

制 御 理 論

〔制 御 理 論〕

第 1 章 自動制御系

1.1 自動制御の概念	123
1.2 自動制御系の分類	127
1.3 伝達関数	128
1.4 ブロック線図	131
1.5 ブロック線図の等価変換	133

第 2 章 周波数特性

2.1 周波数応答	139
2.2 周波数伝達関数	140
2.3 周波数応答の表現法	142
2.3.1 ベクトル軌跡	142
2.3.2 ボード線図	143
2.3.3 ゲイン—位相線図	144
2.4 基本要素の周波数応答	144
2.4.1 比例要素	144
2.4.2 積分要素	145
2.4.3 1次遅れ要素	146
2.4.4 2次振動要素	151
2.4.5 むだ時間要素	153
2.5 ニコルス線図	154

第 3 章 安 定 性

3.1 安定性と特性方程式	159
---------------	-----

3.2	ラウスの安定判別法	162
3.3	フルビッツの安定判別法	164
3.4	ナイキストの安定判別法	166
3.5	ボード線図による安定判別法	168

第4章 定常特性

4.1	定常偏差	171
4.2	目標値に対する定常偏差	172
4.3	制御系の形	174
4.4	外乱に対する定常偏差	177

第5章 過渡特性

5.1	過渡応答	179
5.2	過渡特性	184

第6章 制御系の設計

6.1	設計の概要	191
6.2	サーボ系の設計	193
6.2.1	直列補償法	193
6.2.2	フィードバック補償	197
6.3	プロセス制御系の設計	198
6.3.1	プロセス制御系の制御対象	198
6.3.2	PID制御	198
6.3.3	ジエグラ・ニコルスの限界感度法	199

演習問題	201
参考資料・ベクトル軌跡	209

第 1 章

自動制御系

1.1 自動制御の概念

最初に制御の定義から始める。

定義 1 制御 (control)

「ある目的に適合するように、対象となっているものに所要の操作を加えること」。

定義 2 自動制御 (automatic control)

「制御装置によって自動的に行われる制御。」

次に、制御に対する具体的なイメージが浮かぶようにするために、船の操舵を例に取り上げる。いま、図 1.1 のように船は a 地点に行くことを希望しているが、風、潮流、波等の影響によって実際に進んでいる船首の方向は b 地点の方であるとする。このとき船の操舵手は何をすればよいのだろうか。船の目的地 a と実際に進行している方向 b との差 θ を零にするように舵を動かせば、無事目的地 a に到達できる。この例を上述した制御の定義にあてはめて考えてみると、次のような対応関係があることは容易にわかるだろう。

- ・目的：目的地 a に行くこと

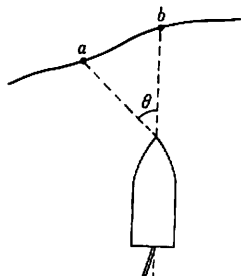


図 1.1 船の操舵

- ・対象となっているもの：船
- ・操作：舵を動かすこと

このように、上述した例は制御の例であり、この場合は所要の操作を人間が行っているので手動制御という。もし、この所要の操作を人間でなく、 a と b との方向の差に対応して自動的に舵を動かす装置(制御装置)を用いて行なうならば、自動制御である。

また、制御対象である船と制御装置を含む全システムを総称して自動制御系という。

次の例として 図 1.2 に示した直流発電機の自動電圧調整を取り上げる。

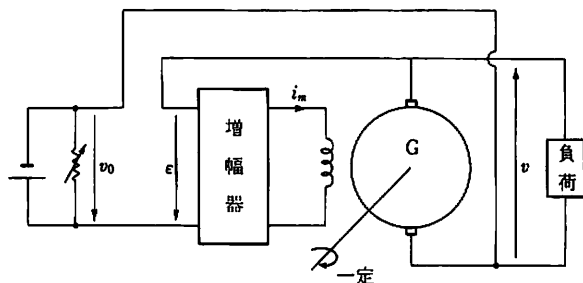


図 1.2 直流発電機の自動電圧調整

いま、直流発電機は一定の回転速度で駆動されている。この直流発電機に負荷がつながれており、負荷の変動によって直流発電機の端子電圧にゆらぎが生じる。そこで、負荷が変動しても直流発電機の端子電圧がある希望する値を取り続けるような自動制御系が、自動電圧調整である。

直流発電機は、界磁電流を変化させると端子電圧を変化させることができる。すなわち、界磁電流を増加させれば端子電圧は増加し、界磁電流を減少させれば端子電圧は減少する。この動作を自動的に行うために、界磁電流 i_m を目標電圧 v_0 と発電機端子電圧 v の差 $\epsilon = v_0 - v$ の関数として $i_m = k\epsilon$ となる増幅器を用いている。これをブロック線図(1.4節で説明する)を用いてこの制御系の信号伝達の様子を描くと 図 1.3 となる。この場合も制御の定義にあてはめて考えてみると、

- ・目的：直流発電機の端子電圧を負荷変動にかかわらず一定値にすること

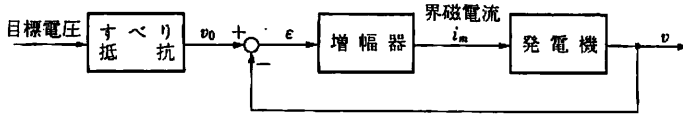


図 1.3 自動電圧調整のブロック線図

- ・対象となっているもの：直流発電機
- ・操作：界磁電流

となる。

この制御系をみてわかるように、操作量(界磁電流)を決定するのに制御対象(直流発電機)の出力である制御量(発電機の端子電圧)を利用しているので、信号伝達に閉ループを構成している。このように信号伝達に閉ループを伴った制御系を閉ループ制御系、あるいはフィードバック制御系という。一方、界磁電流を決定するのに発電機の端子電圧の情報を利用しないならば、信号伝達に閉ループができないので、このような制御系を開ループ制御系という。

図 1.4 にフィードバック制御系の標準構成を示す。図中の用語などの説明を以下に示す。

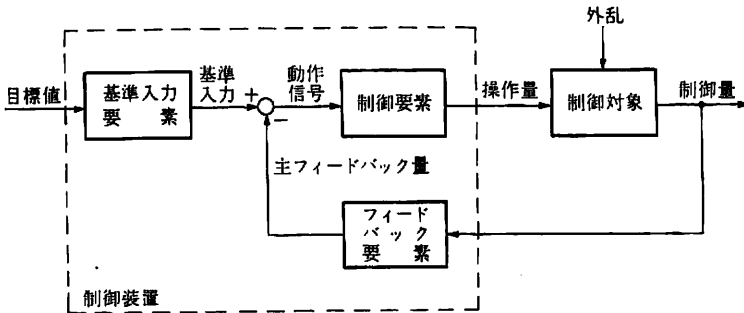


図 1.4 フィードバック制御系の標準構成

目標値：制御系において、制御量はその値をとるように目標として与えられる量。プロセス制御では設定値という。

基準入力：制御系の閉ループに直接加えられる入力信号で、目標値に対して決まった関係を持ち、主フィードバック量がそれと比較されるもの。

動作信号：基準入力と主フィードバック量との差で制御系の制御動作を起こさせるものとなる信号。

偏差：目標値から制御量を引いた値。

操作量：制御系において、制御量を支配するために制御対象に加える量。

制御量：制御対象に属する量のうちで、それを制御することが目的となっている量。

主フィードバック量：基準入力と比較するために、制御量からそれと一定の関係をもってフィードバックされる信号。

外乱：制御系の状態を乱そうとする外的作用。

制御装置：制御対象に組み合わされて制御を行う装置。

基準入力要素：目標値を基準入力に変換する要素。制御装置の中でこの部分を設定部ということもある。

制御要素：制御動作信号を操作量に変換する要素。一般に、調節部と操作部とからなり、調節部は動作信号を適当な量に変換し操作部へ送り出す部分であり、操作部は調節部からの信号を操作量に変え制御対象に働きかける部分である。

制御対象：制御の対象となるもので、機械、プロセス、システムなどの全体あるいは一部がこれにあたる。

フィードバック要素：制御量を主フィードバック信号に変える要素で、制御装置の検出部ということもある。

ここで、フィードバック制御を定義の形で与えておく。

定義 3 フィードバック制御 (feedback control)

「フィードバックによって制御量を目標値と比較し、それらを一致させるように訂正動作を行う制御。」

以後取り扱う制御系は、最初からフィードバック制御系であるという枠組の中で、制御系の解析（特性を調べること）や設計（与えられた仕様を満足するように構成すること）を実行することに注意しよう。どうしてかと言えば、現代制御理論の立場から見れば、フィードバック制御も一つの制御の形であるという考え方であり、フィードバック制御理論とは対照的である。

例題 1.1

つぎの自動制御を行うとき、その操作量および制御量は何か。

(1) 船の自動操舵

- (2) 直流発電機の自動電圧調整
- (3) ガスによる炉内温度制御

【解答】

- (1) 操作量：舵の位置，制御量：船首の方向
- (2) 操作量：界磁電流，制御量：発電機の端子電圧
- (3) 操作量：ガス流量，制御量：炉内温度

1.2 自動制御系の分類

自動制御系は、目標値の時間的性質、制御量の種類などによって分類されている。

(1) 目標値の時間的性質による分類

- (イ) 定値制御：目標値が時間的に一定である自動制御（例として、温度制御、発電機電圧調整器、速度制御）。
- (ロ) 追値制御：目標値が時間的に変化する自動制御。さらに次のように分類されている。
 - a. 追従制御：目標値が任意の時間的変化をする追値制御（例として、飛行機にレーダを自動的に追従させる場合）。
 - b. 比率制御：目標値がある他の量と一定の比率関係で変化する追値制御（例として、アンモニア合成装置において水素と窒素との混合比率を一定にする制御）。
 - c. プログラム制御：目標値があらかじめ定められた時間変化をする追値制御（例として、金属の熱処理工程の制御）。

(2) 制御量の種類による分類

- (イ) プロセス制御：温度、流量、圧力、液位などの工業プロセスの状態量を制御量とするもの。
- (ロ) サーボ機構：自動操縦、工作機械の制御のように物体の位置、方位、姿勢などの機械的変位を制御量とするもの。
- (ハ) 自動調整：電気量、速度、回転数などを制御量とするもの。

以上のほか種々の分類法があるが、ここでは省略する。しかし、これから考察する制御系をシステム理論的な分類に従って言えば、線形、動的、確定的、

連続時間的、集中定数かつ定係数のフィードバック制御系となる。

〔注〕 サーボ系という語は、追従制御の行われる制御系をいう。サーボ系の多くは、サーボ機構が主役を占めている。

1.3 伝達関数

制御系を構成している要素の入力と出力の関係は、一般に線形微分方程式で記述される。いくつかの要素が複雑に結合している制御系において、信号伝達の様子を微分方程式のまま行おうとすると全体的な見通しもよくないし、そんなに容易なことでない。しかし、要素の入力と出力の関係を微分方程式の代わりに以下で定義する伝達関数を用いれば、制御系全体の結合が代数計算で行えて、信号伝達の様子が直感的にわかり易い。

定義 4 伝達関数 (transfer function)

「すべての初期値を零とした場合の出力信号 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ と入力信号 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ との比を伝達関数 $G(s)$ という。」

すなわち、

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad \text{あるいは} \quad X(s) = G(s)Y(s) \quad (1.1)$$

ここで、すべての初期値を零と置いた理由を述べておく。図 1.5 の RC 回路で、

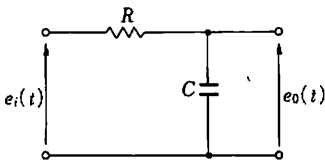


図 1.5 RC回路

$e_i(t)$ が入力信号、 $e_o(t)$ が出力信号である。いま、 $t=0$ において、 $e_o(0) \neq 0$ ならば、つまり、キャパシタに初期電荷が存在するならば、入力信号が入らなくても出力信号が出てくることになる。伝達関数は、

入出力間の信号伝達の様子を示すものであるから、上記のような事態が起こると本来の意味を失ってしまう。したがって、この場合にはキャパシタの初期電荷は零として、伝達関数を求めればよい。

例題 1.2

前掲の図 1.5 の RC 回路で入力を $e_i(t)$ 、出力を $e_o(t)$ としたときの伝達関数を求めよ。

【解答】

図 1.6 のように、RC を流れる電流を $i(t)$ とすれば、回路の方程式は、

$$\begin{cases} Ri(t) + e_0(t) = e_i(t) & (1.2) \\ e_0(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt & (1.3) \end{cases}$$

となる。初期条件は零として、式(1.2)、式(1.3)のラプラス変換をとれば、

$$\begin{cases} RI(s) + E_0(s) = E_i(s) & (1.4) \\ E_0(s) = \frac{1}{Cs} I(s) & (1.5) \end{cases}$$

となる。 $E_i(s)$ と $E_0(s)$ の関係式を求めるために、式(1.4)、式(1.5)より $I(s)$ を消去する。

$$(RCs + 1)E_0(s) = E_i(s) \quad (1.6)$$

式(1.6)より、伝達関数は次のように求まる。

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + RCs} \quad (1.7)$$

ここで、 $E_0(s) = \mathcal{L}[e_0(t)]$, $E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$, $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$ とした。以下でも同様の記号を用いる。

例題 1.3

図 1.7 のシステムのように、入出力間の関係が次のような定係数線形微分方程式で記述されるとき、伝達関数を求めよ。

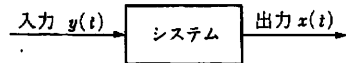


図 1.7 【例題 1.3】

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \\ & = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t), \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (1.8)$$

【解答】

式(1.8)を初期条件を零としてラプラス変換する。

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) Y(s) \end{aligned}$$

したがって、伝達関数 $G(s)$ は次式となる。

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.9)$$

例題 1.4

図 1.8 の回路の伝達関数を求めよ。ただし、 $e_i(t)$ を入力、 $e_0(t)$ を出力とする。

【解答】

キルヒホッフの第1法則(電流法則)より、回路方程式は、

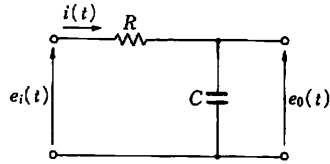


図 1.6 【例題 1.2】

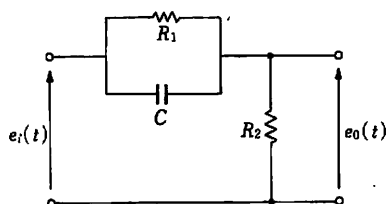


図 1.8 【例題 1.4】

$$\frac{e_i(t) - e_o(t)}{R_1} + C \frac{d(e_i(t) - e_o(t))}{dt} = \frac{e_o(t)}{R_2} \quad (1.10)$$

となる。式 (1.10) を初期条件を零としてラプラス変換すると、

$$\frac{1}{R_1} \{E_i(s) - E_o(s)\} + Cs \{E_i(s) - E_o(s)\} = \frac{1}{R_2} E_o(s) \quad (1.11)$$

上式を整理すると、

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + Cs\right) E_o(s) = \left(\frac{1}{R_1} + Cs\right) E_i(s)$$

したがって、伝達関数は次式となる。

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + CR_1 R_2 s}{R_1 + R_2 + CR_1 R_2 s} \quad (1.12)$$

例題 1.5

入力 $y(t)$ と出力 $x(t)$ との関係が次のようなたみ込み積分の形で表されるとき、このシステムの伝達関数を求めよ。

$$x(t) = \int_0^t y(t-\sigma) g(\sigma) d\sigma \quad (1.13)$$

【解答】

式 (1.13) をラプラス変換すると、

$$X(s) = Y(s)G(s)$$

となるので、伝達関数の定義より次式となる。

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.14)$$

上の例題で、 $g(t)$ はインパルス応答 (第5章参照) であり、 $t < 0$ で $g(t) = 0$ な性質 (物理的実現性という) を仮定している。大事なことは、“伝達関数はインパルス応答をラプラス変換したものである” ということである。

表 1.1 に基本要素の入出力間の方程式と伝達関数をまとめておくので、読者は自分で計算して確認して欲しい。

【注】 自動制御では、特にことわらなくても $t \geq 0$ で定義された時間関数 ($t < 0$ では零) を取り扱っていることに注意しよう。

表 1.1 基本要素の伝達関数 ($y(t)$: 入力, $x(t)$: 出力)

名 称	微分方程式	伝達関数	摘 要
比例要素	$x=Ky$	K	K : 比例ゲイン
積分要素	$T_I \frac{dx}{dt} = y$	$\frac{1}{T_I s}$	T_I : 積分時間
微分要素	$x=T_D \frac{dy}{dt}$	$T_D s$	T_D : 微分時間
1次遅れ要素	$T \frac{dx}{dt} + x = y$	$\frac{1}{1+Ts}$	T : 時定数
2次振動要素	$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 y$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	ζ : 減衰係数 ω_n : 固有角周波数
むだ時間要素	$x(t) = y(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	τ : むだ時間

1.4 ブロック線図

自動制御系の中での信号伝達の様子を、記号的に図示してわかりやすくしたものがブロック線図である。ブロック線図の構成要素は 図 1.9 に示すように、伝達要素、加え合わせ点、引出し点である。

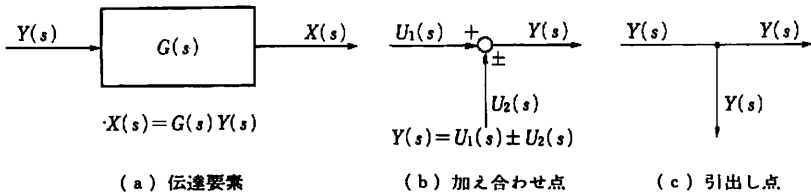


図 1.9 ブロック線図の構成要素

- (1) 伝達要素：四角で囲み，その中にその要素の伝達関数を記入する。
- (2) 加え合わせ点：信号の加減算を示す。
- (3) 引出し点：信号の分岐を示す。

ブロック線図で注意しなければいけないことは，入出力信号に矢印を付し，信号は必ず矢印の向きに伝わりその逆方向には伝わらないことである。

例題 1.6

図 1.10 の RC回路についてブロック線図を描け。

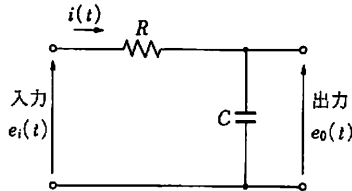


図 1.10 RC回路

【解答】

回路の方程式は、

$$\begin{cases} e_i(t) = Ri(t) + e_o(t) & (1.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt & (1.16) \end{cases}$$

上式を初期値を零としてラプラス変換する。

$$\begin{cases} E_i(s) = RI(s) + E_o(s) & (1.17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) & (1.18) \end{cases}$$

式 (1.17), 式 (1.18) に現れた信号を入力側から出力側へ順次伝達していくようにブロック線図を作り上げていく。

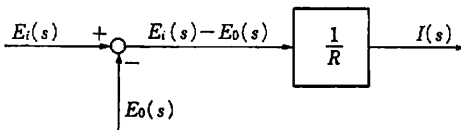


図 1.11 式 (1.17) のブロック線図

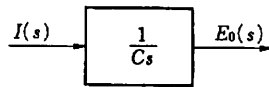


図 1.12 式 (1.18) のブロック線図

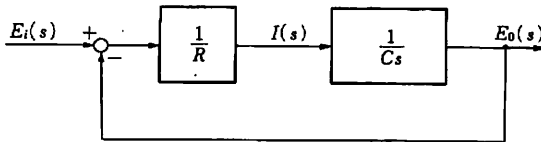


図 1.13 RC回路のブロック線図

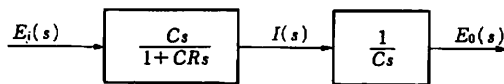


図 1.14 RC回路のブロック線図

(i) 式 (1.17) を変形する。

$$I(s) = \frac{1}{R}(E_i(s) - E_o(s))$$

上式に基づいてブロック線図を描くと 図 1.11 となる。

(ii) 式 (1.18) に基づいてブロック線図を描くと 図 1.12 となる。

(iii) 図 1.11 と 図 1.12 をまとめると 図 1.13 のようなフィードバック制御系になることがわかる。ところで、式 (1.15) 中の $e_0(t)$ を $\int i(t)dt/C$ と書き直して、上述した方法でブロック線図を求めてみると 図 1.14 のような閉ループ制御系となる。

このように、与えられたシステムに対するブロック線図は一義的には定まらないことに注意しよう。

1.5 ブロック線図の等価変換

実際の自動制御系のブロック線図を描くと、複雑で理論的考察が難しかったり、不必要な信号を含んでいる場合がある。そのために、ブロック線図に等価変換を施して取り扱い易い形にすることが多い。

まず、基本的な結合から説明する。

(1) 直列結合

図 1.15 のように伝達関数がそれぞれ $G_1(s)$, $G_2(s)$ の二つの要素を直列結合したとき、系全体としての伝達関数はどうなるか考えよう。

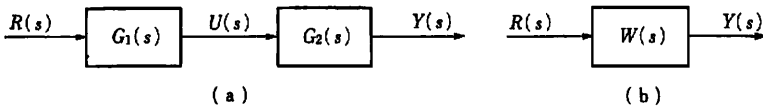


図 1.15 直列結合

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)}{R(s)} \cdot \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s) = W(s) \quad (1.19)$$

となるので、直列結合によって得られる系全体の伝達関数は各要素の伝達関数の積となる。

(2) 並列結合

図 1.16 のように並列結合した場合、系全体としての伝達関数は、

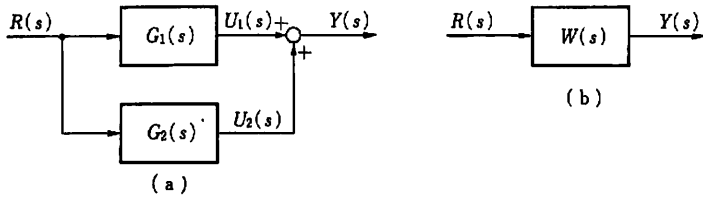


図 1.16 並列結合

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U_1(s) + U_2(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s) = W(s) \quad (1.20)$$

となり、並列結合によって得られる系全体の伝達関数は、各要素の伝達関数の和となる。

(3) フィードバック結合

図 1.17 のような場合には、

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)E'(s) \\ &= G(s)[R(s) - F(s)] \\ &= G(s)[R(s) - H(s)Y(s)] \end{aligned}$$

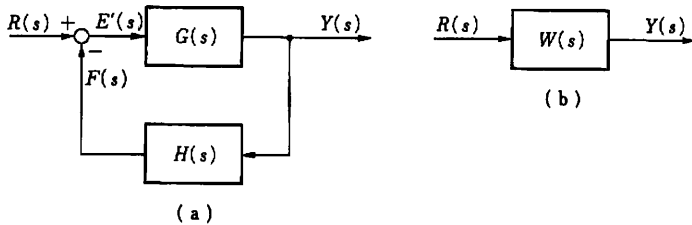


図 1.17 フィードバック結合

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= W(s) \end{aligned} \quad (1.21)$$

となる。ここで、フィードバック結合に現れる伝達関数には次のような名称がついている。

- $G(s)$: 前向きループの伝達関数
- $H(s)$: フィードバックループの伝達関数
- $G(s)H(s)$: 開ループ伝達関数あるいは一巡伝達関数

表 1.2 ブロック線図の等価変換

変換	変換前	変換後
伝達要素の交換		
引出し点の交換		
加え合わせ点の交換		
伝達要素と引出し点との交換		
伝達要素と加え合わせ点の交換		
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合		

・ $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$: 閉ループ伝達関数

〔注〕 フィードバック結合において、特に $H(s)=1$ の場合 (図 1.18 参照) を直結フィードバック結合といい、このときの閉ループ伝達関数は

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (1.22)$$

となる。

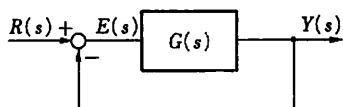


図 1.18 直結フィードバック結合

表 1.2 に上述した等価変換と同時に他の大事な等価変換を挙げておく。

例題 1.7

図 1.19 に示す自動制御系の伝達関数を求めよ。

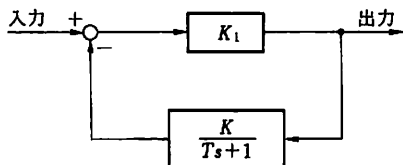


図 1.19 [例題 1.7]

【解答】

入力、出力のラプラス変換したものを $R(s)$ 、 $Y(s)$ とすれば、

$$Y(s) = K_1 \left\{ R(s) - \frac{K}{Ts+1} Y(s) \right\}$$

となるので、求める閉ループ伝達関数 $W(s)$ は次のようになる。

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{1 + \frac{K_1 K}{Ts+1}} = \frac{K_1(Ts+1)}{Ts+1+K_1 K}$$

例題 1.8

図 1.20 に示すような自動制御系の閉ループ伝達関数を求めよ。

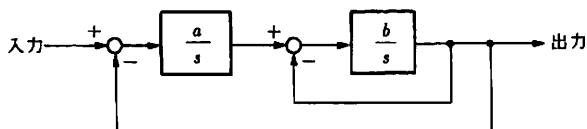


図 1.20 [例題1.8]

【解答】

内側の閉ループの伝達関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = \frac{\frac{b}{s}}{1 + \frac{b}{s}} = \frac{b}{s+b}$$

したがって、閉ループ伝達関数 $W(s)$ は、

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\frac{a}{s}G(s)}{1 + \frac{a}{s}G(s)} = \frac{\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s+b}}{1 + \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s+b}} \\ &= \frac{ab}{s^2 + bs + ab} \end{aligned}$$

例題 1.9

図 1.21 のブロック線図を簡略化せよ。

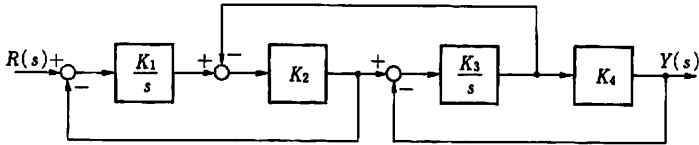
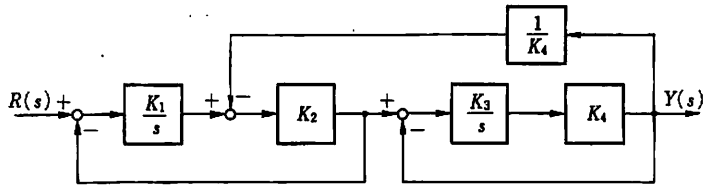


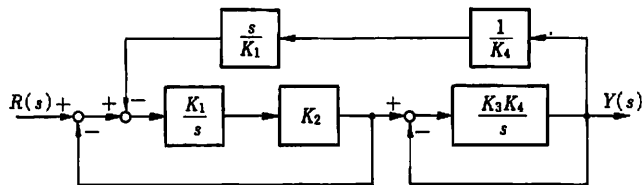
図 1.21 [例題 1.9]

【解答】

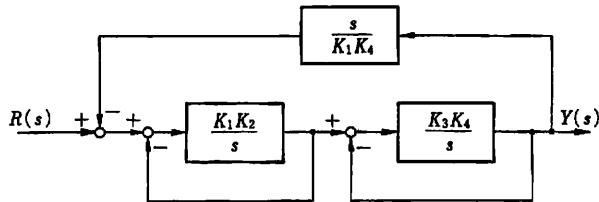
図 1.22 (a)~(e) に示す等価変換により簡略化できる (p. 138 参照)。



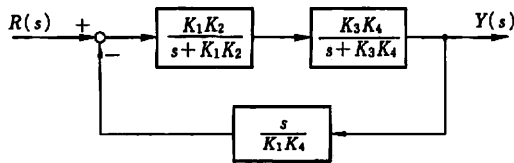
(a) 引出し点を要素の後へ移動



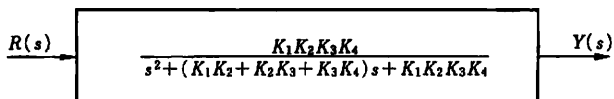
(b) 加え合わせ点を要素の前へ移動



(c) 加え合わせ点の置換



(d) 内側のフィードバック結合の等価変換



(e) 求める伝達関数

図 1.22 図 1.21 の簡略化

第 2 章

周波数特性

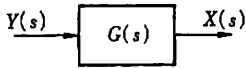
2.1 周波数応答

制御系の特性を調べるのに、ある入力を加えたときその出力がどうなるかによって行うのが基本である。第5章では、入力としてインパルス入力やステップ入力を用い、制御系の出力である応答波形の過渡状態における時間的变化によって制御系の特性を調べている。一方、周波数応答法は次に述べるように、制御系の特性を過渡応答法における時間領域でなく、周波数領域でとらえようとするものである。

すなわち、制御系に正弦波入力を加え、定常状態における出力を記録すると、対象としている系が時不変線形であるので出力も入力と同じ正弦波であるが、振幅と位相に差を生じる。入出力の振幅比と位相差は式(2.7)でわかるように、入力の周波数の関数になる。入力の周波数を変えたときにおける入出力の振幅比と位相差の変化の様子は、制御系固有の特性である。この特性を周波数特性といい、周波数特性に基づいて制御系の解析や設計を行う方法を周波数応答法という。

2.2 周波数伝達関数

図 2.1 のような伝達関数が $G(s)$ である系に、正弦波入力を加えたときの出力を求めてみる。入力を、



$$y(t) = A \sin \omega t \quad (2.1)$$

図 2.1 伝達関数

と置き、ラプラス変換すると、

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.2)$$

となり、出力は、

$$X(s) = G(s)Y(s) = G(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.3)$$

となる。

いま、 $G(s)$ がすべて異なる単極 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ をもち、 s_i の実数部はすべて負であるとする*。

そうすると、 $X(s)$ の極は $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ と $\pm j\omega$ であるから、 $X(s)$ にラプラス逆変換を施せば $x(t)$ が求まる。

$$\begin{aligned} x(t) &= A \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{(s-s_i)\omega G(s)}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=s_i} e^{s_i t} + \left[\frac{(s-j\omega)\omega G(s)}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=j\omega} e^{j\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(s+j\omega)\omega G(s)}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-j\omega} e^{-j\omega t} \right\} \\ &= A \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{(s-s_i)\omega G(s)}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=s_i} e^{s_i t} + \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$t \rightarrow +\infty$ とするとき、 s_i に対する条件と $G(-j\omega)$ は $G(j\omega)$ の共役**であることを用いると、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = A \left\{ \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \right\}$$

* 第3章で説明してあるように、この条件は考えている制御系が安定であるための必要十分条件である。すべて異なる単極としたのは、計算が楽になるためであって本質的な制約ではない。

$$\begin{aligned}
 &= A |G(j\omega)| \left\{ \frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - e^{-j\omega(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2j} \right\} \\
 &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

で $x(t)$ の定常値が求められる。

したがって、

$$\text{入出力の振幅比 (ゲインという)} : |G(j\omega)| \tag{2.8}$$

$$\text{入出力の位相差 (位相という)} : \angle G(j\omega) \tag{2.9}$$

が得られる。このように、伝達関数 $G(s)$ が与えられると $s = j\omega$ の置換によって、任意の ω に対するゲイン $|G(j\omega)|$ (ゲイン特性という) と位相 $\angle G(j\omega)$ (位相特性という) が定まり、周波数応答が求められる。結局、周波数応答は $G(j\omega)$ のゲインと位相を調べればよいので、 $G(j\omega)$ のことを周波数伝達関数という。

以上述べたように、周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は伝達関数 $G(s)$ が既知のときは、 $s = j\omega$ と置換することによって得られる。一方、 $G(s)$ が未知の場合には、それぞれの入力周波数に対するゲイン特性と位相特性を実験的に求めることができる。このような理由から、制御系の特性を求める方法として周波数応答法はよく用いられる。同時に、過渡現象の短い制御系に対しても、定常状態に着目する周波数応答法は便利である。

例題 2.1

図 2.2 の RC 回路で入力を $y(t)$ 、出力を $x(t)$

としたとき、

- (1) 周波数伝達関数
- (2) ゲイン
- (3) 位相

を求めよ。

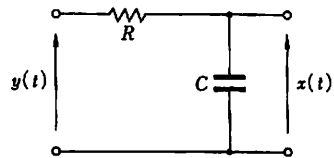


図 2.2 RC 回路

** この系のインパルス応答を $g(t)$ とすれば式 (1.14) より $s = j\omega$ と置換すれば、

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \tag{2.5}$$

であるので、 $G(j\omega)$ の共役 $\overline{G(j\omega)}$ は

$$\overline{G(j\omega)} = \int_0^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt$$

となる。したがって、

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} \tag{2.6}$$

【解答】

(1) このシステムの伝達関数 $G(s)$ は式 (1.7) より $G(s)=1/(1+RCs)$ であるから、 $s=j\omega$ と置換すると周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC} \quad (2.10)$$

が求まる。

(2) ゲイン $|G(j\omega)|$ は、 $G(j\omega)$ の絶対値を取ったものであるから、

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1+j\omega RC} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \end{aligned}$$

(3) 位相 $\angle G(j\omega)$ は、 $G(j\omega)$ の偏角であるから、

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega RC \quad (2.11)$$

2.3 周波数応答の表現法

広い範囲の周波数 ($\omega=0 \sim +\infty$) に対して周波数応答を見やすいグラフで表現する方法に、ベクトル軌跡、ボード線図、ゲイン—位相線図がある。

2.3.1 ベクトル軌跡

$G(j\omega)$ は、絶対値 $|G(j\omega)|$ 、偏角 $\angle G(j\omega)$ を持つ複素数、

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \quad (2.12)$$

であるから、複素平面にベクトルとして表すことができる。

角周波数 ω を 0 から $+\infty$ まで変えていったとき、このベクトルの先端は複素平面に一つの軌跡を描く。これをベクトル軌跡あるいはナイキスト軌跡と呼ぶ。

ベクトル軌跡には、 ω の値と ω の増加する方法に矢印を記入しておく必要がある (図 2.3 参照)。

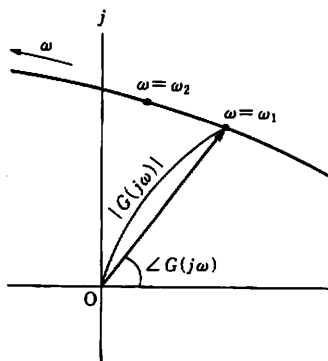


図 2.3 ベクトル軌跡

〔注〕 $G(-j\omega)$ は $G(j\omega)$ の共役であるため、 $G(j\omega)$ の ω を $-\infty \sim 0$ まで変化させたときのベクトル軌跡と $0 \sim +\infty$ のそれと実軸に対して対称となるので、通常は $\omega = 0 \sim +\infty$ だけを描くのである。

なお、巻末に基本的なベクトル軌跡の描き方を示したので参照されたい。

2.3.2 ボード線図

横軸に角周波数 ω [rad/s] を対数目盛でとり、縦軸にゲインと位相をとり周波数特性を表したものをボード線図という。ただし、ゲイン $|G(j\omega)|$ は対数量 $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ 、すなわちデシベル [dB] を用いて、位相 $\angle G(j\omega)$ は [度] を用いる (図 2.4 参照)。

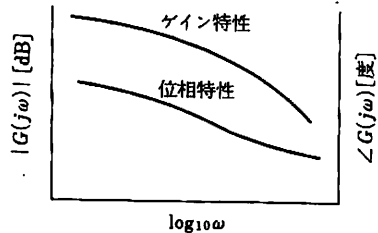


図 2.4 ボード線図

〔注1〕 2つの角周波数 ω_1, ω_2 の間に $\omega_2/\omega_1=10$ の関係があれば、 ω_1 と ω_2 は1デカード [dec] 異なるという。

〔注2〕 もし2つの要素 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ が直列結合しているならば、全体の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

である。このとき、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \tag{2.13}$$

であるから、ゲインと位相は次のようになる。

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)|$$

そこで、デシベルで計算すると、

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| \text{ [dB]} \tag{2.14}$$

となる。また、

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \text{ [度]} \tag{2.15}$$

である。上式からわかるように、個々の要素のボード線図を描き、ゲイン特性と位相特性をそれぞれ同じ ω に対してグラフ上で加え合わせることによって、全体のボード線図が得られる。要素の数が2つ以上になっても同じようにグラフ上で加え合わせればよい。

〔注3〕 周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の逆数 $1/G(j\omega)$ のボード線図の求め方を説明しておく。 $G(j\omega)$ を

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

と表現すれば、 $1/G(j\omega)$ は、

$$\frac{1}{G(j\omega)} = \frac{1}{|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}} = \frac{1}{|G(j\omega)|} e^{-j\angle G(j\omega)} \quad (2.16)$$

となる。すなわち、 $1/G(j\omega)$ のゲインと位相は、それぞれ次のようになる。

$$\text{ゲイン: } 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega)|} = -20 \log_{10} |G(j\omega)| \text{ [dB]} \quad (2.17)$$

$$\text{位相: } -\angle G(j\omega) \text{ [度]} \quad (2.18)$$

つまり、 $1/G(j\omega)$ のボード線図は、 $G(j\omega)$ のボード線図におけるゲイン特性を 0 [dB] で、位相特性を 0 [度] で折り返せばよいことがわかる。

2.3.3 ゲイン—位相線図

角周波数 ω をパラメータとして、縦軸にゲイン $|G(j\omega)|$ [dB] をとり、横軸に位相 $\angle G(j\omega)$ [度] をとって描いたものをゲイン—位相線図という (図 2.5 参照)。

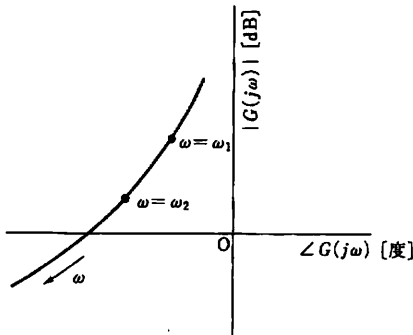


図 2.5 ゲイン—位相線図

2.4 基本要素の周波数応答

基本要素のベクトル軌跡とボード線図を求める。

2.4.1 比例要素

伝達関数は、

$$G(s) = K$$

であるので、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = K \quad (2.19)$$

したがって、

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} K \text{ [dB]} \quad (2.20)$$

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ \quad (2.21)$$

ベクトル軌跡は、原点から K だけ離れた実軸上の一点である (図 2.6 参照)。ボード線図のゲイン特性は、 $20 \log_{10} K$ [dB] 一定の直線となり、位相特性は 0° 一定の直線となる (図 2.7 参照)。

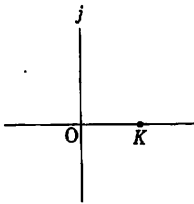


図 2.6 比例要素のベクトル軌跡

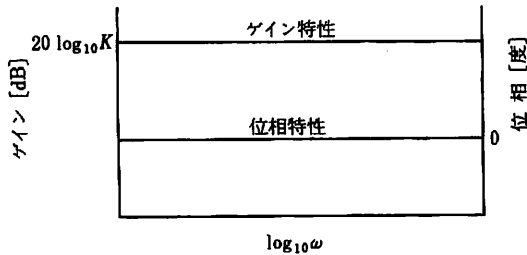


図 2.7 比例要素のボード線図

2.4.2 積分要素

伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

であるので、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (2.22)$$

したがって、

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega} = -20 \log_{10} \omega \text{ [dB]} \quad (2.23)$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ \quad (2.24)$$

すなわち、ベクトル軌跡は負の虚軸と一致し、 ω の増加と共に原点に近づく (図 2.8 参照)。ボード線図のゲイン特性は、 -20 [dB/dec]* の傾きをもった直線であり、位相特性は -90° 一定である (図 2.9 参照)。

* -20 [dB/dec] の傾きとは、 ω が 1 デカド (つまり 10 倍) 増加するとゲインが 20 [dB] 減少すること。

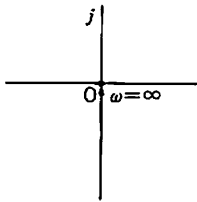


図 2.8 積分要素のベクトル軌跡

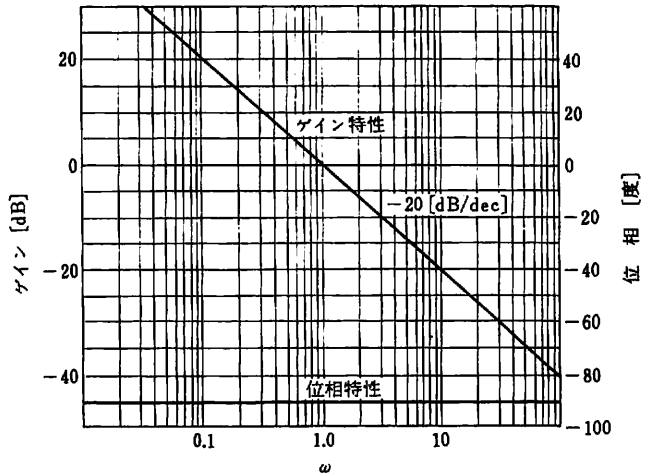


図 2.9 積分要素のボード線図

〔注〕 微分要素 $G(s) = s$ は積分要素 $G(s) = 1/s$ の逆数なので、微分要素のボード線図は積分要素のボード線図より容易に描くことができる。

2.4.3 1次遅れ要素

伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

であるので、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} \tag{2.25}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\ &= -20 \log_{10} [1+(\omega T)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ [dB]} \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega T \text{ [度]} \tag{2.27}$$

ベクトル軌跡を求めるには、次のようにすればよい。式 (2.25) より、

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+(\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$=x+jy \tag{2.28}$$

と置けば、

$$x = \frac{1}{1+(\omega T)^2} \geq 0 \quad (\omega = 0 \sim +\infty) \tag{2.29}$$

$$y = \frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2} \leq 0 \quad (\omega = 0 \sim +\infty) \tag{2.30}$$

である。式(2.29)、式(2.30)より、 $y/x = -\omega T$ となる。これを式(2.29)に代入して整理すると、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.31}$$

これは、中心が実軸上1/2のところにある半径1/2の円を表している。しかし、式(2.29)、式(2.30)から図2.10のように実軸の下半分の半円となることがわかる。

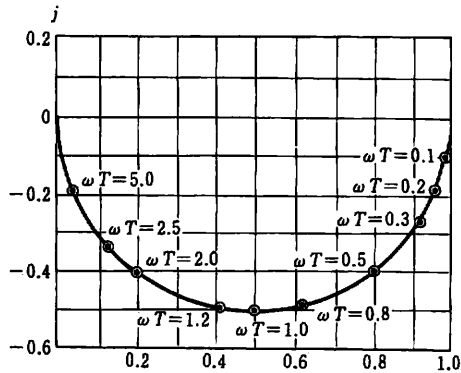


図 2.10 1次遅れ要素のベクトル軌跡

ボード線図のゲイン特性は、

- $\omega T \ll 1$ のとき $|G(j\omega)| = 20 \log_{10} 1 = 0$ [dB]
- $\omega T \gg 1$ のとき $|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega T} = -20 \log_{10} \omega T$ [dB]
- $\omega T = 1$ のとき $|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -3.01$ [dB]

したがってゲイン特性は、 $0 < \omega T < 1$ の範囲では0 [dB]の直線、 $1 < \omega T$ の範囲では-20 [dB/dec]の傾きをもつ直線に漸近することを示している。

$\omega T = 1$ のところでのこの2つの直線は交わり、この時の角周波数

$$\omega = \frac{1}{T} \tag{2.32}$$

を折点角周波数といい、この交点を折点という。折点における実際のゲインは-3.01 [dB]となるので、3.01 [dB]だけ漸近線と相違していることがわかる。

位相特性は、

- $\omega T \ll 1$ のとき $\angle G(j\omega) = 0^\circ$
- $\omega T \gg 1$ のとき $\angle G(j\omega) = -90^\circ$

・ $\omega T = 1$ のとき $\angle G(j\omega) = -45^\circ$

となる。

ゲイン特性を折線で近似するには、 $\omega = 1/T$ を折点とする折線で近似する。一方、位相特性は、 $\omega T = 0.1$ で 0° 、 $\omega T = 1$ で -45° 、 $\omega T = 10$ で -90° を通る直線で近似することがある。

これからボード線図を描けば 図 2.11 となる。

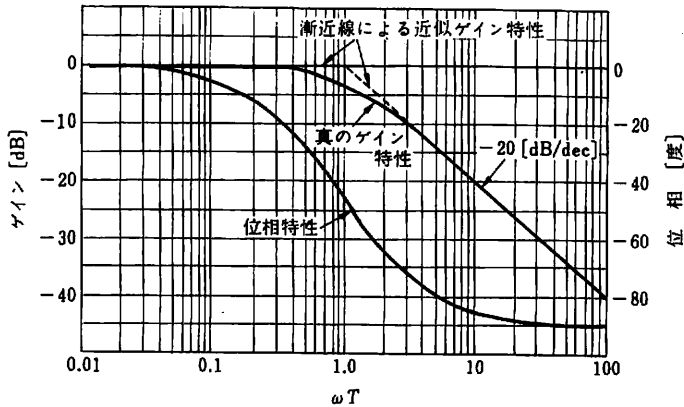


図 2.11 1次遅れ要素のボード線図

[注] 1次進み要素 $G(s) = 1 + Ts$ は1次遅れ要素 $G(s) = 1/(1 + Ts)$ の逆数なので、1次進み要素のボード線図は1次遅れ要素のボード線図より容易に描くことができる。

例題 2.2

伝達関数 $G(s) = K/(1 + Ts)$ のベクトル軌跡が K および T の値に応じてどのように変化するか調べよ。

【解答】

・ K の影響：この場合のベクトル軌跡の方程式は式 (2.31) の代わりに、

$$\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2 \quad (2.33)$$

となり、中心は実軸上 $K/2$ にあり半径は $K/2$ である。したがって、 K が大きくなると 図 2.12 のように半径が大きくなる。

・ T の影響： T はベクトル軌跡に添付される ω の目盛の間隔を変化させるだけでベクトル軌跡の形は同じである。

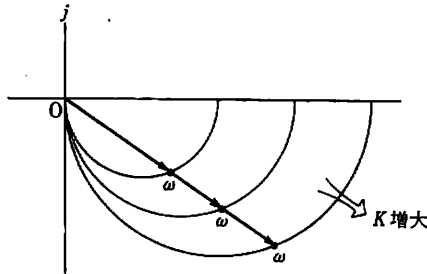


図 2.12 [例題 2.2] の答

例題 2.3

前例題と同じことをボード線図について調べよ。

【解答】

・ K の影響：1次遅れ要素に比例要素 K が直列結合していると考えられるから、1次遅れ要素のゲイン特性を $20 \log_{10} K$ だけ上 ($K > 1$ のとき) あるいは下 ($K < 1$ のとき) へ移動させる。位相特性は同じである。

・ T の影響：折点角周波数 $\omega = 1/T$ であるから、 T が大きくなれば左へ、 T が小さくなれば右へボード線図の形は変えないで平行移動させる。

例題 2.4

1次微分要素の伝達関数は $G(s) = Ts/(1+Ts)$ であり、この要素のベクトル軌跡とボード線図を求めよ。

【解答】

1次微分要素の周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \quad (2.34)$$

である。いま、上式を変形して、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega T}{1+j\omega T} = \frac{j\omega T(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2} \\ &= \frac{(\omega T)^2}{1+(\omega T)^2} + j \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \\ &= x + jy \end{aligned}$$

と置けば、

$$x = \frac{(\omega T)^2}{1+(\omega T)^2} \geq 0 \quad (\omega = 0 \sim +\infty) \quad (2.35)$$

$$y = \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \geq 0 \quad (\omega = 0 \sim +\infty) \quad (2.36)$$

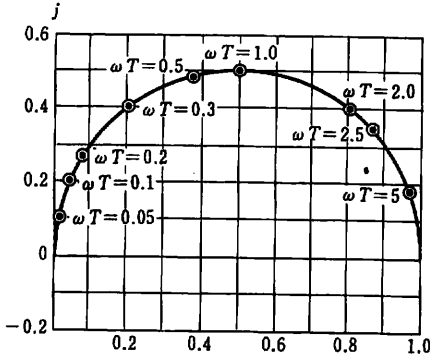


図 2.13 1次微分要素のベクトル軌跡

となる。式 (2.35), 式 (2.36) より, $x/y = \omega T$ となるので, これを式 (2.36) に代入して整理すると,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (2.37)$$

となる。これは, 中心が実軸上 $1/2$ のところにある半径 $1/2$ の円を表している。しかし, 式 (2.35), 式 (2.36) から 図 2.13 のように実軸の上半分の半円となる。

また, $G(j\omega)$ のゲイン特性は,

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{\omega T}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\ &= 20 \log_{10} \omega T - 20 \log_{10} \{1+(\omega T)^2\}^{1/2} \quad [\text{dB}] \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。上式第1項は, $\omega = 1/T$ で 0 [dB] を通る傾き 20 [dB/dec] の直線 (図 2.14 中の(a)) であり, 第2項は $\omega \rightarrow 0$ で 0 [dB] に漸近し, $\omega \rightarrow \infty$ で $\omega = 1/T$ で 0 [dB] を通る傾き -20 [dB/dec] の直線(b)に漸近する。

したがって, $|G(j\omega)|$ のゲイン特性は, (a), (b) をグラフ上で加え合わせた折線(c)に漸近する曲線(d)となる。

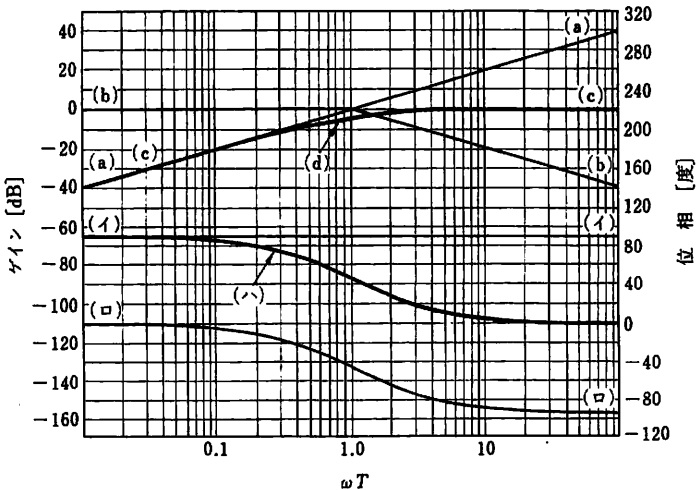


図 2.14 1次微分要素のボード線図

つぎに位相特性は、

$$\angle G(j\omega) = 90 - \tan^{-1} \omega T \quad [\text{度}] \quad (2.39)$$

となる。上式第1項は 90° 一定の直線(イ)であり、第2項は $\omega \rightarrow 0$ で 0° に漸近し、 $\omega \rightarrow \infty$ で -90° に漸近し、 $\omega = 1/T$ では -45° を通る曲線(ロ)である。したがって、 $\angle G(j\omega)$ の位相特性は、(イ)、(ロ)をグラフ上で加え合わせた曲線(ハ)となる。

2.4.4 2次振動要素

伝達関数は、

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

であるので、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \quad (2.40)$$

となる。したがって、

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega_n^2 - 10 \log_{10} \{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2\} \quad [\text{dB}] \quad (2.41)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad [\text{度}] \quad (2.42)$$

ベクトル軌跡を減衰係数 ζ をパラメータとして描くと 図 2.15 のようにな

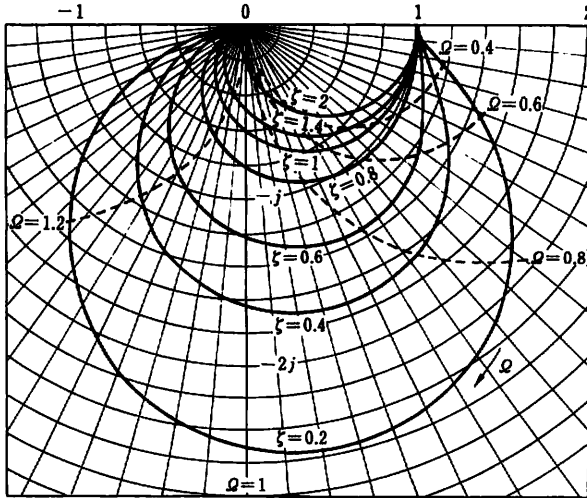


図 2.15 2次振動要素のベクトル軌跡 ($Q = \omega/\omega_n$)

り、 $\zeta > 1/\sqrt{2}$ ではすべての ω に対して $|G(j\omega)| < 1$ となる。

ボード線図も ζ をパラメータとして描くと 図 2.16 のようになる。

いま、ゲイン特性は $\omega \ll \omega_n$ のとき $|G(j\omega)| = 0$ [dB] の直線に、 $\omega \gg \omega_n$ のとき $|G(j\omega)| = -40 \log_{10} \omega$ の傾き -40 [dB/dec] の直線に漸近し、これらは $\omega = \omega_n$ で交わる。位相特性は、 $\omega \ll \omega_n$ のとき 0° 、 $\omega \gg \omega_n$ のとき -180° となり、 $\omega = \omega_n$ のとき ζ の値に関係なく -90° となる。

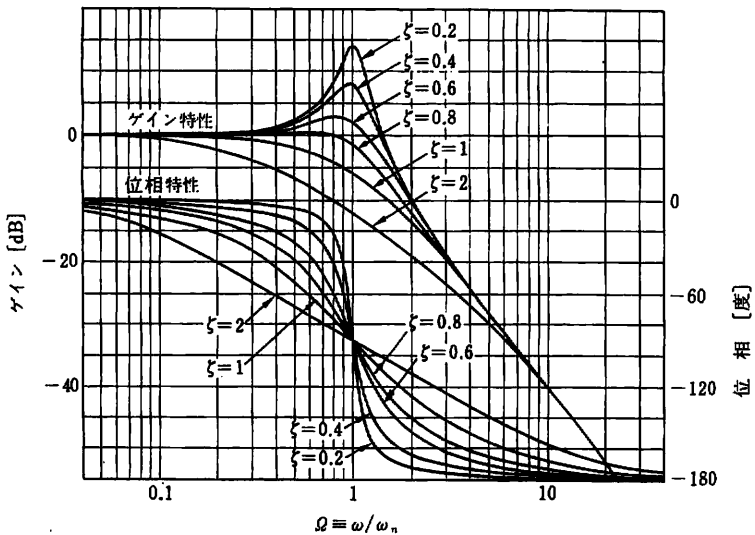


図 2.16 2次振動要素のボード線図

例題 2.5

2次振動要素のゲイン特性が最大値を示すゲインを M_p とし、そのときの角周波数を ω_p (共振角周波数という) とすれば、 M_p 、 ω_p を求めよ。

【解答】

2次振動要素のゲインは、

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (2.43)$$

であるから、

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0$$

より、

$$2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\zeta^2\omega_n^2\omega = 0$$

よって、

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{2.44}$$

この ω_p を式 (2.43) に代入すれば、次式が得られる。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{2.45}$$

[注] 式 (2.44) より、 $\zeta < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ なる条件を満たすとき、共振特性が現れる。

2.4.5 むだ時間要素

伝達関数は、

$$G(s) = e^{-sL}$$

であるから、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = e^{-j\omega L} \tag{2.46}$$

したがって、

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ [dB]} \tag{2.47}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{180\omega L}{\pi} \text{ [度]} \tag{2.48}$$

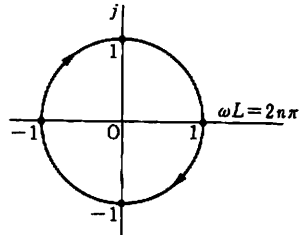


図 2.17 むだ時間要素のベクトル軌跡

このベクトル軌跡は 図 2.17 に示すように、半径1の円となる。また、ボード線図は 図 2.18 に示すように、ゲイン特性は 0 [dB] 一定であり、位相特性

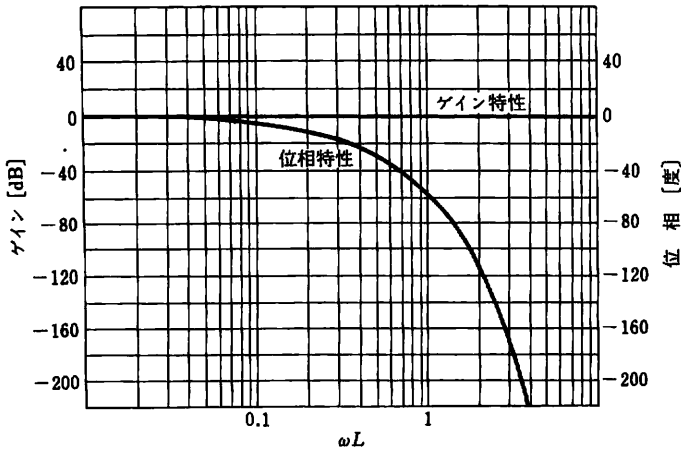


図 2.18 むだ時間要素のボード線図

は周波数が高くなるほど位相遅れが大きくなっている。

2.5 ニコルス線図

ここでは、フィードバック制御系の周波数特性を求める方法について述べる。すなわち、閉ループ伝達関数の周波数特性を求めるのであるが、直接閉ループ伝達関数から求めるのではなく、開ループ伝達関数の周波数特性から求める方法を説明する。

まず、図 2.19(a) に示すようなフィードバック制御系を考える。これは 図 2.19 (b) のように等価変換でき、 $1/H(s)$ と直結フィードバック制御系の直列結合とみなすことができる。

したがって、(a) の周波数特性は (b) の $1/H(s)$ の周波数特性と直結フィードバック制御系の周波数特性をボード線図上で加え合わせればよい。

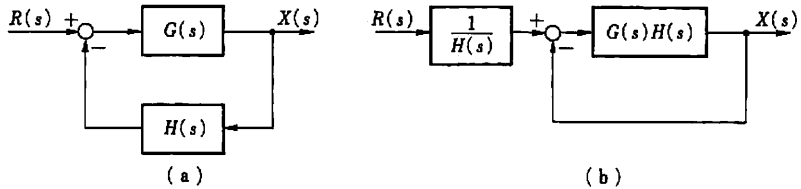


図 2.19 フィードバック制御系の等価変換

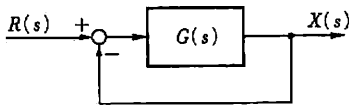


図 2.20 直結フィードバック制御系

そこで、以下では 図 2.20 のような直結フィードバック制御系の周波数特性を調べる。この系の閉ループ伝達関数 $W(s)$ は、

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.49)$$

である。ここで、 $s = j\omega$ と置けば閉ループ周波数伝達関数が得られて、

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \quad (2.50)$$

となる。いま、 $G(j\omega) = re^{j\theta}$ とおくと、 $W(j\omega)$ は、

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{re^{j\theta}}{1+re^{j\theta}} \\
 &= \frac{1}{1+\frac{1}{r}e^{-j\theta}} \\
 &= \frac{1}{1+\frac{1}{r}\cos\theta - j\frac{1}{r}\sin\theta} \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $W(j\omega) = Me^{j\alpha}$ と置けば、式 (2.51) より、

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}\cos\theta + \frac{1}{r^2}}} \tag{2.52}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sin\theta}{r + \cos\theta} \tag{2.53}$$

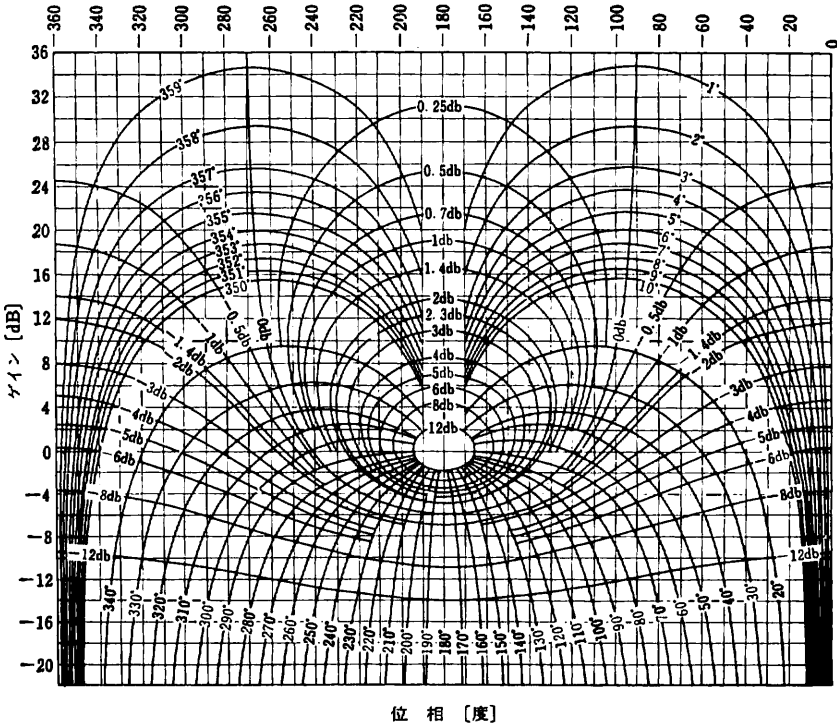


図 2.21 ニコルス線図 (図中 α の符号は全部負)

が得られる。いま、 r [dB] を縦軸に、 θ [度] を横軸にとったグラフ上に、式 (2.52) より M = 一定の軌跡 (M 線図という) と、式 (2.53) より α = 一定の軌跡 (α 線図という) を同時に描いた 図 2.21 をニコルス線図という。

このようにして得られたニコルス線図を用いれば、つぎのようにして M , α を求めることができ、結局閉ループ系の周波数特性が得られる。

- ① ニコルス線図上に $G(j\omega)$ のゲイン—位相線図を書き込む。このとき ω をパラメータとして記入する。
- ② ニコルス線図との交点における M , α の値を各 ω に対して順次求めることによって、 $W(j\omega)$ の周波数特性が得られる。

例題 2.6

図 2.22 の制御系で、開ループの周波数特性が図 2.23 のように与えられたとして、ニコルス線図を用いて閉ループの周波数特性を求めよ。

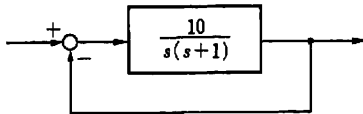


図 2.22 制御系

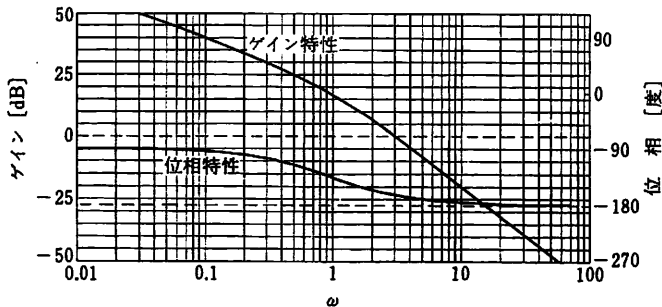


図 2.23 開ループの周波数特性

【解答】

図 2.23 のボード線図から、 $\omega = 0.3, 0.5, 1, 2, 3, 6, 10$ の各点における開ループの周波数特性をニコルス線図上にプロットすると 図 2.24 となる。つぎに、ニコルス線図を利用して、各 ω における閉ループの M , α を読み取り、ボード線図を描くと 図 2.25 となる。

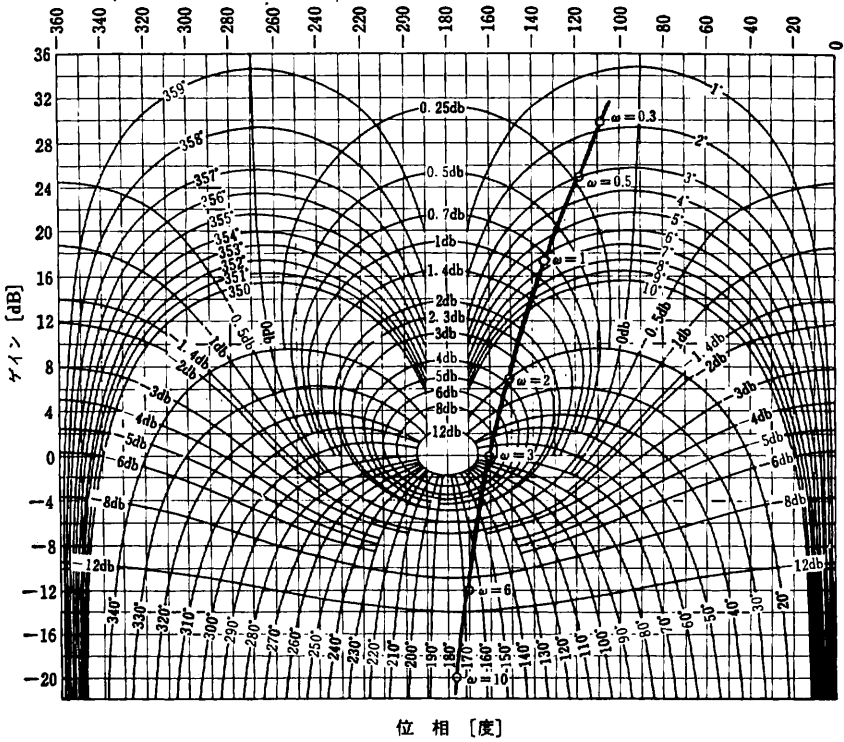


図 2.24 ニコルス線図上へのプロット

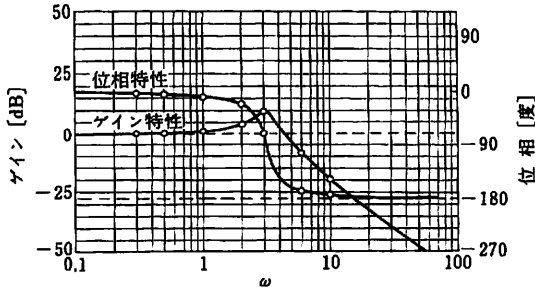
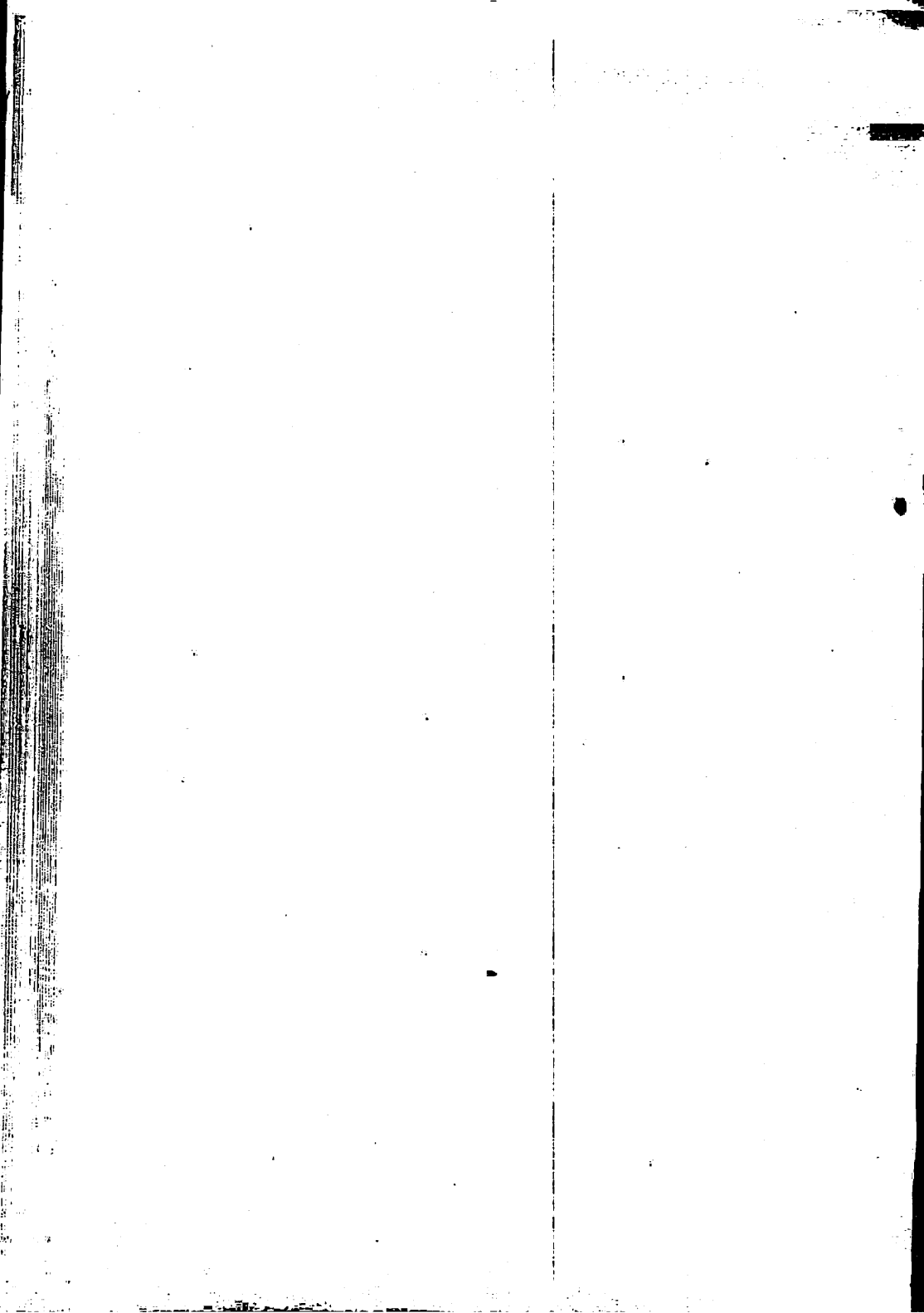


図 2.25 閉ループ系のボード線図



第 3 章

安 定 性

3.1 安定性と特性方程式

望ましい制御系とは、偏差（＝目標値－制御量）が零で、外乱による影響を打ち消すものである。このような制御系にするためには、まず第一に安定でなければならない。それでは安定性の定義から述べる。

定義 安定 (stability)

制御量を目標値に対してある一定の関係を保たせてあるような制御系において、目標値を変更したり、または外乱が加えられたりすると、この一定の関係は乱され過渡現象が起こる。目標値の変化が停止したり、外乱が取り除かれたとき、この過渡現象が時間の経過とともに消滅してしまつて、再びもとの関係が保たれるような系を安定であるといい、発散する系を不安定という。そして、過渡現象が一定周期で持続する場合は安定限界であり、安定、不安定の境界である。

上述した定義でわかるように、制御系が不安定になると制御系の構成要素が破壊して重大な事故を発生することもありうるので、制御系を安定に動作させることは殊の外重要なことである。

安定性の意味はわかったので、それでは制御系が与えられたとき、安定判別を行うには何をしたらいいのか調べてみよう。

制御系の安定性は、先に過渡現象の振舞いを調べることでであると述べた。そこ

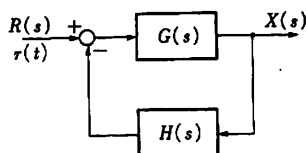


図 3.1 フィードバック制御系

で、過渡現象を引き起こす入力信号としてインパルス信号を用い、そのときのインパルス応答によって安定判別の必要十分条件を導き出す。図 3.1 のフィードバック制御系を考える。ここで、目標値を $r(t)$ と置き、 $r(t) = \delta(t)$ (このとき $R(s)$

$= 1$) であるインパルス入力とし、制御系のインパルス応答を $g(t)$ とする。

この制御系の閉ループ伝達関数は、

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.1)$$

であり、インパルス応答 $g(t)$ とは次の関係が成り立っている。

$$\frac{X(s)}{R(s)} = X(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (3.2)$$

式 (3.1)、式 (3.2) より、

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] \quad (3.3)$$

となる。いま、閉ループ伝達関数式 (3.1) の分母を零とした、

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.4)$$

を特性方程式といい、その根 (特性根という) を、 s_1, s_2, \dots, s_n とすると、式 (3.3) は、

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)} \right] \quad (3.5)$$

と書き直せる。ここに、 $A(s)$ は s の多項式である。式 (3.5) の逆ラプラス変換を実行すると、

$$g(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m c_k e^{s_k t}, & (s_1, s_2, \dots, s_m \text{ が単根のとき}) \\ \sum_{k=1}^l c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_1 t} + \sum_{k=l+1}^m c_k e^{s_k t} & (s_1 \text{ が } l \text{ 重根で, } s_{l+1}, \dots, s_m \text{ が} \\ & \text{単根のとき)*} \end{cases} \quad (3.6)$$

* (s_2, s_3, \dots, s_m) の中にも重根があっても以下の議論に一般性を失うことはない。

となる。

ところで、 s_k は複素数なので、

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

と置けば、

$$e^{s_k t} = e^{\sigma_k t} \cdot e^{j\omega_k t} \tag{3.7}$$

となる。上式で、 $t \rightarrow +\infty$ とすれば、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{s_k t} = \begin{cases} +\infty & (\sigma_k > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\sigma_k < 0 \text{ のとき}) \\ e^{j\omega_k t} & (\sigma_k = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。このことに注意しながら、式(3.6)において特性根に重根があっても無くても、すべての $s_k (k=1, 2, \dots, m)$ の実数部が負であれば、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0 \tag{3.8}$$

となることがわかる。したがって、インパルス応答は時間の経過とともに減衰するので、この場合には制御系は安定である。一方、もし $s_k (k=1, 2, \dots, m)$ の中に1つでも正の実数部を持つものがあれば、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \pm\infty \tag{3.9}$$

となるから、制御系は不安定である。また、 $s_k (k=1, 2, \dots, m)$ のうちいくつかが純虚数であって、あとの残りはすべて負の実数部を持つ場合には、振動を持続する項が残るので安定限界になる。

以上の説明から明らかなように、制御系の安定判別を行うことは特性根の実数部の正負を調べることである。幾何学的に表せば図3.2のように s 平面において特性根が、

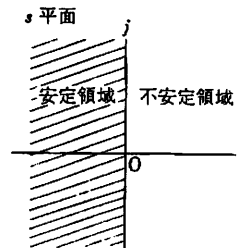


図 3.2 安定領域, 不安定領域

- ① すべて左半平面 (虚軸を含まない) にあれば安定
- ② 1つでも右半平面 (虚軸を含まない) にあれば不安定

③ いくつか虚軸上にあり、他の残りはすべて左半平面にあれば安定限界である。

次節以降に、特性方程式の根を実際に解くことなしに、特性根の実数部の正負を調べる安定判別法を述べる。

3.2 ラウスの安定判別法

特性方程式,

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (3.10)$$

において、次の2つの条件が満足されるならば、特性根の実数部はすべて負となりその系は安定である。

- ① 特性方程式の係数 a_0, a_1, \dots, a_n に零のものがなく、同符号であること。
- ② 特性方程式の係数からつぎの数列を作り、その数列の第1列がすべて同符号であること。

ラウスの数列

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots	\dots
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

ただし,

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

⋮

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

⋮

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

⋮

【注】 ラウスの数列において、第1列の要素の符号変化の回数不安定根の数になる。

例題 3.1

特性方程式が、

$$s^4 + 2s^2 + 7s + 6 = 0 \quad (3.11)$$

である制御系の安定判別を行え。

【解答】

特性方程式で s^3 の項が欠けているので、ラウスの安定判別法より不安定である。

例題 3.2

特性方程式が、

$$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 7s + 6 = 0 \quad (3.12)$$

である制御系の安定判別を行え。

【解答】

ラウスの安定判別法を用いる。

(1) 特性方程式の係数はすべて存在し、同符号である。

(2) ラウスの数列は、

$$\begin{array}{l|l} s^4 & a_0 = 1, & a_2 = 2, & a_4 = 6 \\ s^3 & a_1 = 2, & a_3 = 7, & a_5 = 0 \\ s^2 & b_1 = \frac{2 \times 2 - 1 \times 7}{2}, & b_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2}, & b_3 = 0 \\ & = -1.5 & = 6 & \\ s^1 & c_1 = \frac{-1.5 \times 7 - 2 \times 6}{-1.5}, & c_2 = \frac{-1.5 \times 0 - 2 \times 0}{-1.5} \\ & = 15 & = 0 & \\ s^0 & d_1 = \frac{15 \times 6 - (-1.5) \times 0}{15} \\ & = 6 & & \end{array}$$

ラウス数列の第1列は、1, 2, -1.5, 15, 6 となりすべて同符号とならないので不安定である。なお、2 から -1.5 と -1.5 から 15 へと 2 回符号変化しているので不安定根は 2 個ある。

念のため、式 (3.12) は因数分解が容易であるので特性根を具体的に求めてみると、

$$s = -1, -2, 1/2 \pm j \sqrt{11}/2$$

であり、不安定根が 2 個 ($1/2 \pm j \sqrt{11}/2$) あるのがわかる。

3.3 フルビッツの安定判別法

特性方程式,

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.13)$$

の根がすべて負の実数部をもつための必要十分条件は,

- ① 特性方程式の係数 a_0, a_1, \dots, a_n に零のものがなく, 同符号であること。
- ② 特性方程式の係数を並べた次のフルビッツ行列式 $H_i (i=1, 2, \dots, n)$ のすべてが正であること。

$$H_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ & & & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_i \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

(ただし, $k > n$ では $a_k = 0$ とする)

において,

$$H_1 = a_1 > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad H_n > 0$$

となることであること。

〔注〕フルビッツの安定判別法はラウスの安定判別法と等価である。つまり, ラウスの数列と, $a_1 = H_1, b_1 = H_2/H_1, c_1 = H_3/H_2, d_1 = H_4/H_3, \dots$ なる関係で結ばれている。

例題 3.3

特性方程式が,

$$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 7s + 6 = 0$$

である制御系の安定判別をフルビッツの方法を用いて行いなさい。

【解答】

- (1) 特性方程式の係数に零のものがなく, 同符号である。
- (2) フルビッツ行列式を作ると,

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -45 < 0$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 \\ .1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -270 < 0$$

よって、この系は不安定である。

例題 3.4

図 3.3 に示す制御系が安定であるための条件を求めよ。

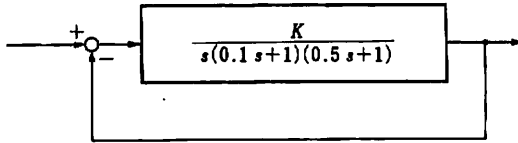


図 3.3 [例題 3.4]

【解答】

この系の特性方程式は、

$$1 + \frac{K}{s(0.1s+1)(0.5s+1)} = 0 \tag{3.15}$$

である。変形すると、

$$s(0.1s+1)(0.5s+1) + K = 0$$

より、次式となる。

$$0.05s^3 + 0.6s^2 + s + K = 0 \tag{3.16}$$

系が安定であるための条件をフルビッツの安定判別法より導く。

(1) 特性方程式 (3.16) の係数に零のものがなく、同符号であるためには、

$$K > 0 \tag{3.17}$$

(2) フルビッツ行列式 $H_i (i = 1, 2, 3)$ がすべて正となるためには、

$$H_1 = 0.6 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0.6 & K \\ 0.05 & 1 \end{vmatrix} = 0.6 - 0.05K > 0$$

これより、

$$K < 12 \tag{3.18}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0.6 & K & 0 \\ 0.05 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & K \end{vmatrix} = K(0.6 - 0.05K) > 0$$

これより、

$$0 < K < 12 \tag{3.19}$$

以上、式 (3.17) ~ 式 (3.19) によって、系が安定であるための K の範囲は、 $0 < K < 12$ となる。

3.4 ナイキストの安定判別法

この方法は、系の 1 巡周波数伝達関数のベクトル軌跡（ナイキスト線図ともいう）に着目して、系の特性根が複素平面上左半面にあるかどうかを調べるものである。

この方法は、ラウス、フルビッツの方法と比較して次のような特徴を有しているため広く用いられている。

- (i) 設計上重要な安定度*を知ることができる。
- (ii) 特性方程式が代数方程式で表現できない場合でも、1 巡伝達関数（開ループ伝達関数ともいう）の周波数応答の実測値が与えられている場合には適用できる。

ナイキストの安定判別法を以下に述べる。

- ① 1 巡伝達関数 $G(s)H(s)$ において、 $s = j\omega$ とおき、 $\omega = -\infty \sim +\infty$ に対するベクトル軌跡を描く。
- ② このベクトル軌跡が $(-1, j0)$ 点を反時計方向に N 回まわったとする。
- ③ $G(s)H(s)$ の極のうち、その実数部が正のもの数を P 個とする（ただし、 k 位の極は k 個と数える）。
- ④ 以上のとき、この系が安定であるための必要十分条件は、 $N = P$ である。

ところで、1 巡伝達関数 $G(s)H(s)$ が s 平面の右半面（虚軸を含まない）に極をもつことは、開ループが不安定であることを意味するので、実際上あまりない。このような場合には、上の判別法は次のように簡単化できる。

[簡単化したナイキストの安定判別法]

$G(s)H(s)$ の極が、 s 平面の右半面にない場合には、 $\omega = 0 \sim +\infty$ に対する $G(j\omega)H(j\omega)$ のベクトル軌跡が、 $(-1, j0)$ 点を左側にみて進むならばこの制

* 系が安定であっても、どの程度安定であるかを知ることは大事であり、この安定の程度を示す尺度としてゲイン余有や位相余有がある。

御系は安定、右側にみても進むならば不安定、 $(-1, j0)$ の点を通るならば安定限界である。

例題 3.5

開ループ伝達関数の極が、 s 平面の右半面にないとして、ナイキスト線図が 図 3.4 であるような制御系の安定判別を行え。

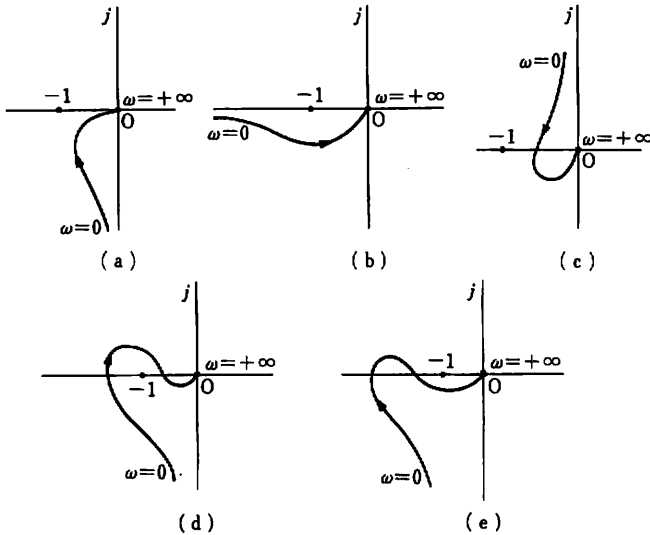


図 3.4 [例題 3.5]

【解答】

(a) 安定 (b) 安定 (c) 不安定 (d) 不安定 (e) 安定

例題 3.6

1 巡伝達関数が、

$$(1) G(s)H(s) = \frac{2}{1+s} \quad (3.20)$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{2e^{-3s}}{1+s} \quad (3.21)$$

で表される制御系の安定判別を行え。

【解答】

(1) 1 巡伝達関数のベクトル軌跡は 図 3.5 のようになるから安定。

(2) 1 巡伝達関数のベクトル軌跡は 図 3.6 のようになるから不安定。

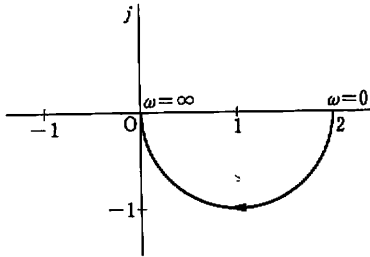


図 3.5 [例題 3.6] (1)の答

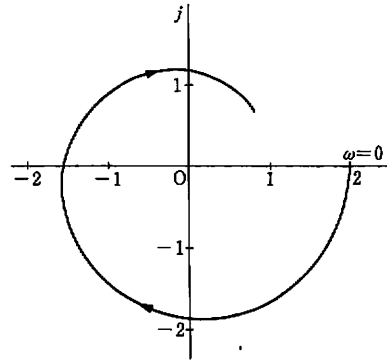


図 3.6 [例題 3.6] (2)の答

3.5 ボード線図による安定判別法

ナイキストの安定判別法は、1 巡伝達関数 $G(s)H(s)$ のベクトル軌跡に基づいて、閉ループ系の安定判別を行っている。これと同じことをボード線図上で行っているのが、ボード線図による安定判別法である。

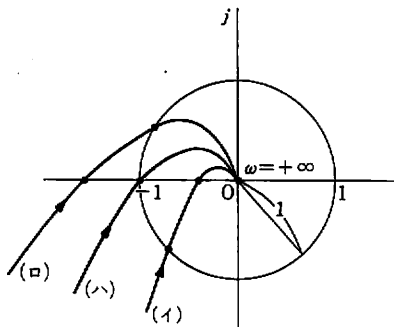


図 3.7 1 巡伝達関数のベクトル軌跡

1 巡伝達関数は安定 ($G(s)H(s)$ の極は、 s 平面の右半面でない場合) であるとすると、このとき、1 巡伝達関数のベクトル軌跡が、図 3.7 のような場合、簡単化したナイキストの安定判別法によれば、(a)安定、(b)不安定、(c)安定限界、であることがわかる。すなわち、1 巡伝達関数の位相交点*におけるゲインが、1 より小さければ安定、1 より大きければ不安定であるといえる。あるいは、1 巡伝達関数のゲイン交点**における位相が、 -180° より進んでいれば安定、遅れていれば不安定であるといえる。

* 1 巡伝達関数の位相が -180° となる点をいう。

** 1 巡伝達関数のゲインが $1 (= 0 \text{ [dB]})$ となる点をいう。

以上のことをボード線図上で行うと、次のように安定であるための条件を、ゲイン特性と位相特性に分けて考えることができる。

- ① 位相交点において、1巡伝達関数のゲインが 0 [dB] 以下であるならば安定 (図 3.8 参照)。

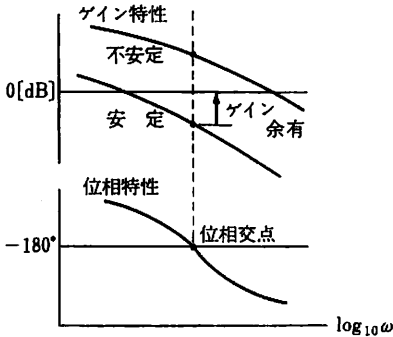


図 3.8 ボード線図上位相交点における安定判別

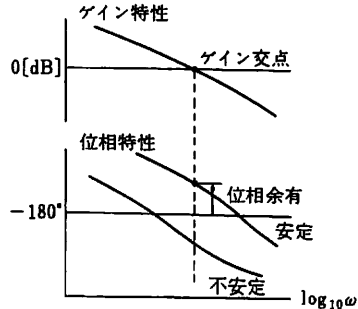


図 3.9 ボード線図上ゲイン交点における安定判別

ここで、位相交点におけるゲイン余有 g_m を次のように定義し、安定度の目安とすることができる。

$$g_m = 0 - 20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)|$$

$$= -20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)| \text{ [dB]} \quad (3.22)$$

- ② ゲイン交点において、1巡伝達関数の位相が -180° より進んでいるならば安定である (図 3.9 参照)。

ここで、ゲイン交点における位相余有 ϕ_m を次のように定義し、安定度の目安とすることができる。

$$\phi_m = \angle G(j\omega)H(j\omega) - (-180^\circ)$$

$$= \angle G(j\omega)H(j\omega) + 180^\circ \quad (3.23)$$

[注] 安定判別だけを行うならば、上記①か②のいずれか一方を調べれば十分である。

例題 3.7

開ループ伝達関数が、

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)} \quad (3.24)$$

なる直結フィードバック制御系がある。ゲイン余有が 20 [dB] となるように K を定めよ。

【解答】

この系の開ループ周波数伝達関数は、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+4)} \\ &= \frac{K}{-5\omega^2 + j\omega(4-\omega^2)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

したがって、位相は、

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega(4-\omega^2)}{-5\omega^2}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{4-\omega^2}{5\omega}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

そこで、位相交点における ω を求めるためには、

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ \quad (3.27)$$

となる ω を求めればよい。よって、位相交点において、 $\omega = 2$ である。

一方、ゲインは

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(5\omega^2)^2 + [\omega(4-\omega^2)]^2}} \quad (3.28)$$

であるので、 $\omega = 2$ のときのゲインは、

$$\begin{aligned} |G(j2)| &= \frac{K}{20} \\ &= 20 \log_{10} \frac{K}{20} \text{ [dB]} \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。そこで、この系のゲイン余有 g_m は

$$g_m = -20 \log_{10} \frac{K}{20} \text{ [dB]} \quad (3.30)$$

となる。題意より、

$$-20 \log_{10} \frac{K}{20} = 20 \quad (3.31)$$

となるためには、ゲイン K は

$$K = 2 \quad (3.32)$$

である。

第 4 章

定 常 特 性

4.1 定常偏差

制御系の入力や外乱に変化が生じると系は過渡状態になり、前章で述べたように安定な系ならば時間が十分経てば定常状態になる。したがって、制御系の特性を評価するものとして過渡状態と定常状態の両方の特性を取り上げれば、すべての時間にわたって制御特性を評価することになり妥当である。過渡状態における特性は次章で述べることにして、本章では定常状態における特性を考える。

定常状態における特性として、このときの偏差（定常偏差という）を取り上げる。これは制御系の精度の良さの尺度となる。もちろん、望ましい制御系は定常偏差が零であるが、制御系の構成、入力や外乱の性質によって異なり、零にならないことがある。

図 4.1 の直結フィードバック制御系において偏差 $E(s)$ を求めてみる。

$$X(s) = G_2(s) \{ G_1(s) E(s) - D(s) \}$$

$$E(s) = R(s) - X(s)$$

より、

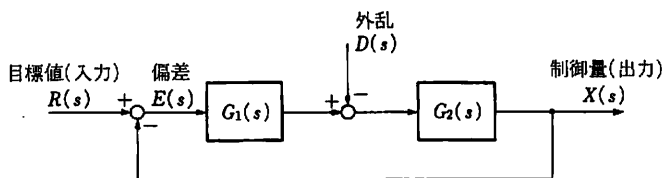


図 4.1 直結フィードバック制御系

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G(s)} D(s) \quad (4.1)$$

(ただし, $G(s) = G_1(s)G_2(s)$)

式 (4.1) より, 時間領域での偏差 $\epsilon(t)$ は,

$$\epsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)] \quad (4.2)$$

であるが, いまの場合は定常状態における定常偏差を ϵ とすれば,

$$\epsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) \quad (4.3)$$

の値だけを知らねばよい。そのためには, 式 (4.2) を計算しないでラプラス変換の最終値の定理が適用できて,

$$\epsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4.4)$$

によって計算できる。式 (4.1) は偏差を目標値と外乱に分けて表示した形になっており, 以下では別々に分けて定常偏差を考察する。

4.2 目標値に対する定常偏差

式 (4.1) において, $D(s) = 0$ として目標値に対する定常偏差を求める。

(1) 階段状入力に対する定常偏差

入力として大きさ A の階段状入力 (ステップ入力)

$$r(t) = Au(t) \quad \text{すなわち} \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

を選ぶと, 定常偏差 ϵ_p は最終値の定理より,

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1+K_p} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(ただし, $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ である)

この場合の定常偏差 ϵ_p を定常位置偏差といい, K_p を位置偏差定数という。
 ϵ_p を小さくするためには, $s = 0$ における $G(0)$ のゲイン K_p を大きくとればよい。なお, ϵ_p が 0 であるためには, $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$ となればよい。このことは, $G(s)$ が $s = 0$ に極をもつことを意味する。

(2) 定速度入力に対する定常偏差

目標値が一定速度で変化する定速度入力 (ランプ入力)

$$r(t) = Bt \quad \text{すなわち} \quad R(s) = \frac{B}{s^2}$$

のときの定常偏差 ϵ_v は

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{B}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{s+sG(s)} = \frac{B}{K_v} \end{aligned} \quad (4.6)$$

(ただし, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ である)

この ϵ_v を定常速度偏差といい, K_v を速度偏差定数という。

いま,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \begin{cases} 0 : G(s) \text{ が } s = 0 \text{ に極をもたない場合} \\ K_v : G(s) \text{ が } s = 0 \text{ に 1 次 の極をもつ場合} \\ \infty : G(s) \text{ が } s = 0 \text{ に 2 次 以上 の極をもつ場合} \end{cases}$$

であるので, ϵ_v が 0 であるためには $G(s)$ が $s = 0$ に 2 次以上の極をもてばよい。

(3) 定加速度入力に対する定常偏差

定加速度入力,

$$r(t) = \frac{1}{2} Ct^2 \quad \text{すなわち} \quad R(s) = \frac{C}{s^3}$$

に対する定常偏差 ϵ_a は,

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{C}{s^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{C}{K_a} \end{aligned} \quad (4.7)$$

(ただし, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ である)

この ϵ_a を定常加速度偏差といい, K_a を加速度偏差定数という。

いま,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \begin{cases} 0 : G(s) \text{ が } s=0 \text{ に極をもたないか 1 次の極をもつ場合} \\ K_a : G(s) \text{ が } s=0 \text{ に 2 次の極をもつ場合} \\ \infty : G(s) \text{ が } s=0 \text{ に 3 次以上の極をもつ場合} \end{cases}$$

であるので, ϵ_a が 0 であるためには $G(s)$ が $s=0$ に 3 次以上の極をもてばよい。

4.3 制御系の形

4.2 節で述べたように, 定常偏差は入力 $R(s)$ の形と同時に前向きループの伝達関数 $G(s)$ の形に依存していることがわかる。このことから, $G(s)$ の極のうち $s=0$ が何次の極になっているかで制御系を分類することがある。

いま, 直結フィードバック制御系において前向きループの伝達関数 $G(s)$ を,

$$G(s) = \frac{K(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + 1)}{s^N (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + 1)} \quad (4.8)$$

とすると, N によってつぎのように制御系の形を定める。

$N=0$ のとき, 0 形の制御系

$N=1$ のとき, 1 形の制御系

$N=2$ のとき, 2 形の制御系

.....

表 4.1 直結フィードバック制御系の形と定常偏差との関係

形	定常偏差	定常位置偏差	定常速度偏差	定常加速度偏差
0 形		$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
1 形		0	$\frac{B}{K}$	∞
2 形		0	0	$\frac{C}{K}$
3 形		0	0	0

直結フィードバック制御系の形と定常偏差の関係を示したものが表 4.1 である。

(注) 一般に、制御系の形を増すほど定常偏差は望ましくなるが、安定性に関しては安定化しにくくなる。

例題 4.1

図 4.2 に示す制御系において、偏差定数を求めよ。

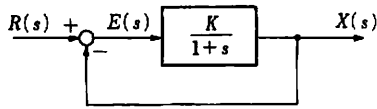


図 4.2 [例題 4.1]

【解答】

偏差定数の定義より、

(1) 位置偏差定数: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{1+s} = K$

(2) 速度偏差定数: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{1+s} = 0$

(3) 加速度偏差定数: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K}{1+s} = 0$

例題 4.2

図 4.3 に示す制御系において、つぎの3種類の入力を加えたときの定常偏差を求めよ。

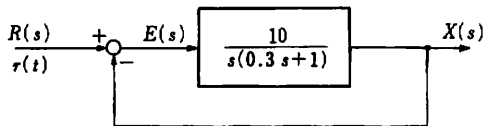


図 4.3 [例題 4.2]

(1) $r(t) = u(t)$

(2) $r(t) = t$

(3) $r(t) = \frac{1}{2}t^2$

【解答】

いま、 $G(s) = 10/s(0.3s+1)$ と置けば、偏差 $E(s)$ は、

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

となる。定常偏差はラプラス変換の最終値の定理を用いれば、

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

によって計算できる。

したがって、

(1) の場合、 $R(s)=1/s$ であるから、

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

(2) の場合、 $R(s)=1/s^2$ であるから、

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = 0.1$$

(3) の場合、 $R(s)=1/s^3$ であるから、

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \infty$$

となる。

例題 4.3

図 4.4 に示すようなタコメータフィードバックをもつサーボ機構がある。タコメータゲイン K を調整して定常速度偏差を 0.02 にしたい。このときのゲイン K を求めよ。

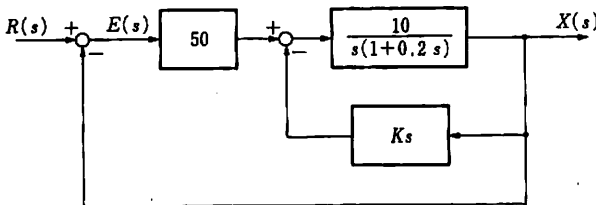


図 4.4 [例題 4.3]

【解答】

図 4.4 を等価変換すると図 4.5 となる。そこで、

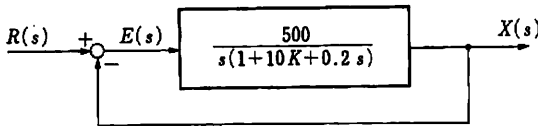


図 4.5 図 4.4 の等価変換

$$G(s) = \frac{500}{s(1+10K+0.2s)}$$

と置き、速度偏差定数 K_v を求めれば、

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{500}{1+10K}$$

このとき、定常速度偏差 e_v は、

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1+10K}{500}$$

題意より、 $\varepsilon_p = 0.02$ であるから、

$$\frac{1+10K}{500} = 0.02$$

よって、 $K=0.9$ である。

4.4 外乱に対する定常偏差

4.2 節では、目標値に対する定常偏差について調べてきたが、外乱に対する定常偏差も同じように取り扱うことができる。今度は、式(4.1)において、 $R(s)=0$ として外乱に対する定常偏差を求めればよい。ここでは次の例題を通して説明する。

例題 4.4

図 4.6 の制御系で、 $D(s)$ の外乱が、

$$(1) D(s)=1/s \quad (2) D(s)=1/s^2 \quad (3) D(s)=1/s^3$$

のとき、定常偏差を求めよ。

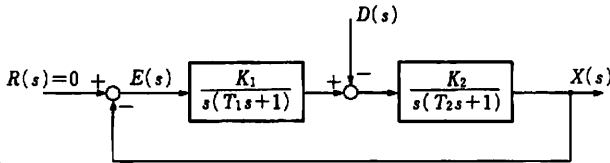


図 4.6 外乱の加わった直結フィードバック制御系

【解答】

偏差 $E(s)$ は、

$$\begin{cases} X(s) = \frac{K_2}{s(T_2s+1)} \left\{ \frac{K_1}{s(T_1s+1)} E(s) - D(s) \right\} \\ E(s) = 0 - X(s) \end{cases}$$

より、

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{\frac{K_2}{s(T_2s+1)}}{1 + \frac{K_1}{s(T_1s+1)} \cdot \frac{K_2}{s(T_2s+1)}} D(s) \\ &= \frac{1}{\frac{s(T_2s+1)}{K_2} + \frac{K_1}{s(T_1s+1)}} D(s) \end{aligned}$$

そこで、最終値の定理を用いれば定常偏差 ε は容易に計算できる。

- (1) $D(s)=1/s$ に対して $\varepsilon = 0$
- (2) $D(s)=1/s^2$ に対して $\varepsilon = 1/K_1$
- (3) $D(s)=1/s^3$ に対して $\varepsilon = \infty$

〔注〕 一般的にいえば，外乱に対する定常偏差の振舞は外乱の入る前の伝達関数（〔例題 4.4〕 ならば $K_1/s(T_1s+1)$ のこと）の形により定まる。

第 5 章

過 渡 特 性

5.1 過渡応答

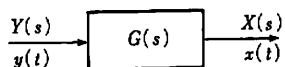
前章では、制御系の定常状態における特性評価を定常偏差に着目して行った。この他にも制御系の過渡状態における振舞も大切であり本章で取り扱う。過渡状態において、偏差が速やかに減少するかどうかを評価する速応性と、制御量が定常値に達するまでの振動の減衰の仕方を評価する減衰特性を過渡特性として取り上げる。

このような過渡特性は、後述する系のステップ応答波形を調べれば明確に評価できる。しかし、設計に際しては、まず特性方程式の特性根の分布や、閉ループゲイン特性の最大値 M_p などのような過渡特性と関連のある量を把握して過渡特性を評価し、最後にステップ応答波形を求めて確認するのが普通である。まず、過渡応答の定義から説明する。

定義 過渡応答 (transient response)

定常状態にある系の出力 $x(t)$ が、入力 $y(t)$ の変化の影響を受けて変化し、 $x(t)$ が新しい定常状態に達するまでに示す過渡的な経過を過渡応答という。

次に、図 5.1 において特別な入力 $y(t)$ が印加されたときの過渡応答について



$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)Y(s)]$$

図 5.1 過渡応答

て述べる。

(a) インパルス応答：単位インパルス関数を入力信号 (図 5.2 参照) とする過渡応答をインパルス応答という。すなわち、

$$y(t) = \delta(t), \text{ このとき } Y(s) = 1 \quad (5.1)$$

であり、インパルス応答を $g(t)$ とすれば、

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (5.2)$$

である。

(b) ステップ応答：単位ステップ関数を入力信号 (図 5.3 参照) とした場合の過渡応答をステップ応答、あるいはインデシアル応答という。すなわち、

$$y(t) = u(t), \text{ このとき } Y(s) = \frac{1}{s} \quad (5.3)$$

であり、ステップ応答を $h(t)$ とすれば、

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (5.4)$$

である。

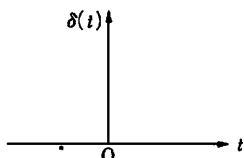


図 5.2 インパルス入力

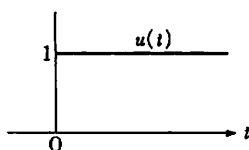


図 5.3 ステップ入力

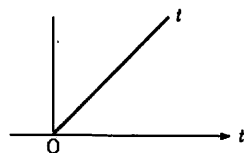


図 5.4 ランプ入力

(c) ランプ応答：単位ランプ関数を入力信号 (図 5.4 参照) とした場合の過渡応答をランプ応答という。すなわち、

$$y(t) = t, \text{ このとき } Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad (5.5)$$

であり、ランプ応答を $f(t)$ とすれば、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right] \quad (5.6)$$

である。

〔注〕 ランプ応答を微分すれば、ステップ応答になり、ステップ応答を微分すればインパルス応答になる関係がある。すなわち、

$$\frac{df(t)}{dt} = h(t) \quad (5.7)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) \quad (5.8)$$

したがって、どれか1つの過渡応答を調べれば他の過渡応答を求めることができる。

つぎに基本的要素の過渡応答を調べる。

(1) 比例要素

$$G(s) = K \quad (5.9)$$

であるから、

$$\text{インパルス応答 } g(t) = \mathcal{L}^{-1}[K] = K\delta(t) \quad (5.10)$$

$$\text{ステップ応答 } h(t) = \mathcal{L}^{-1}[K/s] = Ku(t) \quad (5.11)$$

(2) 1次遅れ要素

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts} \quad (5.12)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{インパルス応答 } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+Ts}\right] \\ &= \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \text{ステップ応答 } h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+Ts)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{T}{1+Ts}\right] \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \end{aligned} \quad (5.14)$$

図 5.5 にこれらの結果を図示する。

時定数 T は、

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (5.15)$$

であるから、 $t=0$ での $h(t)$ の接線が最終値 1 と交わるまでの時間を示している。

また、式 (5.14) より、 $t=T$ において、

$$h(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

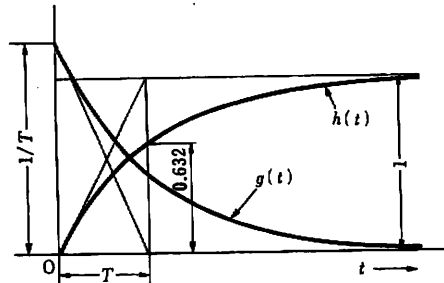


図 5.5 1次遅れ要素のインパルス応答とステップ応答

となり、時定数 T は最終値の 63.2 [%] に達する時間である。このように、時定数はステップ応答が最終値に収束する速さの目安となっている。明らかなように、 T が大きければ最終値に近づくのに時間がかかり、逆に T が小さければ速やかに最終値に近づく。

(3) 2次振動要素

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.16)$$

である。

(a) インパルス応答

i) $0 < \zeta < 1$ のとき、

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \quad (5.17)$$

ii) $\zeta = 1$ のとき、

$$g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (5.18)$$

iii) $\zeta > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2-1} t} - e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2-1} t}}{2} \right] \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta\omega_n t} \sinh(\sqrt{\zeta^2-1} \omega_n t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

図 5.6 に ζ をパラメータとした 2 次振動要素のインパルス応答波形を描いて

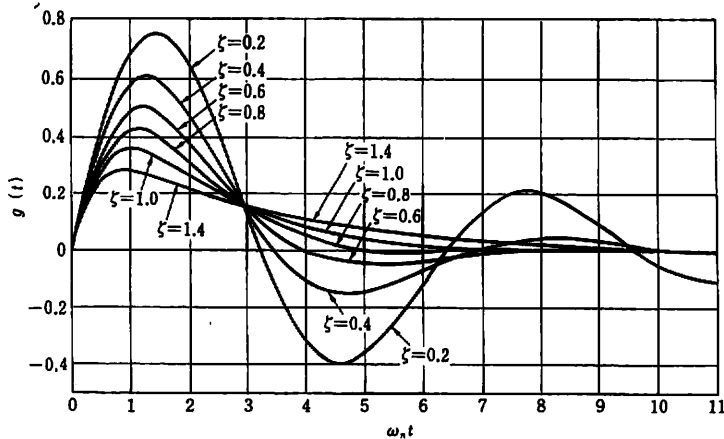


図 5.6 2次要素のインパルス応答

ある。 $\zeta=1$ を境に、 $0 < \zeta < 1$ では減衰振動であり、 $\zeta > 1$ では非振動的である。

(b) ステップ応答

i) $0 < \zeta < 1$ のとき、

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad (5.20)$$

ii) $\zeta=1$ のとき、

$$h(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad (5.21)$$

iii) $\zeta > 1$ のとき、

$$h(t) = 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta\omega_n t} \quad (5.22)$$

図 5.7 に ζ をパラメータとした 2 次振動要素のステップ応答波形を描いてある。 $\zeta=1$ を境に、 $0 < \zeta < 1$ では振動的ではあるが速応性がよく、 $\zeta > 1$ では非振動的ではあるが速応性が悪くなっている。

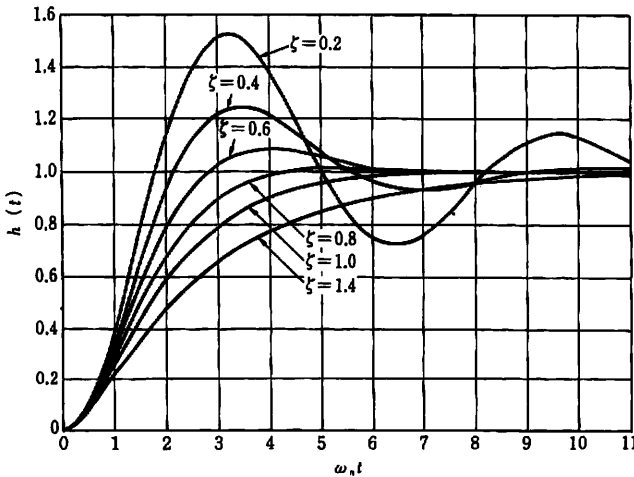


図 5.7 2 次要素のステップ応答

〔注〕 2 次振動要素のインパルス応答あるいはステップ応答が振動を起こす条件は、減衰係数 ζ が $0 < \zeta < 1$ であればよいことは述べた。実は、このことは式 (5.16) の特性方程式、

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (5.23)$$

の根が、 s 平面の虚軸の左半面にあり、かつ共役複素根であることである。つまり、判別式を D とすれば、

$$D = (\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2 < 0 \quad (5.24)$$

(ここに、 $\omega_n > 0$, $\zeta > 0$ である)

よって、 $0 < \zeta < 1$ の条件が導かれる。

例題 5.1

図 5.8 に示す制御系のステップ応答を求めよ。

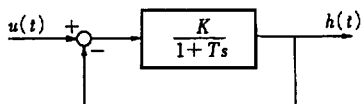


図 5.8 [例題 5.1]

【解答】

閉ループ伝達関数 $W(s)$ は

$$W(s) = \frac{\frac{K}{1+Ts}}{1 + \frac{K}{1+Ts}} = \frac{TK}{1+K+Ts}$$

したがって、ステップ応答 $h(t)$ は、

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s(1+K+Ts)} \right] \\ &= \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-\frac{1+K}{T}t} \right) \end{aligned}$$

である。

5.2 過渡特性

フィードバック制御系のステップ応答は、図 5.9 のように 2 次振動系のステップ応答に似ているのが普通である。このような応答波形に着目して、図に示した諸量をもって過渡特性を表現する。

立上り時間 T_r : ステップ応答が、最終値の 10~90% に達するまでの時間。速応性を表す。

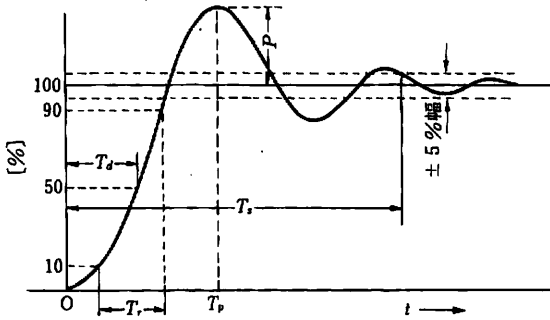


図 5.9 ステップ応答

遅れ時間 T_d : ステップ応答が、最終値の 50% に達するまでの時間。速応性を表す。

安定時間 T_s : ステップ応答が、最終値からの許容範囲 (普通 $\pm 2 \sim \pm 5$ [%]) に入り、それ以後はこの許容範囲をはみ出さなくなる最初の時間。速応性と安定度の両方に関係している。

行き過ぎ量 P :

$$P = \frac{\text{ステップ応答の最大値} - \text{最終値}}{\text{最終値}} \times 100 \text{ [%]}$$

安定度の目安になり、 P が小さいほど安定度がよい。

行き過ぎ時間 T_p : ステップ応答が、行き過ぎ量が表れるまでに要する時間。速応性を表す。

例題 5.2

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

なる 2 次系がある。この制御系の行き過ぎ量と減衰係数 ζ との関係を求めよ。

【解答】

この場合のステップ応答 $h(t)$ は、

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

なる逆ラプラス変換で求められる。行き過ぎ量を生じるためには、 $\zeta < 1$ の場合であり、このとき、

$$h(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\left(\text{ただし, } \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

そこで,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &\quad - \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

したがって, $dh/dt=0$ になるためには,

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = m\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

行き過ぎ量を生じるのは $m=1$ のときであり,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.25)$$

である。このとき,

$$\begin{aligned} P &= h(T_p) - 1 \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 \text{ [\%]} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となる。

過渡特性を表現するこれらの項目を同時に望ましい値にすることは難しい。そこで、以下に述べるような方法でステップ応答の大体の見当をつけ、最後にステップ応答を求めて、望ましい応答波形かどうか確認する手順がとられる。

(1) 代表振動根による方法

制御系の特性方程式

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

は定数係数の s の代数方程式であるから、特性根

$$\begin{aligned} s &= -r_i, \quad -\zeta_k \omega_{nk} \pm j \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2} \\ (i &= 1, 2, \dots, l; k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

によって、次のように因数分解できる。

$$\prod_{i=1}^l (s+r_i) \prod_{k=1}^m (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2) = 0$$

このとき、閉ループ伝達関数を $W(s)$ と置けば、閉ループ制御系のステップ応答 $h(t)$ は,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right]$$

$$= A_0 + \sum_{i=1}^l A_i e^{-r_i t} + \sum_{k=1}^m B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cdot \sin(\sqrt{1-\zeta_k^2} \omega_{nk} t + \phi_k) \quad (5.27)$$

となる。ただし、特性根はすべて単根とする。また、 A_0, A_i, B_k, ϕ_k は初期条件等から定まる積分定数である。

式(5.27)の第3の項が振動的な応答を表す項であり、特性根

$$s = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

に対応する応答である。振動の減衰の速さは $\zeta_k \omega_{nk}$ の大きさで定まる。この値の最も小さい項が、振動の減衰が遅く振動がいつまでも続くような影響を与える項で、応答の概形がこの項により定められる。

安定な制御系の特性根は、すべて複素平面の左側にあり、左半面にある複素根の中でもっとも虚軸に近い位置にある根に対応する振動が減衰のもっとも遅い応答で、この根を代表振動根という。つまり、振動根の中で実数部 $\zeta_k \omega_{nk}$ が最も小さい根のことである。したがって、代表振動根の実数部 $\zeta_k \omega_{nk}$ と虚数部 $\omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2}$ が安定度の目安を与えることになる。ここで、代表振動根に対する

$$\kappa_k = \frac{\zeta_k}{\sqrt{1-\zeta_k^2}} \quad (5.28)$$

を減衰度と呼ぶ。

整定時間および振動回数を希望する範囲、

$$\zeta_k \omega_{nk} \geq (\zeta \omega_n)_{\min}$$

$$\kappa_k \geq (\kappa)_{\min}$$

に収めるためには、特性方程式のすべての根が図5.10の斜線をほどこした領域外にあればよい。経験的に好ましい $\beta (= \sin^{-1} \zeta)$ は

$$\text{追値制御のとき } 24^\circ < \beta < 37^\circ$$

$$\text{定値制御のとき } 12^\circ < \beta < 24^\circ$$

(2) ゲイン余有と位相余有による方法

ゲイン余有、位相余有が小さいと系の安定性は悪くなって、応答は振動的になる。逆に、大きすぎると定常特性、速応性が悪くなる。経験的に次のような値が望ましいとされている。

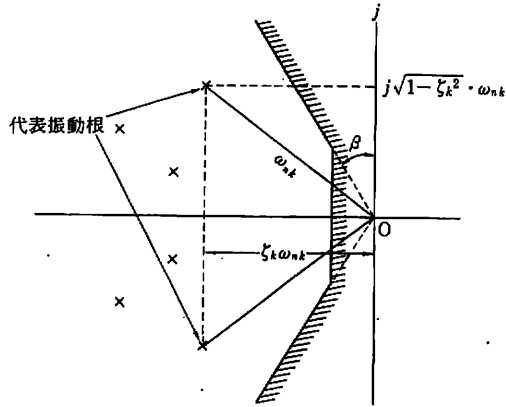


図 5.10 代表振動根

・プロセス制御のとき：

ゲイン余有 = 3 ~ 10 [dB]

位相余有 = 20° ~ 70°

・サーボ機構のとき：

ゲイン余有 = 12 ~ 20 [dB]

位相余有 = 40° ~ 60°

(3) 閉ループゲイン特性の最大値 M_p による方法

閉ループ伝達関数 $W(s)$ の周波数特性 $W(j\omega)$ において、図 5.11 のゲイン

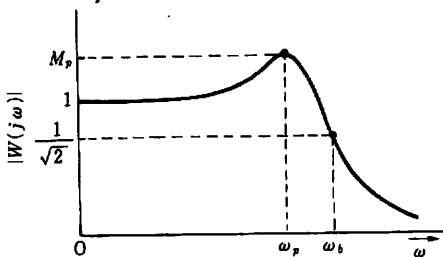


図 5.11 閉ループゲイン特性の最大値 M_p と ω_p (バンド幅 ω_b も示してある)

特性の最大値 M_p とそのときの角周波数 ω_p が重要である。一般に、閉ループのゲイン特性に著しいピークをもつ系のステップ応答は振動的であり、ピークをもたない系のステップ応答は非振動的である。また、 ω_p は大きいほど速応性は向上する。

ちなみに、2次振動系

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

の場合には、

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.29)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (5.30)$$

である。

高次の制御系も(1)で述べたように、代表振動根を考えれば2次系で近似できる。そこで M_p , ω_p がわかれば、式(5.29)より2次系の減衰係数 ζ が求まり、式(5.30)より固有角周波数 ω_n が求まる。したがって、 ζ , ω_n がわかれば、つぎのように過渡特性の諸量が得られる。

$$\text{行き過ぎ量 } P = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 \text{ [%]} \quad (5.31)$$

$$\text{行き過ぎ時間 } T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.32)$$

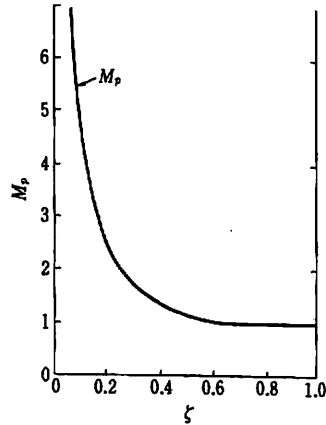


図 5.12 2次系の ζ と M_p の関係

図 5.12 に2次系の M_p と ζ の関係を、図 5.13 に行き過ぎ量 P , 行き過ぎ時間 T_p と ζ との関係を、図 5.14 に整定時間 T_s , 立上り時間 T_r と ζ との関係を図示している。

経験的に M_p の適当な値は

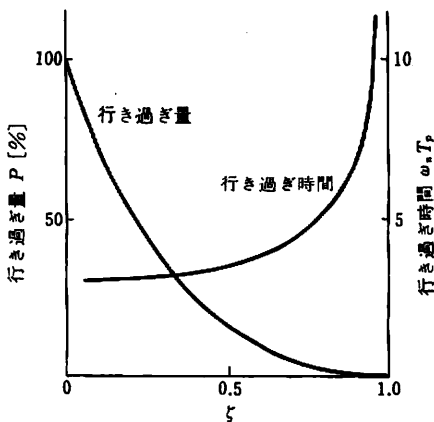


図 5.13 2次系の ζ と P , T_p との関係

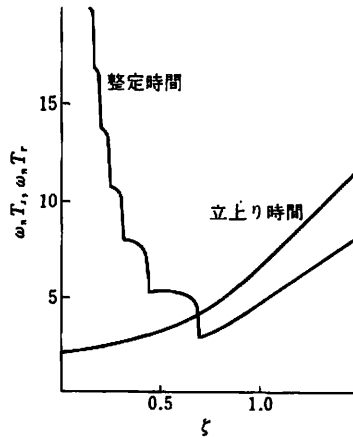


図 5.14 2次系の ζ と T_s , T_r との関係

- ・プロセス系 $M_p=1.5\sim 2.5$
- ・サーボ系 $M_p=1.1\sim 1.5$

程度がよいとされている。したがって、サーボ系では、設計の目安として通常 $M_p=1.3$ (2.26 [dB]) が用いられている。

[注1] 2次振動系のステップ応答は、 $0 < \zeta < 1$ において行き過ぎ量 P を生じるが、ゲイン特性は、 $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ において最大値 M_p を生じることに注意しよう ([例題5.2] と式 (5.30) を参照)。

[注2] 直結フィードバック制御系において、開ループ周波数特性より閉ループ系の M_p , ω_p , バンド幅 ω_b を求めるためには、普通ニコルス線図を用いて行う。つまり、図

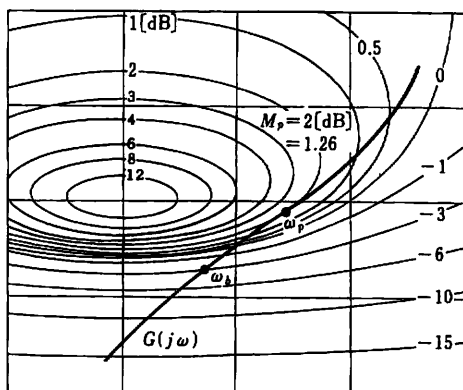


図 5.15 ニコルス線図による M_p , ω_p , ω_b の決定

5.15 のようにニコルス線図上に開ループ周波数特性 $G(j\omega)$ を描き、 M 線図と接する値から M_p を、そのときの角周波数の値から ω_p を知ることができる。また、 ω_b は $M=1/\sqrt{2}$ ($=-3$ [dB]) の M 線図との交点における角周波数の値から知ることができる。 ω_b は ω_p と同様に速応性を表す周波数領域における定数である。つまり、 ω_b が大きいほど速応性は向上する。

第 6 章

制御系の設計

6.1 設計の概要

設計とは、与えられた閉ループ特性（定常特性、過渡特性、外乱特性など）から、開ループ伝達関数を決定し、そのうちの既知の部分除去して求めるべき制御要素の伝達関数の形およびそのパラメータを決定することである。

しかし、このように設計を行うのは大変難しいので、普通よく使用される方法に補償法といわれる方法がある。これは、未知の部分の制御要素に、経験的に適当と思われる伝達関数をあてはめて、試行錯誤的にパラメータを決定する方法である。つぎに補償法に基づいた設計の手順を述べる。

- ① 仕様の設定：設計を行うには、まず仕様を定めなければならない。仕様は、閉ループ特性である、過渡特性、定常特性、外乱特性などを規定するものから成っている。
- ② 制御条件の調査：制御対象の特性、外乱の加わる位置や性質、目標値の変化の仕方など基礎的な制御条件の調査を行う。
- ③ 制御装置の選定：②のデータに基づいて、経験的に適当と思われる制御装置を選定し、閉ループ系を作り上げる。

- ④ 制御系の解析：③で構成された制御系に対し、制御装置のパラメータを調整して種々の解析を行う。その結果仕様を満足しているならば設計は完了する。
- ⑤ 補償要素の挿入：④において制御装置のパラメータを変えてみても満足すべき特性が得られないときは、補償要素を挿入してみる。
- ⑥ 制御系の解析：⑤で構成された制御系に対し、補償要素や制御装置のパラメータを変えて種々の解析を行う。その結果仕様を満足しているならば設計は完了する。もし、仕様を満足していなければ③からやり直す。

ところで、補償法は直列補償法とフィードバック補償法がある。直列補償法は図 6.1 のように制御対象と直列に補償要素を挿入して系の特性の改善をはかるものである。

フィードバック補償法は、図 6.2 に示すように、制御系内の一部に局所的なフィードバックループを作って開ループ伝達関数を補償して、系全体の特性の改善をはかるものである。

一般に、フィードバック補償は直列補償ほど簡単でないが、フィードバックに基づく利点があるので幾つか指摘する。

- (イ) パワーレベルの高い部分に補償要素を挿入するので、増幅装置を必要とせず要素が簡単になる。
- (ロ) 雑音やパラメータの変動の影響を軽減できる。
- (ハ) 周波数特性を改善できる。

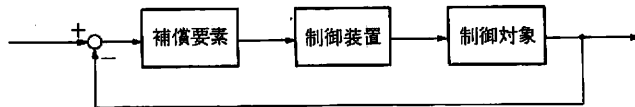


図 6.1 直列補償法

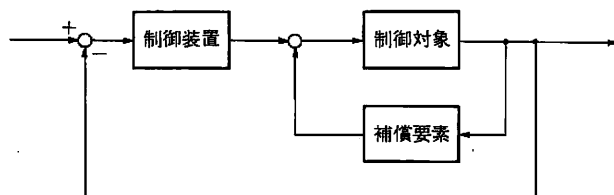


図 6.2 フィードバック補償法

さて、補償要素や制御装置のパラメータを決定する方法に、過渡応答を直接を用いる方法と周波数応答を用いる方法がある。過渡応答による方法は、近年手軽にコンピュータを使用できるようになったため、容易に過渡応答が求められるので有力な方法である。一方、周波数応答を用いる方法は、ボード線図やニコルス線図を用いることによって、容易にパラメータを決定できる。しかし、実際に問題になるのは定常特性や過渡特性であるので、周波数応答によって決定したパラメータを用いて、最終的には定常特性や過渡特性を求めて望ましいものかどうか調べる必要がある。

つぎに、サーボ系とプロセス制御とは設計法が多少異なるので別々に説明する。

6.2 サーボ系の設計

サーボ系では、定常特性と過渡特性が大切であり、評価基準として、

定常特性：定常偏差

過渡特性：行き過ぎ量、行き過ぎ時間、整定時間、立上り時間、安定性などが問題となる。サーボ系に対しては周波数応答を用いる方法がよく用いられ、周波数特性に関してつぎの諸量が経験的に良いとされている。

- ・共振値 M_p が 1.3 (2.26 [dB])
- ・共振角周波数 ω_p やバンド幅 ω_b は速応性の目安になり、大きいほど速応性が向上する。
- ・ゲイン余有が 12~20 [dB]
位相余有が 40°~60°

すなわち、周波数特性を上記のようにすれば、定常特性も過渡特性も近似的に望ましい制御系になっているということである。

つぎに直列補償法について述べる。

6.2.1 直列補償法

(1) ゲイン調整

ゲイン調整とは、開ループ伝達関数のゲイン定数（ループゲインという）を適

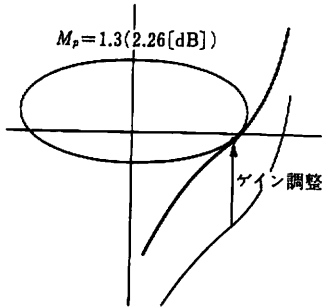


図 6.3 ゲイン調整

当に変化させて望ましい閉ループ特性を得ることである。ゲインを増減すると定常特性と過渡特性の両方が同時に変化する。すなわち、ゲインが増大すると、(イ)応答は振動的になり安定度は減少、(ロ)速応性は増す、(ハ)定常偏差は減少する。逆に、ゲインが減少すると、(イ)安定度は増加、(ロ)速応性は悪くなく、(ハ)定常偏差は悪くなる。

このように定常特性と過渡特性を同時に満足させることは、ゲイン調整だけではできないが、これらのかねあいから $M_p = 1.3$ になるように選ぶのが適当とされている。そのためには、図 6.3 のように開ループ伝達関数のゲイン—位相線図をニコルス線図上に描き、その軌跡を $M_p = 1.3$ (2.26 [dB]) の曲線に接するようにゲイン軸に平行に移動させ、これより必要なゲインを求める。また、ボード線図上でゲイン余裕が 12~20 [dB]、位相余裕が 40°~60° になるようにゲインを調整してもよい。

(2) 位相進み補償

ゲイン調整では十分な速応性が得られないときに、位相進み要素を用いて補償を行う。この位相進み要素の伝達関数は、

$$G_c(s) = \frac{\alpha(1+sT_L)}{1+\alpha sT_L} \quad (\alpha < 1) \quad (6.1)$$

であり、ボード線図を 図 6.4 に示す。

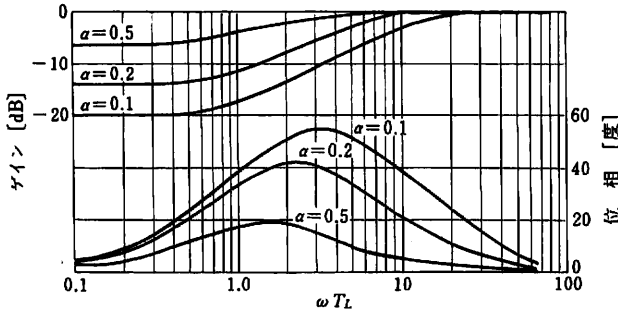


図 6.4 位相進み要素のボード線図

位相進み要素で直列補償すると、図6.4の位相特性にみられるように望ましい部分の位相を進めることができる。この特性を利用して他の特性を劣化させることなく速応性を改善するのである。

このことを図6.5のニコルス線図を用いて説明する。

最初ゲイン調整を行って曲線(a)が得られたとする。しかし、速応性が十分でないので、共振値 ω_p の値を大きくして速応性を改善したいとする。そのために、位相進み要素を挿入して ω_p の近傍の位相を進めると曲線(b)のように右下方にふくらむ。そこでゲイン再調整して $M_p=1.3$ に接するようになると曲線(c)となる。

したがって、新しい共振値 ω_p' は最初の ω_p より大きくなり速応性が良くなる。同時に、ループゲインも多少増大するので定常特性も幾分良くなる。

位相進み要素を電気回路で実現するには、図6.6の回路が用いられる。

(3) 位相遅れ補償

速応性や安定度に影響を与えないで、定常特性を改善するときに位相遅れ要素を用いて補償を行う。

この位相遅れ要素の伝達関数は、

$$G_c(s) = \frac{1+sT_D}{1+\beta sT_D} \quad (\beta > 1) \quad (6.2)$$

であり、ボード線図を図6.7に示す。

制御系の定常特性は、低い周波数領域におけるゲインの大きさによって決まる。したがって、位相遅れ要素で直列補償を行えば図6.7のゲイン特性にみら

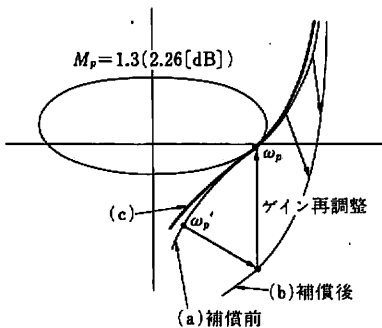


図 6.5 位相進み補償

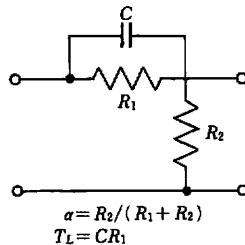


図 6.6 位相進み要素の電気回路

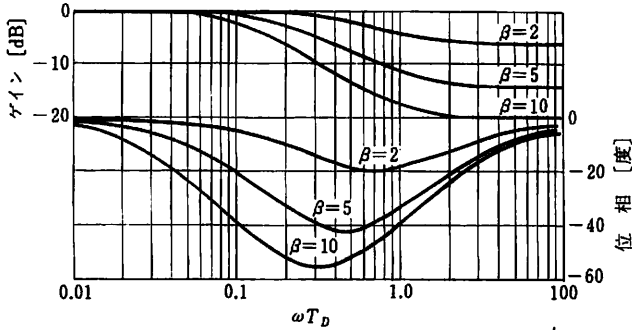


図 6.7 位相遅れ要素のボード線図

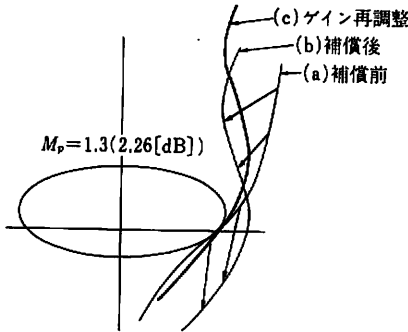


図 6.8 位相遅れ補償

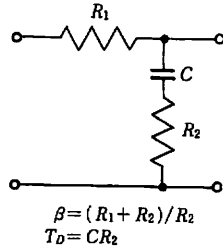


図 6.9 位相遅れ要素の電気回路

れるように、高い周波数領域のゲインが低くなっているから、ループゲインを増大することができ、定常特性を改善することができる。

このことを図 6.8 のニコルス線図を用いて説明する。最初、ゲイン調整と位相進み補償を行って速応性は十分であるが定常偏差が不十分である曲線(a)が得られたとする。そこで、位相遅れ要素の位相特性の影響が ω_p に及ばないように要素の定数を決定すると、(b)曲線のように ω_p を含む高い周波数領域では、ゲインだけが下がっている。つぎに、ゲイン再調整して $M_p=1.3$ に接するようにすると、曲線(c)のように ω_p は最初とほとんど変わらなく、ループゲインは増大したことになる。すなわち、速応性に影響を与えることなく定常特性を改善できたことになる。

位相遅れ要素を電気回路で実現するには、図 6.9 の回路が用いられる。

6.2.2 フィードバック補償

図 6.10 に示すように、制御系内の要素の一部に適当な補償要素を挿入し、開ループ伝達関数の周波数特性を所望の特性になるように補償することをフィードバック補償という。

制御対象の次数や時定数が大きいときには、直列補償だけでは望ましい特性を得ることが難しいので、このような時にはフィードバック補償は効果的である。

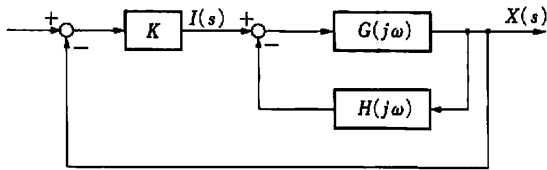


図 6.10 フィードバック補償した制御系

フィードバック補償に用いられる補償要素は、つぎのような周波数特性をもつものが多い。

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= Kj\omega \\ H(j\omega) &= \frac{1+j\omega T_d}{1+j\omega T} \quad (T_d > T) \\ H(j\omega) &= \frac{j\omega T_d}{1+j\omega T_d} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

フィードバック補償は直列補償にくらべるとめんどろなので、つぎのように近似を行って補償の大方の見当をつける。すなわち、図 6.10 において、

$$\frac{X(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \quad (6.4)$$

となるので、

$|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1$ の周波数範囲では、

$$\frac{X(j\omega)}{I(j\omega)} \approx G(j\omega) \quad (6.5)$$

$|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$ の周波数範囲では、

$$\frac{X(j\omega)}{I(j\omega)} \approx \frac{1}{H(j\omega)} \quad (6.6)$$

となる。このような近似を用いて、閉ループ系の望ましい定常特性や過渡特性が得られるように、 $H(j\omega)$ を求めればよい。

6.3 プロセス制御系の設計

プロセス制御系の特徴は、

- ① 制御対象が、加熱炉、化学反応装置などであり、正確に伝達関数の形を求めることは困難である。
- ② 制御装置は、調節計として市販されているものを用い、サーボ系のように制御対象に応じて適当な形にすることができない。
- ③ ほとんど定値制御であるので、目標値に対する応答より外乱に対する応答特性が重要である。

6.3.1 プロセス制御系の制御対象

制御対象は、普通つぎの形をした3通りの伝達関数で表現する。

$$(1) \quad G_p(s) = \frac{K}{1+sT} e^{-sT_L} \quad (6.7)$$

$$(2) \quad G_p(s) = \frac{1}{T_s} e^{-sT_L} \quad (6.8)$$

$$(3) \quad G_p(s) = \frac{K}{1+2\zeta T_s s + T_s^2 s^2} e^{-sT_L} \quad (6.9)$$

[注] 実際のプロセスでは、振動的なことは比較的少なく、(1)、(2)の形の場合が多い。

6.3.2 PID制御

サーボ系における直列補償要素に相当するのが、プロセス制御系における調節部である。この調節部にPID調節計を用いた制御をPID制御と呼ぶ。PID調節計は、比例(P)、積分(I)、微分(D)の動作から構成されている。PID調節計の伝達関数 $G_c(s)$ は、

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (6.10)$$

である。

つぎに、各動作の特徴を述べる。

(1) 比例動作 (P動作)

$$G_c(s) = K_P \quad (6.11)$$

ここに、 K_P を比例ゲインという。

K_P を大きくすると、系は振動的になり安定度は減少するが、外乱に対するオフセット* は減少し、入力に対する応答速度は増加する。

(2) 比例+積分動作 (P I動作)

$$G_c(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \quad (6.12)$$

ここに、 T_I を積分時間という。

比例動作における外乱に対するオフセットをなくすことができる。しかし、積分動作を強くしすぎると安定度が悪くなり、弱くすると速応性が悪くなるので、むだ時間の多いプロセス制御や急激に変化する外乱を伴う制御系には適さない。

(3) 比例+微分動作 (P D動作)

$$G_c(s) = K_P(1 + T_D s) \quad (6.13)$$

ここに、 T_D を微分時間という。

微分動作により、将来の偏差を予測した動作を行うので、急激な変化に対する応答が良好になる。この点で、むだ時間の大きなプロセス制御に適用される。

(4) 比例+積分+微分動作 (P I D動作)

$$G_c(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (6.14)$$

P I動作とP D動作の長所を組み合わせるようにしたものである。

P I D調節計のパラメータの最適調整法として代表的なのは、ジューラ・ニコルスの限界感度法である。

6.3.3 ジューラ・ニコルスの限界感度法

行き過ぎ量とつぎの極大値との比、すなわち振幅減衰比を経験的に25%にするのが適当であるとして、制御対象を e^{-Ls}/Ts または $Ke^{-Ls}/(1+Ts)$ と近似してP I D調節計のパラメータを決める方法である。まず調節計をP動作にし

* プロセス制御では、定常位置偏差のことをオフセットという。

演習問題

問題1 入力 $x(t)$ 、出力 $y_2(t)$ の関係が次の連立微分方程式①、②で表現される系 G_1 がある。

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = ax(t) - by_1(t) + cy_2(t) \quad \text{①}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = by_1(t) - cy_2(t) \quad \text{②}$$

$$t=0 \text{ で } x(t)=y_1(t)=y_2(t)=0$$

(1) 入出力間の伝達関数を求めよ。

(2) 図1に示すようなフィードバック回路が付加されたときの閉ループ伝達関数を求めよ。ただし、 G_2 の入出力間には次の関係があるものとする。

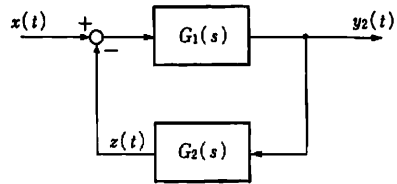


図1

$$T \frac{dz(t)}{dt} = y_2(t) - z(t) \quad \text{③}$$

$$t=0 \text{ で } z(t)=0$$

問題2 図2に示すように、常に一定回転となるように駆動されている他励直流発電機がある。その界磁巻線の抵抗を R 、インダクタンスを L とする。出力電圧 E_o は界磁電流 I に比例するので、その比例係数を C とする。このとき、次の各問に答えよ。

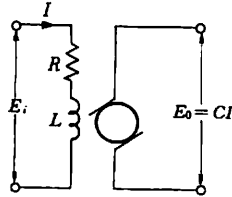


図2

(1) 入力電圧(界磁の端子電圧) E_i と E_o の間の伝達関数を求めよ。

(2) この発電機の周波数応答のゲイン $|G|$ と位相角 $\angle G$ を、それぞれ角周波数 ω の関数として求めよ。

(3) 入力電圧が界磁の時定数の逆数に等しい角周波数 $\omega_o = R/L$ で正

表 6.1 ジーグラ・ニコルスの限界感度法

調節計の動作	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_{pu}$	∞	0
PI	$0.45K_{pu}$	$0.83T_c$	0
PID	$0.6K_{pu}$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

K_{pu} : 安定限界のゲイン, T_c : 持続振動の周期

て制御系の安定限界を与える比例ゲイン K_{pc} と、そのときの持続振動の周期 T_c を求め、 K_P , T_I , T_D の最適調整値を表 6.1 のように与える。

演習問題

問題 1 入力 $x(t)$, 出力 $y_2(t)$ の関係が次の連立微分方程式 ①, ② で表現される系 G_1 がある。

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = ax(t) - by_1(t) + cy_2(t) \quad \text{①}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = by_1(t) - cy_2(t) \quad \text{②}$$

$$t=0 \text{ で } x(t)=y_1(t)=y_2(t)=0$$

(1) 入出力間の伝達関数を求めよ。

(2) 図 1 に示すようなフィードバック回路が付加されたときの閉ループ伝達関数を求めよ。ただし, G_2 の入出力間には次の関係があるものとする。

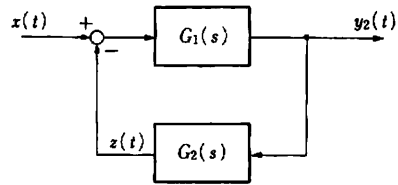


図 1

$$T \frac{dz(t)}{dt} = y_2(t) - z(t) \quad \text{③}$$

$$t=0 \text{ で } z(t)=0$$

問題 2 図 2 に示すように, 常に一定回転となるように駆動されている他励直流発電機がある。その界磁巻線の抵抗を R , インダクタンスを L とする。出力電圧 E_o は界磁電流 I に比例するので, その比例係数を C とする。このとき, 次の各問に答えよ。

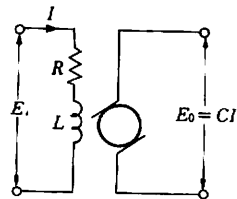


図 2

(1) 入力電圧 (界磁の端子電圧) E_i と E_o の間の伝達関数を求めよ。

(2) この発電機の周波数応答のゲイン $|G|$ と位相角 $\angle G$ を, それぞれ角周波数 ω の関数として求めよ。

(3) 入力電圧が界磁の時定数の逆数に等しい角周波数 $\omega_o = R/L$ で正

表 6.1 ジーグラ・ニコルスの限界感度法

調節計の動作	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_{pu}$	∞	0
PI	$0.45K_{pu}$	$0.83T_c$	0
PID	$0.6K_{pu}$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

K_{pu} : 安定限界のゲイン, T_c : 持続振動の周期

て制御系の安定限界を与える比例ゲイン K_{pc} と、そのときの持続振動の周期 T_c を求め、 K_P , T_I , T_D の最適調整値を表 6.1 のように与える。

弦波状に振動するとき、出力電圧の振幅は入力その何倍か。また、入力に対する出力の位相差は何度か。

問題3 次のような伝達関数で表される制御系のボード線図の折線近似ゲイン特性を描け。

$$G(s) = \frac{4(1+s/2)}{s(1+s/3)(1+s/10)}$$

問題4 図3に示すフィードバック制御系の特性方程式を求めよ。また、この制御系が安定であるための K の範囲を示せ。ただし、 s はラプラス演算子とする。

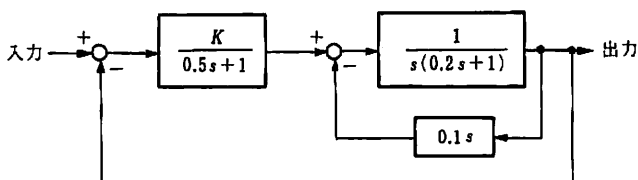


図3

問題5 1 巡伝達関数が、

$$G(s) = \frac{2}{1+5s}$$

で表される直結フィードバック制御系の安定判別をナイキストの判別法により行え。

問題6 図4に示すような自動制御系について、つぎの間に答えよ。ただし、 a, b は正の定数とする。

- (1) この制御系の閉ループ伝達関数を求めよ。
- (2) 単位ステップ状（階段状）入力が加えられた場合、出力の最終値はいくらか。
- (3) (2)の場合に、出力が振動しながら最終値に近づくためには、 a, b の間にはどのような関係が成り立たなければならないか。

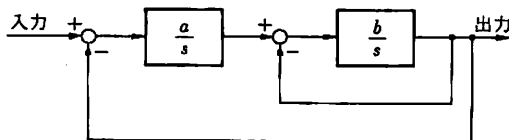


図4

問題 7 図5のようなフィードバック制御系の定常速度偏差を求めよ。つぎに、直列補償として位相遅れ補償要素

$$G_0(s) = \frac{3(1+0.9s)}{1+4.5s}$$

を挿入したときの定常速度偏差を求めよ。

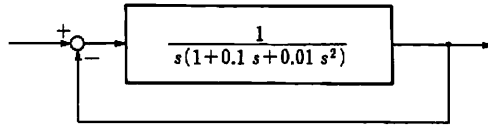


図5

【演習問題解答】

問題 1

- (1) 式①, 式②を初期条件を考慮してラプラス変換する。伝達関数 $G_1(s)$ は, 出力のラプラス変換と入力 $x(t)$ のラプラス変換の比であるから,

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{ab}{s(s+b+c)}$$

- (2) 式③を初期条件を考慮してラプラス変換する。伝達関数 $G_2(s)$ は, 出力 $z(t)$ のラプラス変換と入力 $y_2(t)$ のラプラス変換の比であるから,

$$G_2(s) = \frac{Z(s)}{Y_2(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

したがって, 閉ループ伝達関数 $G(s)$ は,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} \\ &= \frac{\frac{ab}{s(s+b+c)}}{1 + \frac{ab}{s(s+b+c)} \cdot \frac{1}{Ts+1}} \\ &= \frac{ab(Ts+1)}{s(Ts^2+T(b+c)s+s+b+c)+ab} \end{aligned}$$

問題 2

- (1) 界磁回路での微分方程式は

$$Li'(t) + Ri(t) = e_i(t)$$

であり, 出力電圧は

$$e_o(t) = Ci(t)$$

与えられる。上式で, 初期条件を 0 と置きラプラス変換すると, 伝達関数 $G(s)$ は,

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{C}{R+Ls}$$

- (2) 周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{C}{R+j\omega L}$$

であるので,

$$|G(j\omega)| = \frac{C}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$=20 \log_{10} \frac{C}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \quad [\text{dB}]$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

(3) 入出力間の振幅比が $|G(j\omega)|$ であるから、 $\omega = R/L$ のとき、

$$\left| G\left(j \frac{R}{L}\right) \right| = \frac{C}{\sqrt{2}R}$$

入出力間の位相差が $\angle G(j\omega)$ であるから、 $\omega = R/L$ のとき、

$$\angle G\left(j \frac{R}{L}\right) = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$

問題 3

折点角周波数は、2, 3, 10 である。また $\omega = 1$ のとき、ゲインは $20 \log 4/1 \approx 12[\text{dB}]$ であることに注意しながらゲイン特性を描けば図 6 となる。

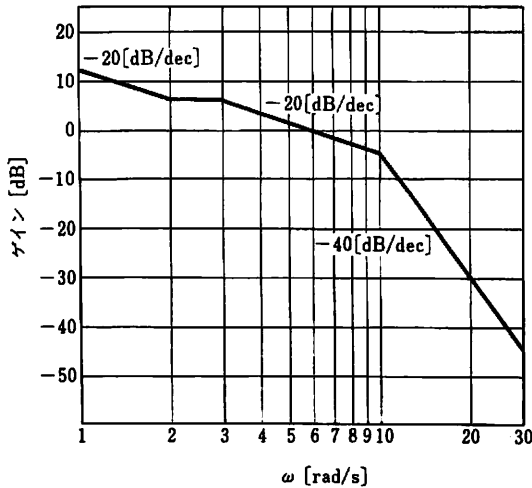


図 6

問題 4

マイナーループの伝達関数は $1/s(0.2s+1.1)$ であるので、特性方程式は、

$$1 + \frac{K}{0.5s+1} \cdot \frac{1}{s(0.2s+1.1)} = 0$$

ゆえに、

$$s^3 + 7.5s^2 + 11s + 10K = 0$$

上式の特性方程式に、ラウスの安定判別法あるいはフルビッツの安定判別法を適用すれば、この制御系が安定であるための K の範囲は、

$$0 < K < 8.25$$

問題 5

1 巡伝達関数の極 $(-1/5)$ は s 平面の右半面にないので、簡単化したナイキストの安定判別法が使える。したがって、1 巡伝達関数のベクトル軌跡を描くと図 7 となるので、この制御系は安定である。

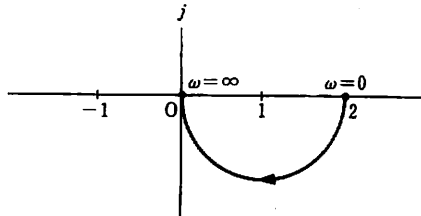


図 7

問題 6

(1) この制御系の閉ループ伝達関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = \frac{ab}{s^2 + bs + ab}$$

(2) ステップ応答を $h(t)$ とすれば、 $h(t)$ をラプラス変換したものは、

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{ab}{s^2 + bs + ab} \cdot \frac{1}{s}$$

である。そこでステップ応答の最終値を求めるには、ラプラス変換の最終値の定理より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{L}[h(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{ab}{s^2 + bs + ab} = 1 \end{aligned}$$

(3) 出力が振動しながら最終値に近づくためには、特性方程式の根がすべて負の実数部をもち、かつ共役複素根の場合である。この制御系の特性方程式は、

$$s^2 + bs + ab = 0$$

であるので、特性根は

$$s = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4ab}$$

となる。 $b > 0$ であるので、特性根は負の実数部を持っているので、あとは共役複素根となる条件を求めればよい。したがって、

$$b^2 - 4ab < 0$$

$$\therefore b < 4a$$

問題 7

定速度入力に対する定常偏差が定常速度偏差 ϵ_v であるから、ラプラス変換の最終値の定理より、

$$\begin{aligned}\epsilon_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{s(1+0.1s+0.01s^2)}} \right] \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

つぎに、直列補償を行った後の定常速度偏差は、

$$\begin{aligned}\epsilon_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{3(1+0.9s)}{1+4.5s} \cdot \frac{1}{s(1+0.1s+0.01s^2)}} \right] \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$