+2)} \right]_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

したがって、式 (5.39) より,

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t}$$

例題 5.10

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2}\right]$ を以下の3つの場合に基づいて求めよ。

- (1) ラプラス逆変換の定義に基づいて
- (2) ヘビサイドの展開定理に基づいて
- (3) 未定係数法による部分分数展開に基づいて

【解答】

(1) $s = -2$ における留数は定理 5.1 より,

$$R_{-2} = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \cdot \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \cdot e^{st} \right] \\ = 2e^{-2t}$$

$s = -3$ は 2 重根であることに注意して留数を求めると,

$$R_{-3} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} \left\{ (s+3)^2 \cdot \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \cdot e^{st} \right\} \\ = \lim_{s \rightarrow -3} \left\{ \frac{-2}{(s+2)^2} e^{st} + \frac{t(s+4)}{s+2} e^{st} \right\} \\ = -2e^{-3t} - te^{-3t}$$

したがって、式 (5.32) より,

$$f(t) = R_{-2} + R_{-3} \\ = 2e^{-2t} - 2e^{-3t} - te^{-3t}$$

(2) $s = -2$ は単根であるので式 (5.34) より,

$$\left[\frac{B(s)}{A'(s)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+4}{(s+3)^2 + 2(s+2)(s+3)} \right]_{s=-2} \\ = 2$$

$s = -3$ は 2 重根であることに注意して,

$$\phi(s) = \frac{s+4}{s+2}$$

とすれば,

$$\phi'(s) = \frac{-2}{(s+2)^2}$$

そこで、 $\phi(-3) = -1$ 、 $\phi'(-3) = -2$ となる。

したがって、式 (5.36) より,

$$f(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t} - te^{-3t}$$

(3) 部分分数に分解すると,

$$\frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{K_2}{(s+3)^2} + \frac{K_1}{s+3}$$

未定係数 c_1 は式 (5.38) より,

$$c_1 = \left[(s+2) \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \right]_{s=-2} = 2$$

K_1, K_2 は式 (5.42) より,

$$K_2 = \left[(s+3)^2 \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \right]_{s=-3} = -1$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[\frac{d}{ds} \left\{ (s+3)^2 \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \right\} \right]_{s=-3} \\ &= \left[\frac{-2}{(s+2)^2} \right]_{s=-3} = -2 \end{aligned}$$

したがって, 式 (5.43) より,

$$f(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t} - te^{-3t}$$

上の例でわかるようにラプラス逆変換を求めるのに, 各自やり易い方法で計算すればよい。また, $A(s)=0$ の根の中に複素根がある場合に, 部分分数に分解しラプラス逆変換するとき,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \sin \omega t \quad (5.44)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \cos \omega t \quad (5.45)$$

となることを覚えておけば便利である場合も多い。もちろん, 上式のラプラス逆変換は, これまでの方法で求めることができる。

例題 5.11

$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+6}{s^2+4s+13} \right]$ を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+6}{s^2+4s+13} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+6}{(s+2)^2+9} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} \right] + \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2} \right] \\ &= e^{-2t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{-2t} \sin 3t \\ &= e^{-2t} \left(\cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t \right) \end{aligned}$$

ちなみに, $s^2+4s+13=0$ の根は複素数である。

例題 5.12

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}\right]$ を求めよ。

【解答】

$$\frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

を部分分数に分解する。そのために、 $s^3+2s^2+2s+1=0$ の根を求めると、

$$s^3+2s^2+2s+1=(s+1)(s^2+s+1)$$

であるので根は、

$$s = -1, \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

となり複素根が存在することがわかる。このようなときは、つぎのように部分分数に分解する。

$$\frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2s+c_3}{s^2+s+1}$$

上式の両辺に、 s^3+2s^2+2s+1 を掛けて整理すると、

$$2s+1=c_1(s^2+s+1)+(s+1)(c_2s+c_3)$$

$$2s+1=(c_1+c_2)s^2+(c_1+c_2+c_3)s+c_1+c_3$$

両辺の s の係数を等しいと置くと、

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+c_2+c_3=2 \\ c_1+c_3=1 \end{cases}$$

となるから、 $c_1=-1$ 、 $c_2=1$ 、 $c_3=2$ が求まる。ゆえに、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{s+2}{s^2+s+1}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] \\ &= -e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{aligned}$$

(ここに, a_1, a_2, \dots, a_n は定数であり, $f(t)$ は t の既知関数である。)

について考える。初期条件は $t = 0$ において

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x_1 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(0) &= x_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

で与えられるとする。

いま, $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ と書くことにして, 初期条件 (5.47) を考慮しながら, 式 (5.46) をラプラス変換すると,

$$\begin{aligned} & \{s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} x^{(k-1)}(0)\} \\ & + a_1 \{s^{n-1} X(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} x^{(k-1)}(0)\} + \dots \\ & + a_{n-1} \{sX(s) - x(0)\} + a_n X(s) = F(s) \end{aligned}$$

となる。上式に式 (5.47) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \{s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} x_{k-1}\} \\ & + a_1 \{s^{n-1} X(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} x_{k-1}\} + \dots \\ & + a_{n-1} \{sX(s) - x_0\} + a_n X(s) = F(s) \end{aligned}$$

となる。これを $X(s)$ について整理すると,

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) X(s) \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} x_{k-1} + a_1 \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} x_{k-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + F(s) \end{aligned}$$

よって, s 領域での解は,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} x_{k-1} + a_1 \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} x_{k-1} + \dots + a_{n-1} x_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ & + \frac{F(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (5.48)$$

と表せる。したがって, 微分方程式の解は式 (5.48) にラプラス逆変換を施すことによって得られる。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^n s^{n-k} x_{k-1} + a_1 \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} x_{k-1} + \cdots + a_{n-1} x_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \right] \\
 &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \right] \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

式 (5.49) で、もし x_0, x_1, \dots, x_{n-1} が、

- ・任意定数ならば一般解を表す。
- ・既知定数ならば初期値問題の解である。

〔注〕 ラプラス変換による解法の場合には、初期時刻を $t=0$ に取る必要がある。もし他の時刻に初期時刻を設定したいときには、時間軸を移動させ新しい時間軸に対して初期時刻が 0 になるようにする。こうしてラプラス変換を適用して得られた解を元の時間に直せばよい。

例題 5.12

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 0 \tag{5.50}$$

をラプラス変換によって一般解を求めよ。

【解答】

A, B を任意定数として $t=0$ のとき、

$$y(0) = A \quad y'(0) = B$$

と置く。また、 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ と書くことにして式 (5.50) にラプラス変換を施せば、

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\{sY(s) - y(0)\} + 3Y(s) = 0$$

よって、

$$s^2 Y(s) - sA - B + 4\{sY(s) - A\} + 3Y(s) = 0$$

上式より $Y(s)$ を求めると、

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = As + 4A + B$$

$$\begin{aligned}
 \therefore Y(s) &= \frac{As + 4A + B}{s^2 + 4s + 3} = \frac{As + 4A + B}{(s+3)(s+1)} \\
 &= \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_2}{s+1} \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 &= [(s+3)Y(s)]_{s=-3} = -\frac{A+B}{2} \\
 c_2 &= [(s+1)Y(s)]_{s=-1} = \frac{3A+B}{2}
 \end{aligned} \right\} \tag{5.52}$$

ここで、 A, B が任意定数であるので、 c_1, c_2 も任意定数である。

式(5.51)にラプラス逆変換を施せば、

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \quad (5.53)$$

となり一般解が得られた。

この例題で、念のため初期値問題を解いてみよう。いま、 $y(0)=2, y'(0)=4$ とする。

式(5.52)より $c_1 = -3, c_2 = 5$ となるので、

$$y(t) = -3e^{-3t} + 5e^{-t}$$

一方、一般解(5.53)に初期条件を当てはめてみると、

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0) = -3c_1 - c_2 = 4$$

より、 $c_1 = -3, c_2 = 5$ となり、前の結果と一致していることがわかる。

例題 5.13

つぎの微分方程式の一般解をラプラス変換によって求めよ。

$$\frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = e^{-2t} \quad (5.54)$$

【解答】

A を任意定数として、 $t=0$ のとき、

$$x(0) = A$$

と置く。また、 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ と書くことにして、式(5.54)の両辺にラプラス変換を施せば、

$$\{sX(s) - x(0)\} - 3X(s) = \frac{1}{s+2}$$

よって、

$$\{sX(s) - A\} - 3X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(s-3)X(s) = A + \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{1}{(s-3)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s-3} + \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s+2} = \frac{A+1}{s-3} - \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{c}{s-3} - \frac{1}{5(s+2)} \quad (5.55)$$

ここに、 $c = A + 1/5$ である。明らかのように、 A は任意定数であるので c も任意定数

である。

式 (5.55) にラプラス逆変換を施せば、

$$x(t) = ce^{3t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \quad (5.56)$$

となり、一般解が得られた。

例題 5.14

つぎの微分方程式を解きなさい。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 7\frac{dx(t)}{dt} + 15x(t) = 2 \quad (5.57)$$

ただし、初期条件は、以下のとおり。

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \quad x''(0) = 0$$

【解 答】

初期条件を考慮して式 (5.57) をラプラス変換すると、

$$s^2X(s) + 7sX(s) + 15X(s) + 9X(s) = \frac{2}{s}$$

$$\therefore X(s) = \frac{2}{s(s^2 + 7s + 15 + 9)}$$

$$= \frac{2}{s(s+1)(s+3)^2}$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{K_2}{(s+3)^2} + \frac{K_1}{s+3}$$

ここに、

$$c_1 = [sX(s)]_{s=0} = \frac{2}{9}$$

$$c_2 = [(s+1)X(s)]_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$K_2 = [(s+3)^2X(s)]_{s=-3} = \frac{1}{3}$$

$$K_1 = \left[\frac{d}{ds} \left\{ (s+3)^2 X(s) \right\} \right]_{s=-3} = \frac{5}{18}$$

したがって、

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \frac{2}{9} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{5}{18}e^{-3t} \end{aligned}$$

例題 5.15

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 2 \sin t \quad (5.58)$$

を解け。ただし、 $x(0)=1$, $x'(0)=0$ とする。

【解答】

初期条件を考慮しながら、式 (5.58) をラプラス変換すると、

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = 2\mathcal{L}[\sin t]$$

$$s^2 X(s) - s + 4X(s) = \frac{2}{s^2 + 1}$$

$$(s^2 + 4)X(s) = s + \frac{2}{s^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore X(s) &= \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \\ &= \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2} \end{aligned}$$

上式にラプラス逆変換を施せば、

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \cos 2t + \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \end{aligned}$$

例題 5.16

つぎの連立微分方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + e^{-3t} & (5.59) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - x_2(t) + 5 & (5.60) \end{cases}$$

ただし、 $x_1(0)=x_2(0)=1$ 。

【解答】

初期条件を考慮して、式 (5.59)、式 (5.60) をラプラス変換すると、

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 = -X_1(s) + \frac{1}{s+3} \\ sX_2(s) - 1 = -2X_1(s) - X_2(s) + \frac{5}{s} \end{cases}$$

整理すると、

$$\begin{cases} sX_1(s) + X_1(s) = 1 + \frac{1}{s+3} \\ 2X_1(s) + (s+1)X_2(s) = 1 + \frac{5}{s} \end{cases}$$

行列を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} \\ \frac{5}{s} \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} \\ \frac{5}{s} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{s^2+s-2} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s+3} \\ \frac{s+5}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s^2-4s-15}{s(s-1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{s^2+6s+7}{(s-1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ところで,

$$\frac{s^2+4s^2-4s-15}{s(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-1} + \frac{c_3}{s+2} + \frac{c_4}{s+3}$$

ここで,

$$c_1 = \frac{15}{6}, \quad c_2 = -\frac{7}{6}, \quad c_3 = \frac{1}{6}, \quad c_4 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{s^2+6s+7}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_5}{s-1} + \frac{c_6}{s+2} + \frac{c_7}{s+3}$$

ここで,

$$c_5 = \frac{7}{6}, \quad c_6 = \frac{1}{3}, \quad c_7 = -\frac{1}{2}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{15}{6} - \frac{7}{6} e^t + \frac{1}{6} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \\ \frac{7}{6} e^t + \frac{1}{3} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

付表 ラプラス変換表

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$
5	$t^n (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$t^k (k > -1)$	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$ 注)
7	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
8	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
9	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
11	$(-)\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$
12	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
13	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
14	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
16	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
17	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
18	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$

19	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
20	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
21	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
22	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sqrt{\phi_r^2 + \phi_i^2} \sin(\omega t + \varphi)$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\phi_i}{\phi_r}$ $\phi_r = aA + B$ $\phi_i = \omega A$	$\frac{As + B}{(s - a)^2 + \omega^2}$
23	$\{A + (B - aA)t\} e^{-at}$	$\frac{As + B}{(s + a)^2}$

注) 記号 Γ はガンマ関数を表している。