

# 物 理 (S)

 東進ハイスクール



# 目次

## I 力と運動

[1] 運動の表し方	1
問題	4
[2] 運動の法則	5
問題	7
[3] 力のつりあい	8
問題	10
[4] 重力下の物体の運動	11
問題	14
[5] 等速円運動と万有引力	15
問題	17
[6] 単振動	18
問題	20
[7] 運動量とその保存	21
問題	24
[8] 仕事と力学的エネルギー	25
問題	28
演習問題	29

## II 熱と気体の分子運動

[9] 熱と気体の圧力	36
問題	38
[10] 気体の分子運動	39
問題	43
演習問題	45

## III 波動

[11] 波の性質	48
問題	54
[12] 音波	56
問題	59
[13] 光波	61
問題	64
演習問題	65

# I 力と運動

## [1] 運動の表し方

### (1) 速度(直線運動)

$x$ 軸上を運動する物体の時刻 $t_1$ ,  $t_2$ における座標をそれぞれ $x_1$ ,  $x_2$ とするときの時刻 $t_1$ での速度を $v$ とすると, 単位時間あたりの変位が速度であるから,

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \tan \theta$$

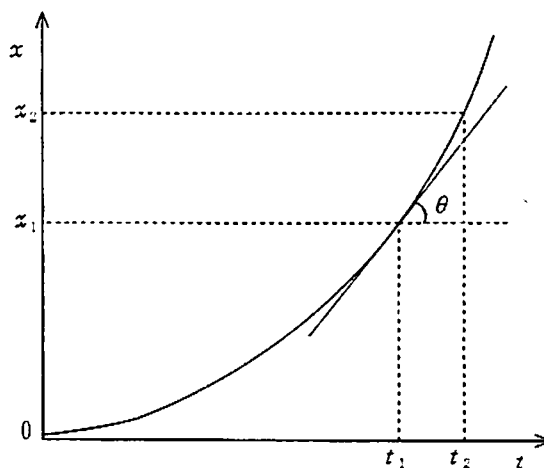


図1

速度の単位はm/s, cm/sである。また, 速度の大きさが速さである。

### (2) 等速直線運動

一直線上を同じ向きに一定の速さで動く運動である。図2のように原点 $O$ を初速度 $v$ で出発し, 時間 $t$ の後の座標が $x$ になったとすると, 速度の定義から,

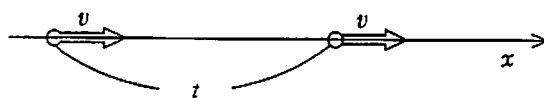


図2

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x}{t} = \tan \theta$$

$$\therefore x = vt$$

等速直線運動での $x-t$ グラフは図3,  $v-t$ グラフは図4のようになる。

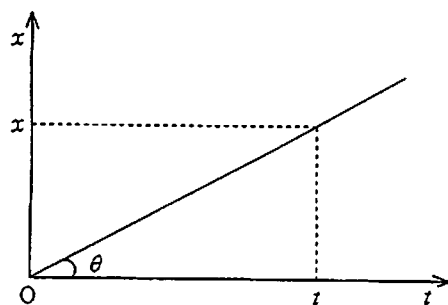


図3

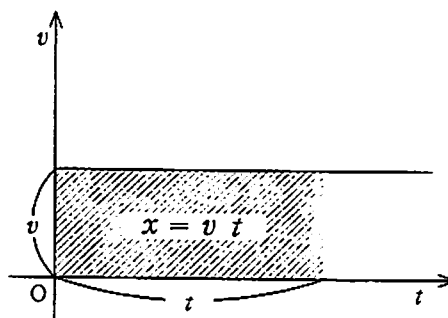


図4

(3) 速度(平面運動)

図5において、曲線 $OP_1P_2$ 上を運動する物体の時刻 $t_1$ 、 $t_2$ における位置をそれぞれ $P_1$ 、 $P_2$ とするときの時刻 $t_1$ での速度を $\vec{v}$ とすると、時間 $t_2-t_1$ の間の変位は $\vec{P_1P_2}$ であるから、

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{P_1P_2}}{t_2 - t_1}$$

となり、 $\vec{v}$ の方向は $P_1$ における軌道への接線方向となる。なお、 $\vec{v}$ の座標成分 $(v_x, v_y)$ 、 $\vec{v}$ が $x$ 軸方向となす角を $\theta$ とすると、

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

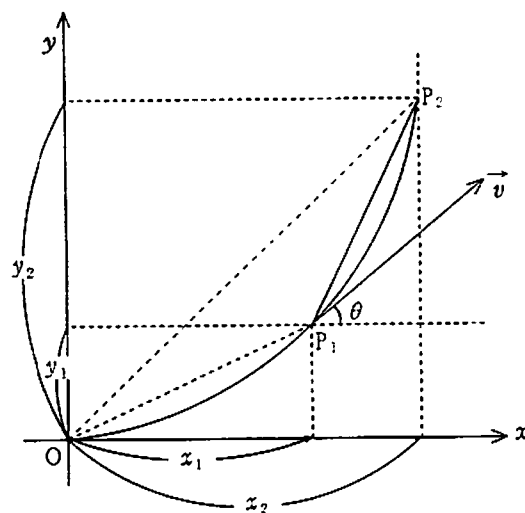


図5

(4) 加速度(直線運動)

$x$ 軸上を運動する物体の時刻 $t_1$ 、 $t_2$ における位置をそれぞれ $P_1$ 、 $P_2$ 、速度をそれぞれ $v_1$ 、 $v_2$ とすると、単位時間あたりの速度の変化が加速度であるから、時刻 $t_1$ での加速度を $a$ とすると、

$$a = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

加速度の単位は $m/s^2$ 、 $cm/s^2$ である。なお、平面内の運動ではベクトルとしての加速度を用いる。



図6

(5) 等加速度直線運動

一直線上を一定の加速度で動く物体の運動である。図7のように原点Oを初速度 $v_0$ で出発し、時間 $t$ の後の速度を $v$ 、座標が $x$ になったとすると、加速度の定義から、

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t} = \tan \theta \quad \dots \text{①}$$

$$\therefore v = v_0 + a t \quad \dots \text{②}$$

図8から、②を用いて、

$$x = \frac{v_0 + v}{2} t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \dots \text{③}$$

①に③から、

$$v^2 - v_0^2 = 2 a x \quad \dots \text{④}$$

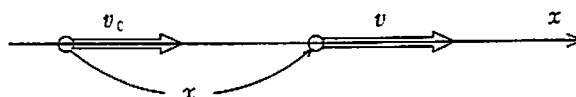


図7

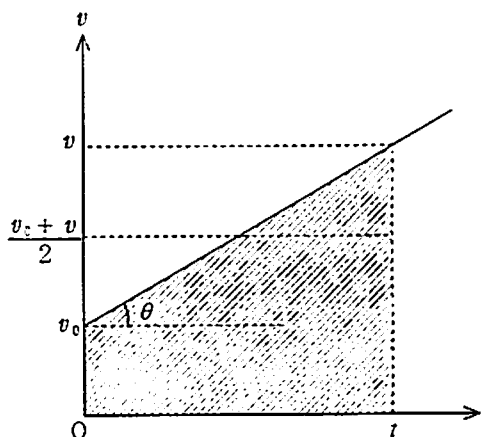


図8

(6) 相対速度

物体A、Bが共に図9のような速度で $x$ 軸上を運動するとき、Bから見たAの速度を、Bに対するAの相対速度といい、これは、

$$v_A + (-v_B) = v_A - v_B$$

$$= 10 - 20 = -10 [\text{m/s}]$$

図10のときの相対速度は

$$\vec{v}_A + (-\vec{v}_B) = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

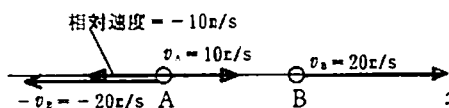


図9

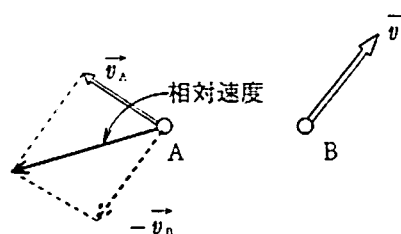


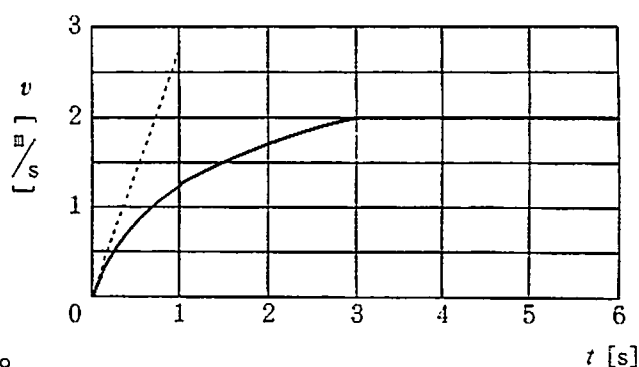
図10

問 題

1.  $x$ 軸上を運動する物体Aの時刻1 s, 3 sにおける位置の座標がそれぞれ2 m, 4 mであった。また、物体Bの時刻1 s, 3 sにおける位置の座標はそれぞれ5 m, 3 mであった。物体A, Bの平均の速度を求めよ。

2. 右図は水平と $\theta$ の角をなす

斜面上に帆のついたそりをおき、そりが斜面にそってすべり落ちるときの、 $v-t$ グラフを示したものである。



- (1)  $t = 0$ におけるそりの加速度の大きさはいくらか。
- (2) そりの終端速度はいくらか。

3. 初速10m/sで等加速度直線運動をする物体が、4.0s後に同じ向きに4.0m/sの速さとなった。

- (1) この物体の加速度はいくらか。
- (2) この物体の15s後の位置はどこか。
- (3) この物体が初速度の向きに初めの位置から最も遠く離れるまでの時間はいくらになるか。
- (4) (3)のときの初めの位置からの距離はいくらか。
- (5) この物体が(2)の15s間に移動した距離はいくらか。

4. 鉛直に速さ5m/sで落ちている雨粒を、船の窓から見たら、鉛直線と $45^\circ$ の角度で斜めに落ちているように見えた。船の速さは毎時何キロメートルか。

[2] 運動の法則

(1) 慣性の法則(第1法則)

物体は外から力を受けないか、外から2つ以上の力がはたらき、これらの力の合力が0(これらの力がつりあう)ならば、加速度を生じない。すなわち静止または等速直線運動をつづける。

(2) 運動の法則(第2法則)

質量 $m$ の物体に力 $\vec{F}$ が作用したときに生じる加速度を $\vec{a}$ とすると、

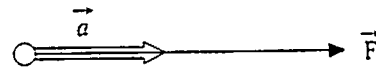


図1

$$a \propto \frac{F}{m} \quad \therefore F = k m a$$

力の単位としてMK S  $kg \cdot m/s^2 = N$ (ニュートン)またはCG S  $g \cdot cm/s^2 = dyn$ (ダイン)を用いると、 $k = 1$ となる。したがって、

$$m a = F$$

なお、力は加速度と同じ方向・向きに生じるので

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad \dots\dots\dots \text{運動方程式}$$

物体に力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ が同時にはたらき、これらの力の合力を $\vec{F}$ とすると、

$$m \vec{a} = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

力が $x, y$ 平面内にはたらき、運動もその平面内で起こるとき、座標成分で示すと、

$$m a_x = F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}$$

$$m a_y = F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}$$

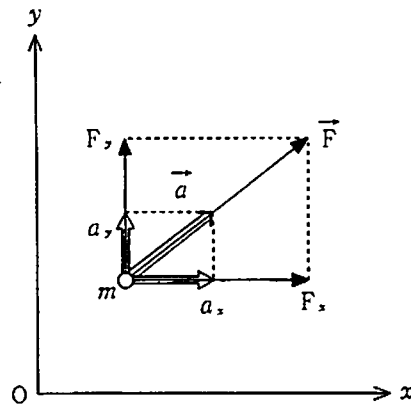


図2

物体が実際に受けている力(反作用のある力)だけで運動方程式の成り立つ座標系を慣性系という。ふつうの運動では地面は慣性系とみなせる。



(3) 作用・反作用の法則(第3法則)

作用  $\vec{F}_A$  があれば必ず反作用  $\vec{F}_B$  があり,  $\vec{F}_A, \vec{F}_B$  は大きさ等しく, 逆向きで, 同じ作用線をもつ。

なお, 物体Cにはつりあう2力  $\vec{F}_A, \vec{F}_B$  がはたらくが, これら2力  $\vec{F}_A, \vec{F}_B$  も大きさ等しく, 逆向きで, 同じ作用線をもつ。

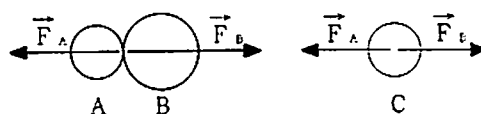
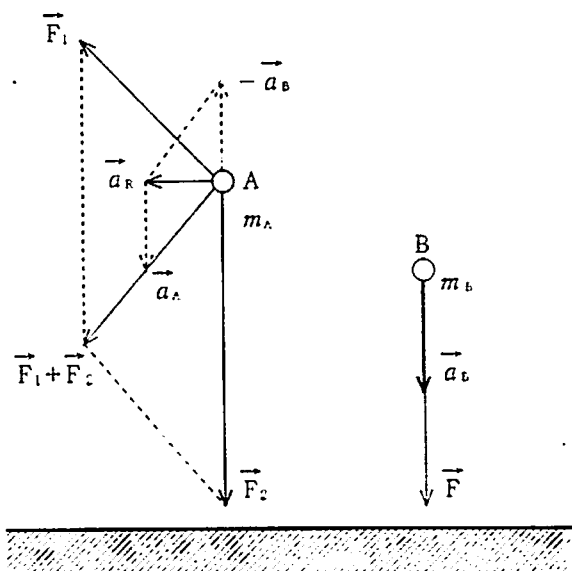


図3

(4) 相対加速度と慣性力

質量  $m_A$  の物体Aには力  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  が作用し, 質量  $m_B$  の物体Bには力  $\vec{F}$  が作用している。A, Bの運動を地面(慣性系)から観測するときの加速度をそれぞれ  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ , Aの運動をB(非慣性系)から観測するときの加速度 (Bに対するAの相対加速度) を  $\vec{a}_R$  とする。



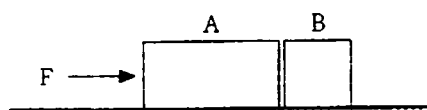
$$\vec{a}_R = \vec{a}_A + (-\vec{a}_B) = \vec{a}_A - \vec{a}_B \dots\dots\dots ① \quad m_A \vec{a}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots\dots\dots ②$$

①の両辺に  $m_A$  をかけて, ②を代入すると,

$$m_A \vec{a}_R = m_A \vec{a}_A + (-m_A \vec{a}_B) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + (-m_A \vec{a}_B) \dots\dots\dots ③$$

③式の  $(-m_A \vec{a}_B)$  を慣性力とよび, この力には反作用はない。

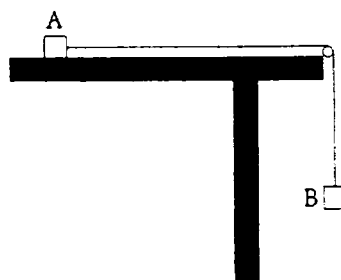
1. 質量 $20\text{kg}$ の物体Aと、質量 $10\text{kg}$ の物体Bとが、滑らかな水平面上に右図のように相接して置いてある。



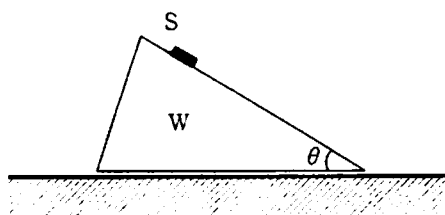
いま、水平方向、右向きに $3\text{kgW}$ の力 $F$ を作用し続けると、物体A、Bは一体となって動く。

- (1) このときの物体Aの加速度はいくらか。
- (2) 物体Bが物体Aに及ぼす力の大きさはいくらか。

2. 右図のように、粗な水平台上に質量 $M[\text{kg}]$ の物体Aを乗せ、これに糸の一端を結び、糸を水平にして滑らかな滑車にかけ、その他端に質量 $m[\text{kg}]$ の物体Bをつるして放すときの物体Aの加速度を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ は、滑りの動摩擦係数は $\mu$ であり、 $m > \mu M$ である。



3. 図のように、水平な床の上に質量 $M$ で頂角 $\theta$ のくさび $W$ を置き、その斜面上に質量 $m$ の小さい物体 $S$ を置く。くさびの面と床および物体との間には摩擦はないものとし、重力加速度の大きさを $g$ とする。



物体もくさびも静止させておいて同時に静かに放すと、物体は斜面を落下し、くさびは床の上を左方へ動く。そのとき、くさびの加速度の大きさを求めよ。

### [3] 力のつりあい

#### (1) 力のつりあい

力のつりあい：力の効果すなわち加速度を生じない。力のつりあうときは運動方程式において  $\vec{a} = 0$  とおくと、

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0 \rightarrow \text{力の多角形は閉じる}$$

これを座標成分で示すと、

$$F_1x + F_2x + \dots + F_nx = 0$$

$$F_1y + F_2y + \dots + F_ny = 0$$

物体のつりあい (静止状態) ← 力のつりあい  
└─ 物体がはじめ静止している

#### (2) 物体にはたらく力の見つけ方

- (a) 力学で扱う力のはたらき方を研究しておくこと。
- (b) 作用・反作用の法則の活用。
- (c) 物体に作用する力は外力であること。
- (d) 慣性力にも注目すること。
- (e) 物体の周囲に注目
- (f) 力の作用点に注目

#### (3) 主な力についての解説

- (a) 重力：地球が物体を引く力。その大きさが重さである。質量  $m$  [kg] の物体に作用する重力の大きさを  $W$  [N] とすると、 $W = mg$ 。ただし、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- (b) つるまきばねの弾性力：  $F = kx$  ただし、 $k$  はばね定数。  
ばねの自然長を  $l$  とすると、 $k \propto \frac{1}{l}$
- (c) 垂直抗力(N)：接触面に垂直な抗力。
- (d) 静止摩擦力：最大値  $F$  は、 $F = \mu N$   $\mu$ ：静止摩擦係数。
- (e) 動摩擦力( $F'$ )：  $F' = \mu' N$   $\mu'$  は動摩擦係数で、速度と反対向き。

- (f) 流体の抵抗力( $F$ ): 物体の速さを $v$ とすると,  $F \propto v^2$
- (g) 糸の張力: 受け身の力。滑車は張力の方向だけを変える。
- (h) 圧力: 流体が物体の面を垂直に押す力。単位面積にはたらく圧力で, 単位は  $\text{N/m}^2 (= \text{Pa}$  パスカル)。
- (i) 浮力: 圧力の合力で, その大きさは物体と同体積の流体の重さに等しい。

問 題

1. 机の上に置いてあるリングにはたらく力およびこれらの力の反作用を図示せよ。
  
2. ばね定数が  $5 \text{ N/m}$  で自然長が  $15 \text{ cm}$  のつまきばねの  $\frac{1}{3}$  を切りとった残り部分のばね定数はいくらか。
  
3. 摩擦角  $\theta$  と静止摩擦係数  $\mu$  との関係を求めよ。
  
4. 重さ  $W$  の物体が粗な斜面上にのせてある。斜面の傾き  $\theta$  は摩擦角より大きく、放置すれば物体は滑り落ちてしまう。  
物体が斜面に沿って、斜面の最大傾斜の方向に力を加えて物体が滑るのを防ぐに足りる最小の力と、最大の力を求めよ。ただし、静止摩擦係数を  $\mu$  とする。
  
5. ビーカーに水を入れて台ばかりの上ののせたところ  $600 \text{ g}$  を示した。質量  $156 \text{ g}$ 、密度  $7.8 \text{ g/cm}^3$  の鉄球を細い糸でつり、これを全部水にかくれるまで水中に入れ、鉄球がビーカーの壁や底につかないように保った。  
水の密度を  $1.0 \text{ g/cm}^3$  として次の問に答えよ。
  - (1) このときの糸の張力はいくらか。
  - (2) このときの台ばかりの読みはいくらか。

#### [4] 重力下の物体の運動

##### (1) 鉛直上方への投射

図1のように初速度  $v_0$  の向きに  $x$  軸をとり、時間  $t$  の後の速度を  $v$ 、座標を  $x$ 、物体の質量を  $m$  とする。運動方程式は、

$$m a = -m g \quad \therefore a = -g$$

したがって、物体は等加速度直線運動をする。

$$v = v_0 + a t \xrightarrow{a = -g} v = v_0 - g t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \xrightarrow{a = -g} x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 a x \xrightarrow{a = -g} v^2 - v_0^2 = -2 g x$$

最高点では  $v = 0$ 、原点では  $x = 0$  となる。

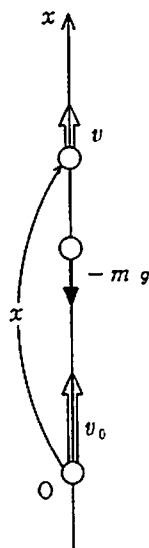


図1



図2

##### (2) 鉛直下方への投射

図2のように初速度  $v_0$  の向きに  $x$  軸をとり、時間  $t$  の後の速度を  $v$ 、座標を  $x$ 、物体の質量を  $m$  とする。運動方程式は  $m a = m g \quad \therefore a = g$

したがって、物体は等加速度直線運動をする。

$$v = v_0 + a t \xrightarrow{a = g} v = v_0 + g t \xrightarrow{v_0 = 0} v = g t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \xrightarrow{a = g} x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 a x \xrightarrow{a = g} v^2 - v_0^2 = 2 g x \rightarrow v^2 = 2 g x$$

←自由落下運動

(3) 水平投射

図3のように初速度 $\vec{v}_0$ の向きに  
 $x$ 軸, 鉛直下向きに $y$ 軸をとる。  
時間 $t$ の後の速度を $\vec{v}(v_x, v_y)$ ,  
座標成分を $(x, y)$ , 物体の質量  
を $m$ とする。

$$m a_x = 0 \quad \therefore a_x = 0$$

$$m a_y = m g \quad \therefore a_y = g$$

したがって,

$x$ 軸方向: 等速直線運動

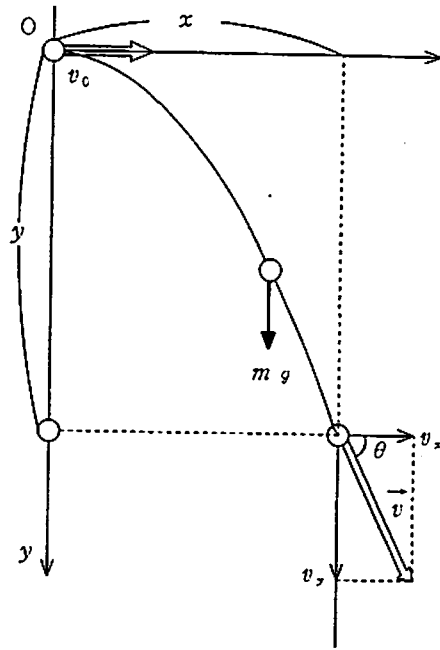
$y$ 軸方向: 等加速度直線運動

$$v_x = v_0, \quad v_y = g t$$

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$



(4) 斜上方への投射

図4のように座標をとり，初速度を $\vec{v}_0$  ( $x$ となす角は $\theta$ )，時間 $t$ の後の速度を $v$  ( $v_x, v_y$ )，座標を $x, y$ ，物体の質量 $v$  ( $v_x, v_y$ )，を $m$ とする。

加速度の座標成分を $a_x, a_y$ として運動方程式を立てると

$$m a_x = 0, \quad m a_y = -m g$$

$$\therefore a_x = 0, \quad a_y = -g$$

したがって， $x$ 軸方向：初速度 $v_0 \cos \theta$ の等速直線運動

$y$ 軸方向：初速度 $v_0 \sin \theta$ の等加速度直線運動

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - g t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

↑

↑

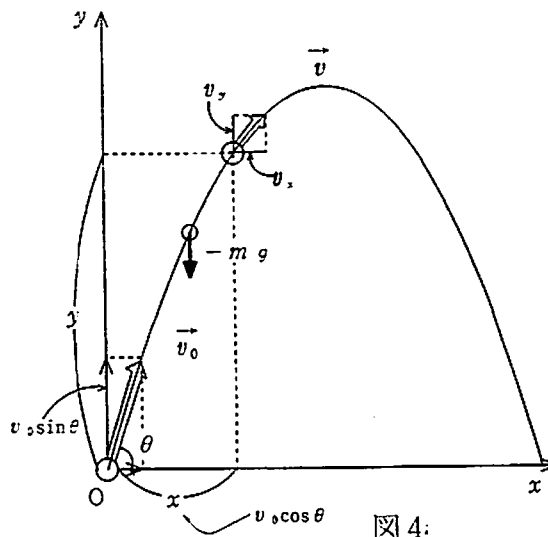
$$(v = v_0 + a t) \quad (x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2)$$

最高点では $v_y = 0$ ，投射点と同じ水平面上では $y = 0$ となる。

$$\text{また, } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

また，最高点の高さ $y$ は $v^2 - v_0^2 = 2 a x$ から，

$$-(v_0 \sin \theta)^2 = -2 g y \quad \therefore y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2 g}$$





問 題

c) 1. 質量 $0.05\text{kg}$ の金属球を地面から $19.6\text{m/s}$ の初速で鉛直上方に投射する。

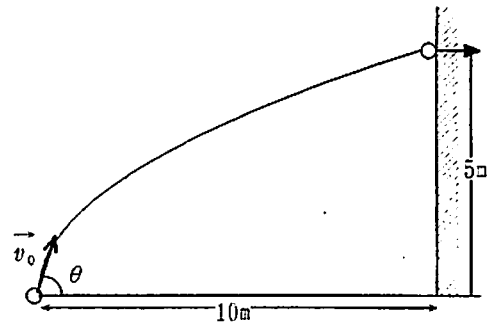
重力加速度の大きさを  $9.8\text{m/s}^2$  として次の各問に答えよ。

- (1) 投射してから3秒後の金属球の位置を求めよ。
- (2) 投射してから3秒後の金属球の速度を求めよ。
- (3) 高さが  $4.9\text{m}$  のところを通過するのは投射してから何秒後か。
- (4) 金属球が投射してから再び地面に達するまでの時間を求めよ。

2. 鉛直な高い壁面がある。壁から $10\text{m}$

離れた点からボールを投げ上げて高さ  $5\text{m}$  の点で壁面に垂直に当たるようにしたい。重力加速度の大きさを  $9.8\text{m/s}^2$  として次の問に答えよ。

- (1) ボールを投げ出してから壁に当たるまでの時間はいくらか。
- (2) 初速度  $\vec{v}_0$  の大きさ  $v_0$  と仰角の大きさ  $\theta$  を求めよ。



[5] 等速円運動と万有引力

(1) 周 期

半径  $r$  の円周上を速さ  $v$ , 角速度 (単位時間の角変位, rad/s)  $\omega$  で運動する物体  $P$  の周期を  $T$  とすれば,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \dots\dots ①$$

①から,  $v = r\omega \dots\dots ②$

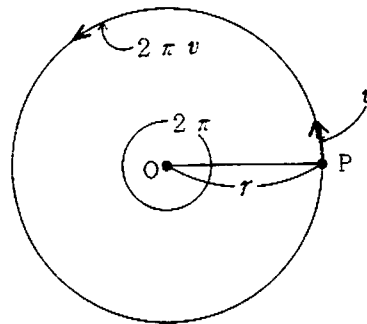


図1

(2) 加 速 度

図2で  $v_1 = v_2 = v$ ,  $\Delta t$  はきわめて小さいとすると,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{P_1 P_2}{r} = \frac{\widehat{P_1 P_2}}{r} = \frac{v \Delta t}{r} \text{ となる。}$$

$P_1$  での加速度を  $\vec{a}$  とすると,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \dots\dots ③$$

$\vec{a}$  の方向は  $\vec{v}_1$  に直角で, 半径方向となり, 円の中心向き。

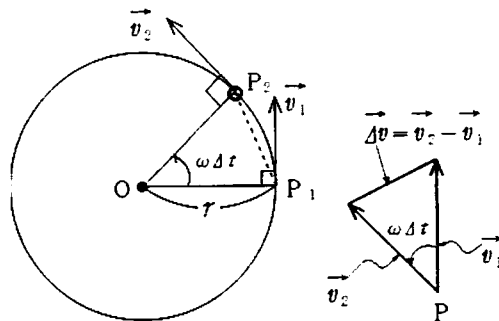


図2

(3) 向心力(慣性力は遠心力)

物体の質量を  $m$  とすれば, 向心力の大きさ  $f$  は,

$$f = ma = m \frac{v^2}{r} = m r \omega^2 \dots\dots ④$$

物体にはたらく力  $\vec{f}$  と速度  $\vec{v}$  とのなす角が  $\theta$  のときは, 図3から,

- $\left\{ \begin{array}{l} f \sin \theta : \text{速度の方向を変える。(向心力)} \\ f \cos \theta : \text{速さを変える。} \end{array} \right.$

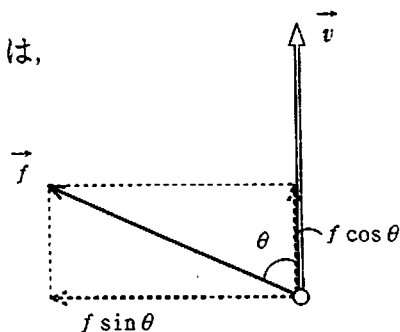


図3

(4) 万有引力の法則

質量  $m_1$ ,  $m_2$  の 2 つの小物体の間には大きさ  $f$  の引力がはたらき, 2 物体の距離を  $r$  とすると,

$$f \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \therefore f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad G \text{ は万有引力の定数で,}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

(5) ケプラーの法則

- a 惑星(P)は太陽(S)を1つの焦点とするだ円軌道をえがく。
- b 惑星の太陽に対する面積速度 (動径が単位時間にえがく面積 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]) は一定である。
- c 惑星の周期を  $T$ , だ円の半長径を  $r$  とすれば, すべての惑星について,

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{一定}$$

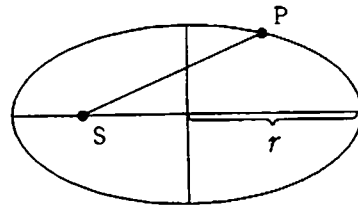


図 4

問 題

1. 長さ0.8mの糸の一端に質量0.1kgのおもりをつけ、滑らかな水平面上で、他端を中心にして1秒間に2回の割合で回転させる。次の問に答えよ。

- (1) おもりの角速度はいくらか。
- (2) おもりの速度の大きさはいくらか。また、速度の方向はどうか。
- (3) おもりの加速度の大きさはいくらか。また、加速度の方向・向きはどうか。
- (4) 糸がおもりを引く力は何Nか。
- (5) 回転を1秒間に4回すると、糸がおもりを引く力は何倍になるか。

2. 半径 $r$ の円周上を小物体が速さ $v$ で等速円運動をするときの面積速度 $\sigma$ を $v$ と $r$ で示せ。

3. (1) 地表上で体重60kgwの人は、地球の中心から地球の半径の2倍のところでは、どれだけの地球の重力を受けるか。また、この場所で、この人の質量は何kgか。

(2) もし、この人が地球の中心を中心として、地球の半径の2倍を半径とする円軌道にある人工衛星船内にいるとしたとき、この人がばねばかり式体重計で体重を測るとはかりの針はどこをさすか。ただし、このとき衛星船はいかなる推進力をも用いていないとする。

(3) この衛星船が地球をまわる周期はいくらか。ただし、地球の半径は、 $6.4 \times 10^6$  m、地表での重力による加速度は、 $9.8 \text{ m/s}^2$ とする。

## [6] 単振動

### (1) 単振動

半径  $A$  の円周上を角速度  
(角振動数)  $\omega$  で等速円運  
動をする物体  $P$  の  $x$  軸上へ  
の射影  $P'$  の行う運動が単  
振動である。したがって、  
 $P'$  の座標を  $x$  とすれば、  
図1から、

$$x = A \sin \omega t \quad \dots \textcircled{1}$$

$P'$  の速度を  $v$  とすると、

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t \quad \dots \textcircled{2}$$

$P'$  の加速度を  $a$  とすれば、

②を用いて、

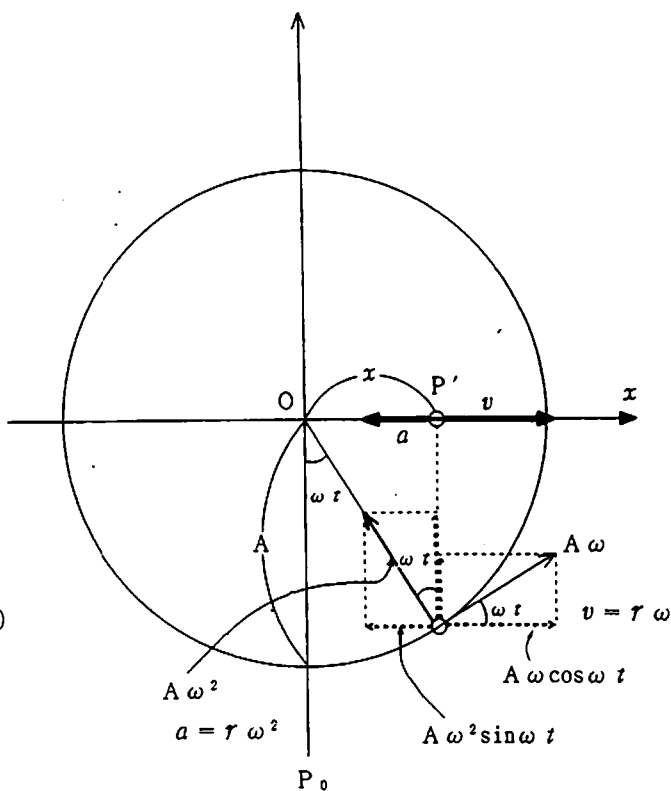
$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \sin \omega t \\ &= -\omega^2 \cdot A \sin \omega t = -\omega^2 x \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

単振動を行う物体  $P'$  の質量を  $m$  とすれば、③から、

$$m a = -m \omega^2 x = -k x \quad \leftarrow \text{単振動の運動方程式}$$

ただし、 $k = m \omega^2 \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

単振動の周期を  $T$  とすれば、 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$



(2) ばね振り子(水平の場合)

運動方程式は、ばね定数を  $k$

とすると、 $ma = -kx$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{であるから,}$$

$$\text{周期 } T \text{ は, } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

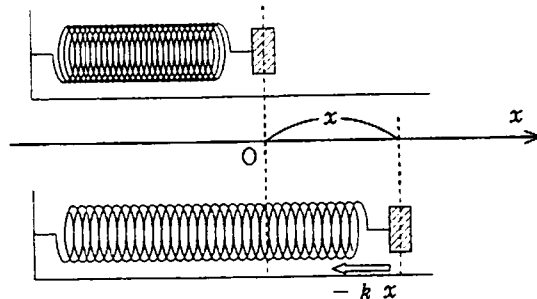


図2

(3) 単振り子

振り子の長さを  $l$ , おもりの質量を  $m$  とすると、おもりを振動させる力は、 $\theta$  の小さいとき、

$$mg \sin \theta \approx mg \theta \approx mg \frac{x}{l}$$

したがって、運動方程式は、

$$ma = -mg \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

周期  $T$  は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \leftarrow \text{重力は下向き}$$

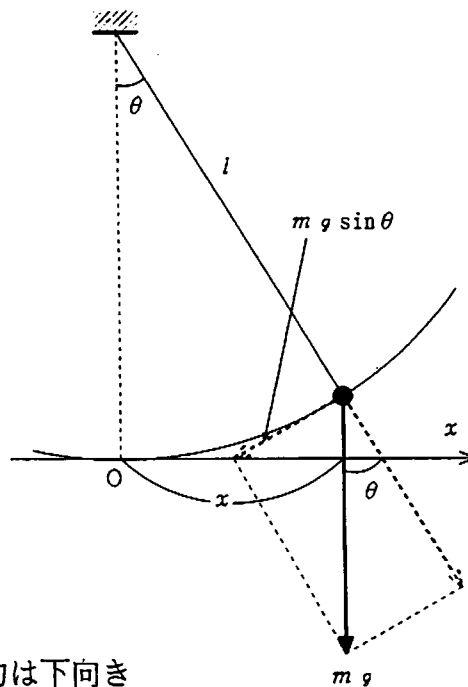


図3

問 題

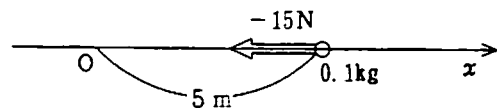
1. 原点 $O$ を中心として $x$ 軸上で単振動をする物体がある。その振幅は $4\text{ cm}$ 、振動数は $0.5\text{ Hz}$ 、初期位相は $30^\circ$ であるとして、次の間に答えよ。

- (1) この単振動を表す式を書け。
- (2)  $t = 1\text{ s}$ のとき、物体の位置の座標 $x$ を求めよ。
- (3)  $t = 1\text{ s}$ のときの物体の速度 $v$ を求めよ。
- (4)  $t = 1\text{ s}$ のときの物体の加速度 $a$ を求めよ。

2. ばね定数 $k$ のつるまきばねの上端を固定し、下端に質量 $m$ の小物体をとりつけ、小物体を鉛直方向に振動させる。次の場合の運動方程式を立てよ。

- (1) ばねが自然長のときの小物体の位置を原点とし、鉛直下向きに $x$ 軸をとったとき。
- (2) 小物体のつりあいの位置を原点とし、鉛直下向きに $x$ 軸をとったとき。

3. 単振動をする質量 $0.1\text{ kg}$ の物体がある。この物体の原点 $O$ から最も遠く離れたときの距離は $5\text{ m}$ で、そのときの物体に働く力の大きさは $15\text{ N}$ である。



- (1) この物体が原点 $O$ を通るときの速さはいくらか。
- (2) この単振動の周期はいくらか。
- (3) この物体の変位が $2.5\text{ m}$ のときの物体の速さはいくらか。
- (4) この物体の変位が $2.5\text{ m}$ のときの物体の加速度の大きさはいくらか。

4. 長さが $l$  [ $\text{m}$ ]のとき正しい時間を示す振り子時計の長さが $\Delta l$  [ $\text{m}$ ]だけ伸びたとき、1日にいくらおくれるか。

[7] 運動量とその保存

(1) 運動量の変化と力積

図1のような等加速度直線運動のときには、運動方程式は次のようになる。



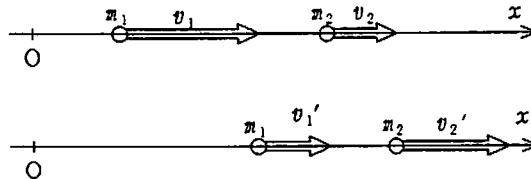
図1

$$m \frac{v_2 - v_1}{t} = F \dots\dots \textcircled{1} \rightarrow \underline{mv_2 - mv_1 = Ft} \dots\dots \textcircled{2}$$

②式は「運動量(質量と速度の積 kg・m/s)の変化は力積(力と時間の積N・s)に等しい」ことを示している。この関係はいかなる運動のときにも成り立つ。

(2) 運動量保存の法則

質量 $m_1$ ,  $m_2$ の球が図3のように運動して直衝突したとすると、外力がはたらかないときには、



$$m_1 v_1' - m_1 v_1 = F_1 t$$

$$m_2 v_2' - m_2 v_2 = F_2 t$$

これら2式を加えて、

$$(m_1 v_1' + m_2 v_2') - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = (F_1 + F_2) t = 0$$

図3

これら2力は作用・反作用で $F_1 + F_2 = 0$

$$\therefore m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \leftarrow \text{運動量保存の法則}$$

図4は斜衝突のときで、外力がはたらかないときには、

$$m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1 = \vec{F}_1 t$$

$$m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2 = \vec{F}_2 t$$

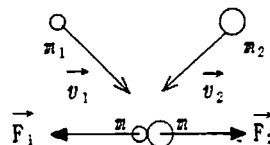


図4

これら2式を加えて、

$$(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') - (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) t = 0$$

$$\therefore m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \leftarrow \text{運動量保存の法則}$$



座標成分で示すと,

$$m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

衝突のとき作用する力は撃力であるが, この力は非常に大きな力でしかも短時間作用する。このため, 外力が作用しても, 外力の力積は撃力の力積にくらべて無視できることになり, 運動量は保存される。また, 1つの物体が2つ以上の物体にわかれる現象を分裂というが, このときも撃力が作用し外力の作用のする場合でも運動量は保存される。

### (3) 衝突の法則

図3の直衝突のとき,

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e$$

ただし,  $e$  は反発係数(はね返り係数)で,  $e = 1$  のとき(完全)弾性衝突(力学的エネルギーは保存される),  $0 \leq e < 1$  のとき非弾性衝突,  $e = 0$  のとき完全非弾性衝突という。

### (4) 運動量の保存と重心の運動

質量  $m_1, m_2$  の球が図5のように運動して直衝突するものとする。

$m_1, m_2$  の重心(G)の座標を  $\bar{x}$  とすると,

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

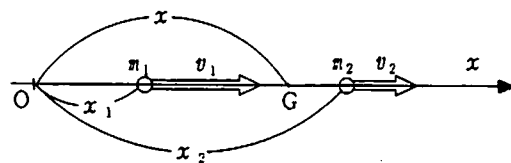


図5

これを变形して時間  $t$  について微分すると,

$$(m_1 + m_2) \frac{d\bar{x}}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{\text{運動量の保存}} = \text{一定}$$

したがって, 運動量が保存されるときには, 重心の速度  $\frac{d\bar{x}}{dt}$  は一定となる。

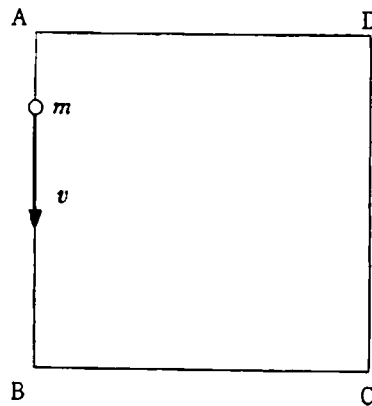
問 題

1. 次の各問に答えよ。

- (1) 質量が $0.3\text{kg}$ のボールが $20\text{m/s}$ の速さで飛んでくるのを打ち返したら、初めと反対向きに初めと同じ速さでボールは飛び去った。このとき、ボールに与えられた力積を求めよ。
- (2) 水平でなめらかな床に質量 $m$ 、速さ $v$ のボールが入射角 $\theta$ で衝突した。反射直後のボールの速度を求めよ。ただし、反発係数は $e$ である。

2. 次の各問に答えよ。

- (1) 右図のように正方形 $ABCD$ の辺に沿って速さ $v$ で運動する質量 $m$ の小物体がある。この小物体が $B$ で曲がる時、この物体に与えられる力積はいくらか。
- (2) 水平方向に速さ $v_0$ で飛んできた質量 $m$ のボールをバットで打ったところ、ボールは鉛直上方に高さ $h$ まで上昇した。このときの力積の大きさと、力積が水平面となす角 $\theta$ の正接を求めよ。



3. 次の各問に答えよ。

- (1) 質量 $M$ の銃から質量 $m$ の弾丸を発射したとき、弾丸の初速が $v$ であった。銃の初速度の大きさはいくらか。
- (2) 質量 $M$ の大砲より、質量 $m$ の弾丸が大砲に対して $v$ の速さで水平方向に発射されるとき、大砲および弾丸の地面に対する速さを求めよ。
- (3) 全質量が $M$ のロケットが速さ $v$ で飛んでいるとき、その後尾から質量 $m$ の火薬を瞬間的に後方にふき出した。火薬はロケットに対して $V$ の速さで噴出されたとする。火薬をふき出した後の速さはいくらか。

4. 質量 $m$ 、 $4m$ の2球A、Bが、同じ直線上を逆向きに同じ速さ $5.0\text{m/s}$ で運動し、反発係数 $0.50$ で衝突した。

- (1) 衝突後のA、Bの速さを求めよ。
- (2) 衝突のとき、AはBに、BはAへ力をおよぼす。その力が最大のときのA、Bの速さを求めよ。

[8] 仕事と力学的エネルギー

(1) 仕事

(a) 力  $\vec{F}$  が物体にする仕事:

$$W = F s \cos \theta$$

ただし,  $\vec{s}$  は物体の変位である。

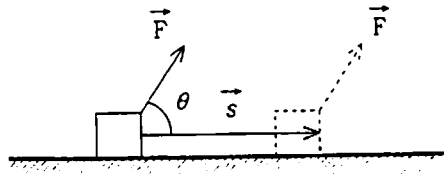
力の単位は,  $\text{N} \cdot \text{m} = \text{ジュール}(\text{J})$ ,

$\text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{エルグ}(\text{erg})$ 。

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $W > 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき  $W = 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  のとき,

$W < 0$ , 特に  $\theta = \pi$  のときには  $\cos \pi = -1$  であるので,

$W = F s \cos \pi = -F s$  となる。このとき, 物体は力  $\vec{F}$  に逆って仕事  $F s$  をした という。



右向き速度をもつ物体に床から動摩擦力  $F$  がはたらきながら, 物体は  $s$  だけすべって停止したとする。このとき摩擦力  $F$  が物体にした仕事は  $-F s$  である。摩擦力の反作用を  $F'$  とすると, この物体は摩擦に逆らって  $F' s = F s$  ( $F' = F$ ) だけの仕事を床に対してする。

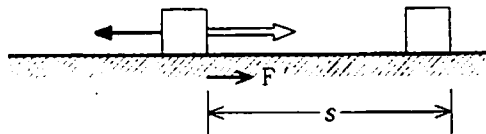


図 2

(b) 仕事率: 力が単位時間にする仕事で, 時間  $t$  の間に力のする仕事を  $W$  としたときの仕事率を  $P$  とすると,

$$P = \frac{W}{t} \quad [\text{J/s} = \text{ワット}(\text{W})]$$

(c) 仕事の原理: 機械が外にする仕事を  $W_1$ , 機械に与えられた仕事を  $W_2$  とするとき,  $W_1 \leq W_2$

(2) 仕事と運動エネルギー

図3のような等加速度直線運動では、

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 a x$$

物体の質量を  $m$ 、はたらく力を  $F$  とすると、

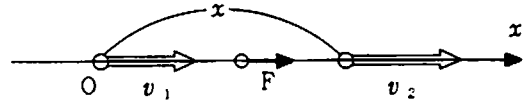


図3

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \underline{m a} x = F x = W$$

$$(m a = F)$$

質量  $m$ 、速さ  $v$  の物体の運動エネルギー  $K$  は  $K = \frac{1}{2} m v^2$  であるから、

上の式は「運動エネルギーの変化  $K_2 - K_1$  は仕事  $W$  に等しい。」ことを示している。  
すなわち、 $K_2 - K_1 = W$  …… ①

(3) 保存力のなす仕事と位置エネルギー

質量  $m$  の物体を  $P_1$  から  $P_2$  に移動させるとき重力のする仕事を  $W_p$  とすると、

$$\begin{aligned} W_p &= m g (h_2 - h_1) \cos \pi \\ &= -(m g h_2 - m g h_1) \end{aligned}$$

となる。重力による位置エネルギー  $-U$  を

$$U = m g h \text{ (基準は任意)}$$

とすれば、

$$m g h_1 = U_1, \quad m g h_2 = U_2$$

とにおいて、

$$W_p = -(U_2 - U_1) \text{ …… ②}$$

$$W_p > 0 \text{ のとき } (U_2 - U_1) < 0 \quad \therefore U_2 < U_1$$

$$W_p < 0 \text{ のとき } (U_2 - U_1) > 0 \quad \therefore U_2 > U_1$$

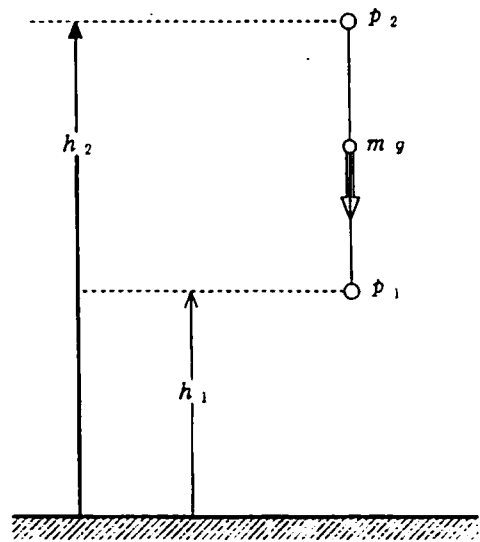


図4

質量 $m$ の物体を $P_1$ から $P_2$ に移動させるとき、重力のなす仕事は径路( $P_1Q P_2$ ,  $P_1R P_2$ )によらず $mgh$ となる。このような力が保存力であって、位置エネルギーをもつ。

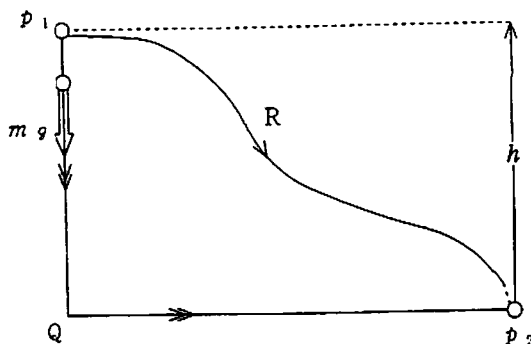


図5

つるまきばねの弾性力も保存力で、ばね定数 $k$ 、伸びまたは縮みが $x$ のときの位置エネルギー $U$ は

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \text{ (基準は } x = 0 \text{)}$$

である。また万有引力も保存力で、物体間の距離が $x$ のときの位置エネルギー $U$ は

$$U = -\frac{GMm}{x} \text{ (基準は } x = \infty \text{) である。そして、保存力の場合はすべて②の関係が成り立つ。}$$

(4) 力学的エネルギー保存の法則

物体に保存力と非保存力とが作用し、それらのなす仕事をそれぞれ $W_p$ ,  $W_q$ とすると、①は、 $K_2 - K_1 = W = W_p + W_q$

この式に②を代入して、 $K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) + W_q$

$$\therefore (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = W_q \dots\dots \text{③}$$

運動エネルギーと位置エネルギーとの和を力学的エネルギーとよぶ。③は「力学的エネルギーの変化は非保存力のなす仕事に等しい。」ことを示している。③において $W_q = 0$  (非保存力が仕事をしない)ならば

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \dots\dots \text{力学的エネルギー保存の法則}$$

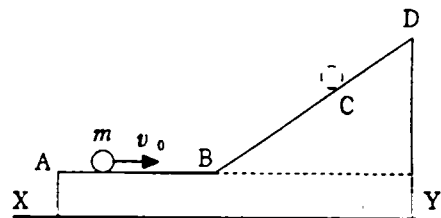
(5) 水平なばね振り子の単振動のエネルギー( $E$ )

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \text{ ただし、} k \text{ はばね定数、} A \text{ は振幅。}$$

問 題

1. 初速 $v_0$ 、仰角 $\theta$ で投射された質量 $m$ の物体の最高点の高さを求めよ。
2. 長さ $l$ の糸APのA端を固定し、他端におもりPをつけたものを水平にし、おもりPを鉛直上方に投げて円運動をさせるための最小の初速を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを $g$ とする。おもりの質量を $m$ とする。  
また、おもりが円運動を続け、円の最下点にきたときの糸の張力はいくらになるか。
3. ばね定数 $k$ のつるまきばねの一端に質量 $m$ のおもりをつけて作った鉛直なばね振り子が振幅 $A$ の単振動をしている。このおもりの単振動のエネルギーを $k$ 、 $A$ を用いて示せ。
4. 次の各問に答えよ。
  - (1) 質量が $M$ 、 $m$ の物体が $r$ の距離にあるときの万有引力による位置エネルギーを求めよ。ただし、万有引力の定数を $G$ として、両物体間の距離が無限大のとき、位置エネルギーは0とする。
  - (2) 地球の引力をふり切ってロケットを飛び出させるには、少なくともどれだけの初速をロケットに与えなければならないか。ただし、地球の半径を $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 、地表における重力加速度の大きさを $9.8 \text{ m/s}^2$ とする。

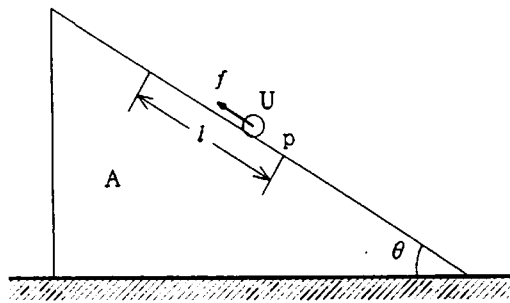
5. 滑らかな水平面ABと、これに続く滑らかな斜面BDをもった質量 $M$ の台を、滑らかな水平面XY上に置き、AB上に質量 $m$ の小球をのせる。小球を斜面のほうへ初速 $v_0$ で滑らせたなら、BD上をCまで



- で上がって降りてきた。重力加速度の大きさを $g$ として次の問に答えよ。
  - (1) 小球がCに達した瞬間の台の速さはいくらか。
  - (2) 点CはABからどれだけの高さのところか。
  - (3) 小球がCから戻ってきてAB上を動いているときの台の速さはいくらか。

## 演習問題

1. (A) 図1に示すように、傾斜角  $\theta$  のなめらかな斜面をもつ質量  $M$  の台 A がなめらかな水平面上に置かれている。紙面を鉛直面とし、以下の運動はすべてこの面に平行に起こるものとする。重力加速度の大きさを  $g$  とする。



台 A を固定して、斜面上の点 P に静止させていた質量  $m$  の小物体

B に、斜面に沿った一定の大きさの力  $f$  (ただし、 $f > m g \sin \theta$ ) を加え続けて距離  $l$  だけ押し上げたところで力を加えるのをやめる。このときの時刻を  $t = 0$  とする。 $M, m, \theta, f, l, g$  を与えられた量とすれば、 $t = 0$  における小物体 B の速度の大きさ  $v_0$  は  $\gamma$  ( ) と表される。

$t = 0$  で台 A の固定をはずすと、図2に示すように台 A は左の方へ動き始める。このときの台 A の水平面に対する加速度の大きさを  $a$ 、小物体 B が斜面から受ける垂直抗力の大きさを  $N$  とすれば、台 A の運動方程式は  $M a = \gamma$  ( ) と書ける。ただし、加速度  $a$  は図2の矢印の向きを正とする。

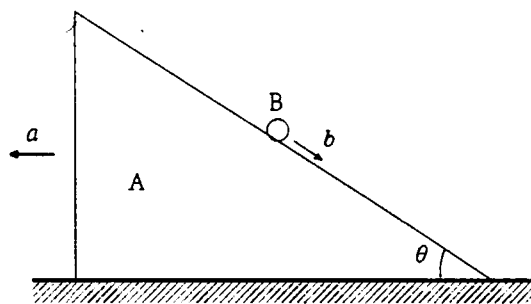


図2

つぎに小物体 B の運動を台 A から観測すると、小物体 B には大きさ  $\gamma$  ( ) の慣性力が働いていると見なされる。台 A から観測すると、小物体 B は最初斜面に沿って上の方へしばらく運動した後、下の方に運動の向きを変え、その後斜面に沿ってすべり落ちて行く。小物体 B の台 A に対する加速度の大きさを  $b$  とすれば、台 A から見た小物体 B の斜面に沿った方向の運動方程式は  $m b = \gamma$  ( ) と書ける。ただし、



加速度  $b$  は図 2 の矢印の向きを正とする。また、台 A から観測した場合の小物体 B の斜面に垂直な方向の力のつりあいの式は  $N = \mu(\quad)$  と書ける。

以上の 2 つの運動方程式と 1 つの力のつりあいの式より、 $a$ 、 $b$ 、 $N$  を与えられた量  $M$ 、 $m$ 、 $\theta$ 、 $g$  で表すことができる。

(B) つぎに、水平面上に静止した位置から台 A と小物体 B の運動を観測した場合を考える。このとき、時刻  $t$  における台 A と小物体 B の水平方向の運動量の和（左向きを正にとる）を求めよ。

(岡山大-S63)

2. 次の (1)  ~ (10)  には数式を、(イ)  には語句を入れよ。

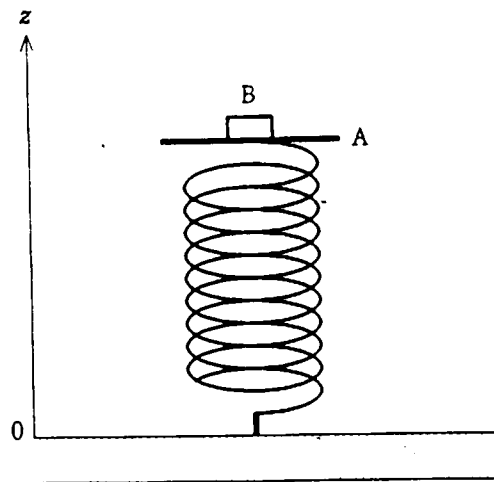
$x$  軸を水平面上に、 $y$  軸を鉛直上方にとる。 $x$ - $y$  平面内を運動するように  $x$  軸上の異なる 2 点から同時刻に投げられた小球 A と小球 B を考えよう。A 球(質量  $m$ ) は原点から  $x$  の正の向きに仰角  $45^\circ$ 、初速度  $v_0$  で、B 球(質量  $\sqrt{3}m$ ) は  $x$  座標  $l (> 0)$  の地点から  $x$  の負の向きに投げ上げられた。A 球が最高点に達したとき、A 球と B 球は正面衝突した。重力加速度を  $g$  とし、空気の抵抗は無視する。

A 球が最高点に達するまでの時間は (1)  で、最高点の  $x$  座標は (2) 、 $y$  座標は (3)  である。衝突後、A 球は原点に落下したとする。衝突前後で (イ)  の法則が成り立つから、B 球の速度の  $x$  成分を衝突の直前、直後でそれぞれ  $V_x$ 、 $V_x'$  とすると、 $v_0$ 、 $V_x$ 、 $V_x'$  の間に  $v_0 =$  (4)  の関係式が得られる。さらに、衝突が弾性衝突の場合には、A 球の初速度  $v_0$  を使って、 $V_x =$  (5) 、 $V_x' =$  (6)  となる。したがって、B 球は速さ (7) 、仰角 (8)  ( $< 90^\circ$ ) で、 $x$  座標  $l =$  (9)  の地点から投げられたことになる。また、B 球は  $x$  座標 (10)  の地点に落下する。

(北大-S62)

3. 次の文を読み、以下の設問に答えよ。

右図に示すように、水平な床に固定された、質量が無視できる自然長  $s$ 、ばね定数  $k$  のばねに、質量  $M$  の薄い台  $A$  をのせてばねに固定した。さらにその台の上に質量  $m$  の小さなおもり  $B$  を静かにのせたところ、自然長  $s$  より  $d$  だけ縮んでつりあった。そのつりあいの位置からさらに台をおし下げ、手を離れたところ、ばねは上下に振動を始めた。



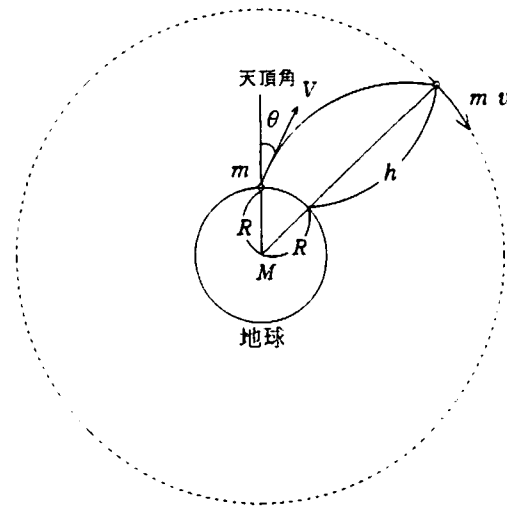
ここで、重力加速度の大きさを  $g$  とし、座標軸はばねの下端を原点とし鉛直上向きに  $z$  軸をとるものとする。

設問：

- (1)  $d$  を求めよ。
- (2) 手を離れた後、おもり  $B$  をのせて上昇運動している台  $A$  の座標が  $z$  のとき、おもり  $B$  が台  $A$  より受ける(垂直)抗力を  $N$  とし、上向きの加速度を  $a$  とする。そのときの台  $A$  とおもり  $B$  の運動方程式をそれぞれかけ。
- (3) 台  $A$  とおもり  $B$  が離れないで一体となって単振動をすることがある。その場合の振動の中心座標と周期を求めよ。
- (4) おもり  $B$  が台  $A$  と離れないで一体となって単振動を行うためには、どのような条件が必要か。「抗力」という言葉を用い、50字以内の文章で答えよ。ただし、おもり  $B$  と台  $A$  との間には付着力は働かないものとする。
- (5) (4)の条件を満足するための振動の振幅  $C$  の範囲を求めよ。
- (6) 初めの  $d$  だけ縮んだつりあいの状態から、さらに  $2d$  だけおし下げ手を離れた場合、おもり  $B$  は鉛直上方どこまで上がるか。その床からの高さを  $s$  と  $d$  を用いて答えよ。

(静岡大-S63)

4. 図のように人工衛星を打ち上げたい。万有引力定数を $G$ とし、地球の質量を $M$ 、半径を $R$ とする。地表からの高さ $x$ にある質量 $m$ の小物体にはたらく万有引力による位置エネルギーは、 $-GMm/(R+x)$ である。空気抵抗や地球以外の天体の影響は無視する。問(a)~(d)では地球の自転の影響も無視せよ。

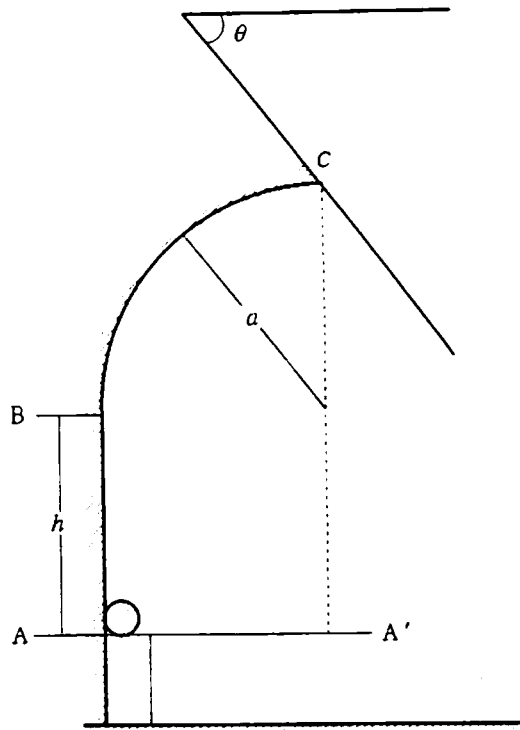


- (a) 質量 $m$ の小物体を地表から速度 $V$ で発射した。到達した最高点の地表からの高さを $h$ とし、そこでの小物体の速さ $v$ を求めよ。
- (b) 万有引力のもとでの運動においては、面積速度（地球の中心と小物体とを結ぶ線分が単位時間に通過する面積）が一定である（ケプラーの第2法則）。小物体を地表から天頂角（地球の中心から小物体へ向かう直線と速度 $V$ とのなす角） $\theta$  [rad] の方向に打ち上げる。打ち上げてから微小時間 $\Delta t$ の間に小物体と地球の中心とを結ぶ線分が描く微小三角形の面積を求めよ。また、ケプラーの第2法則を用い、最高点（高さ $h$ ）での速さ $v$ を求めよ。
- (c) 速度 $v_0$ を持つ質量 $m$ の小物体が、質量 $m_1$ の衛星と質量 $m - m_1$ のブースターとにわかれた。両者の間に瞬間的にはたらく力で衛星はブースターに対して $v_0$ と同じ向きに相対速度 $v_r$ を得た。この直後の衛星の速さを求めよ。
- (d) 質量 $m_1$ の衛星が地表からの高さ $h$ の円軌道上をまわるものとする。衛星の速さを $h$ を用いて表せ。
- (e) 自転している地球上の観測者から見て静止している衛星を静止衛星といい、その軌道は赤道面内にある。地球の自転角速度を $\omega$  [rad/s]とする。質量 $m_1$ の静止衛星の軌道の地表からの高さを求めよ。

(東工大-S62)

5. 文中の空欄に当てはまる答えを記せ。

右図に示すように水平な床に固定され鉛直上方に伸びている摩擦が無視できる滑らかな壁がある。壁の上端部(B C)は半径  $a$  の円弧(1/4円周)になっており、その最高点Cに隣接して滑らかな剛体平板が水平面と角度  $\theta$  をなして固定されている。また壁の下端部に隣接してその一端が床に固定されたバネ定数  $K$  のバネがある。重力の加速度を  $g$  とし、バネの質量は無視するものとする。



バネを自然長から  $l$  だけ圧縮し、その上端(A点)に質量  $m$  の小さな球を静かに置く。A点を基準点に選ぶと、このときの系(球+バネ)の力学的エネルギーは (1)  である。バネを離すと、球は鉛直上方に向かって運動をはじめ。バネの弾性エネルギーが大きければ、球は最高点Cまで壁とつねに接触を保ちながら運動する。C点での球の速さを  $v_0$ 、AB間の距離を  $h$  とすると、C点での系の力学的エネルギーは (2)  となる。このような球の運動を可能にする  $v_0$  の最小値は (3)  であり、このときの  $K$  の値は (4)  となる。

次に、球が(3)で求めた  $v_0$  の速さで剛体平板と衝突し、鉛直下方に速さ  $v_1$  ではね返るように  $\theta$  が調整されている場合を考える。反発係数(はね返りの係数)を  $c$  とし、球と剛体板が接触している間、剛体板に平行な力は働かないものとするれば、 $\theta$  は  $\tan \theta =$  (5) 、 $v_1$  は  $\theta$  を含まない形で示すと、 $v_1 =$  (6)  なる関係を満たさねばならない。この場合、衝突の直前直後での系の力学的エネルギーの減少量は(7)  となる。また、この場合、球が剛体板を離れてからA点と同じ高さA' 点に到達するまでに要する時間は (8)  であり、A' 点での速さは (9)  となる。

(早大理工-S63)

6. なめらかな床の上に、図1のような台車Kがあり、天井に固定した点Oから、質量 $m$ の小球Aと、その $n$ 倍の質量の小球Bとが同じ長さ $l$ の糸でつり下げられている。この糸について、以下の問いに答えよ。速度は右向きを正として解答せよ。また、重力加速度を $g$ とし、糸の長さ、点Oでの摩擦、および小球の大きさを無視する。

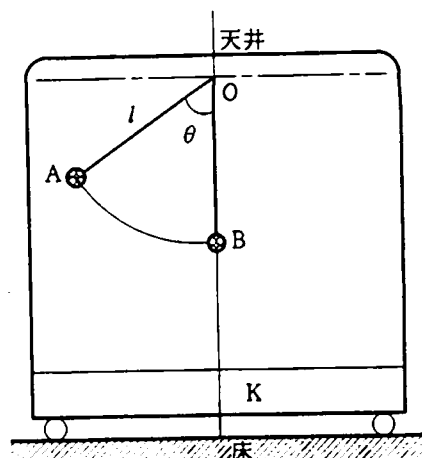


図1

まず、台車Kを床に固定し、小球Aを持ち、図1のように紙面内で、糸がたわまないように角度 $\theta$ だけ傾け静かにはなした。

- (1) はねかえりの係数(反発係数)を $e$ として、衝突直後のA、Bの速度 $v_A$ 、 $v_B$ を求めよ。
- (2)  $0 < e \leq 1$ のとき、衝突直後のA、Bの速度の大きさが等しくなるための $n$ の値 $n_0$ はいくらか。
- (3)  $n = n_0$ のとき、2回目の衝突も点Oの直下で生じることを説明せよ。

次に、図2のように小球Bのかわりに板Cを、その左の面が紙面に垂直で点Oの直下になるよう台車に固定した。さらに床との固定をはずし、台車が左右になめらかに動くようにした。板を加えた台車の質量は $M$ であった。台車を静止させて小球Aを持ち、糸がたわまないように、また張力が加わらないようにして、紙面内で $90^\circ$ 傾け静かにはなした。

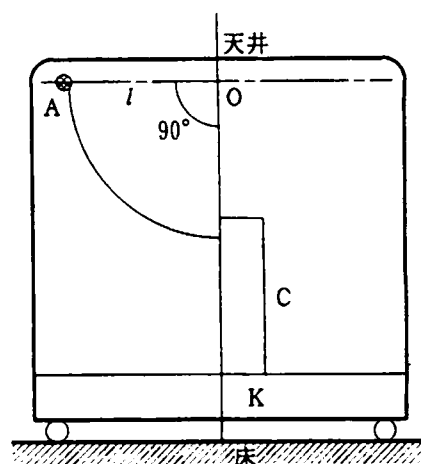


図2

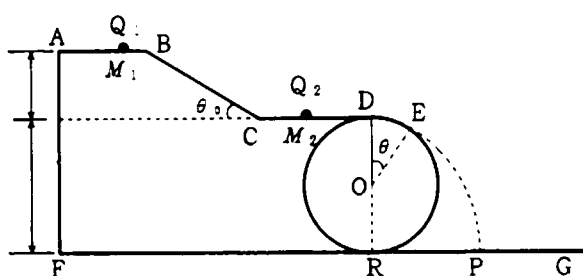
- (4) 小球Aが板Cに衝突する直前の、小球の速度 $V_A$ 、および台車の速度 $V_K$ を求めよ。

- (5) 小球Aと板Cとが(完全)弾性衝突するとき、衝突した直後の小球の速度 $W_A$  および台車の速度 $W_K$ を求めよ。

ここで、 $V_A$ ,  $V_K$ ,  $W_A$ ,  $W_K$  は床に対する速度とする。また、板Cは変形せず、台車は傾かないものとする。さらに、質量 $M$ は小球の質量を含まないものとする。

(埼玉大-S63)

7. 図に示すように、質量 $M_1$ [kg]の小球 $Q_1$ が、水平面FGから高さ $2r+h$ [m]の位置にある水平面AB上に静止している。いま小球 $Q_1$ が点Bの位置から無視できる初速度で、すべり動摩擦係数 $\mu$ の斜面BCをすべり落ちると



する。斜面BCをすべりおりた後、なめらかな水平面CD上を運動し、CD上に静止している質量 $M_2$ [kg]の小球 $Q_2$ に衝突する。衝突後 $Q_2$ は速さ $v_2$ [m/s]で運動し、半径 $r$ [m]のなめらかな円柱面DEをすべり、点Eにおいて円柱面を離れ自由落下運動をして、水平面FG上の点Pに落下するものとする。この一連の運動経路は円柱軸Oに垂直な平面内にあるものとし、面BCDEにおいてはその面を離れることなくすべるものとする。重力の加速度の大きさを $g$ [m/s<sup>2</sup>]とし、空気の抵抗は無視できるものとして次の各問に答えよ。

- (1) 斜面BCが水平面CDとなす角を $\theta_0$ とすると、点Cにおける小球 $Q_1$ の速さ $v_1$ [m/s]を求めよ。
- (2) 2個の小球 $Q_1$ と $Q_2$ の間のはね返りの係数を $e$ として、 $v_2$ [m/s]の大きさを $e$ ,  $v_1$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ を用いて表せ。
- (3) 小球 $Q_1$ の点Eにおける円柱面の接線方向の速さ $v_3$ [m/s], および円柱の半径OEが半径ODとなす角を $\theta$ として、 $v_3$ と $\cos \theta$ を $g$ ,  $v_2$ ,  $r$ を用いて表せ。
- (4) 小球 $Q_2$ が円柱面上から離れずに有限の距離をすべるために必要な $v_1$ に対する条件を $g$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $e$ ,  $r$ を用いて表せ。
- (5) 小球 $Q_2$ が点Eにおいて円柱面を離れた後、点Pに達するまでに要する時間 $t$ [s]と距離 $\overline{RP}$ [m]を $g$ ,  $v_3$ ,  $\theta$ ,  $r$ を用いて表せ。 (九州工大-H1)

## II 熱と気体の分子運動

### [9] 熱と気体の圧力

#### (1) 熱 量

(a) カロリー(cal): 水 1g の温度を 1 K (ケルビン) 上げるのに必要な熱量

(b) 熱容量: 物体の温度を 1 K 上げるのに必要な熱量で単位は cal/K。熱容量が  $C$  [cal/K] の物体に  $Q$  [cal] の熱を与えたときの上昇温度を  $\Delta t$  [K] とすれば,

$$Q = C \Delta t$$

(c) 比 熱: 物質 1g の温度を 1 K 上げるのに必要な熱量で単位は cal/g · K。

比熱が  $s$  [cal/g · K], 質量が  $m$  [g] の物体に  $Q$  [cal] の熱を与えたときの上昇温度を  $\Delta t$  [K] とすれば,

$$Q = s m \Delta t \quad \text{したがって } C = s m$$

(d) 熱の仕事当量(J):  $J = 4.19 \text{ J/cal}$

(e) 水の融解熱( $Q_1$ )と気化熱( $Q_2$ ):  $Q_1 = 80 \text{ cal/g}$ ,  $Q_2 = 539 \text{ cal/g}$

(f) 飽和蒸気圧: 一般に温度とともに増加する。100°C のときの水の飽和蒸気圧は 1 atm。

(g) 線膨張係数: 温度  $t_1$  [°C],  $t_2$  [°C] のときの物体の長さをそれぞれ  $l_1$ ,  $l_2$  とすると,

$$l_2 - l_1 \propto l_1 (t_2 - t_1)$$

$$\therefore l_2 = l_1 + \alpha l_1 (t_2 - t_1) = l_1 \{1 + \alpha (t_2 - t_1)\}$$

ただし,  $\alpha$  を線膨張率といい, 単位は 1/K。

(2) 圧 力

(a) 圧力(の強さ): 単位面積について  
の圧力で単位は  
 $\text{N}/\text{m}^2 (= \text{Pa} \text{ パスカル})$

(b) 液体の圧力と深さ:

$$p_2 = p_1 + dgh \text{ (MKS, CGS)}$$

$$p_2 = p_1 + dh \text{ (重力単位)}$$

(c) 分圧の法則: 分圧を  $p_1, p_2$ , 混合  
気体の圧力を  $p$  とする  
と,

$$p = p_1 + p_2$$

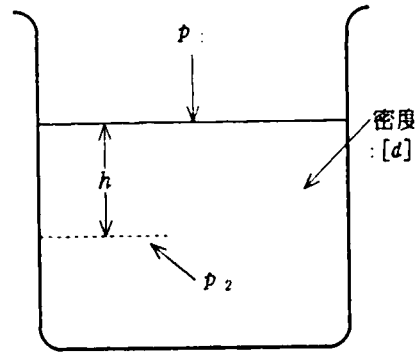


図 1

(3) ボイル・シャルルの法則

理想気体(分子の大きさが0, 分子間引力が0の気体)の温度  $T$  [K],  $t$  [°C],  
圧力  $p$  のときの体積を  $V$  とすると,

$$V \propto \frac{T}{p} \quad \therefore pV = KT \quad \text{ただし, } K \text{ は気体の質量に比例。}$$

$$p = \frac{K}{V} T = K' d T \quad \text{ただし, } d \text{ は気体の密度。}$$

なお,  $T = 273 + t$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ モルの気体のとき } pV = RT \\ n \text{ モルの気体のとき } pV = nRT \end{array} \right\} \leftarrow \text{状態方程式}$$

ただし,  $R$  を気体定数とよび,  $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

(4) アボガドロ定数( $N_A$ ): 1 mol 中の分子数。  $N_A = 6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$



## 問題

1. 標準状態のとき、 $1\text{mol}$ の理想気体の体積は $22.4\text{ l}$ である。これから気体定数を $\text{J/K}\cdot\text{mol}$ 単位で求めよ。ただし、 $1\text{atm}=1.0\times 10^5\text{ N/m}^2$ である。
2. 容積 $0.83\text{m}^3$ のボンベの中に、圧力が $2.7\text{atm}$ となるように $15^\circ\text{C}$ の酸素をつめるとき、この酸素の質量は何 $\text{kg}$ か。ただし、酸素の分子量は $32$ で、気体定数を $8.3\text{ J/K}\cdot\text{mol}$ 、 $1\text{atm}=1.0\times 10^5\text{ N/m}^2$ とする。
3.  $1\text{atm}$ は何 $\text{N/m}^2$ であるか。ただし、水銀の密度は $13.6\text{g/cm}^3$ 。
4. 容積 $10\text{m}^3$ 、自重(内容空気の質量は含まない) $2.0\text{kg}$ の気球がある。この内容空気を熱すると何 $^\circ\text{C}$ でこれを浮揚させることができるか。ただし、その下方は外気に通じ、外気の圧力は、 $0.96\text{atm}$ 、温度は $20^\circ\text{C}$ 、空気の密度は標準状態において $1.29\text{kg/m}^3$ とする。

[10] 気体の分子運動

(1) 気体の分子運動と圧力

質量が  $m$ 、速度の 2 乗の平均値が  $\overline{v^2}$  の分子の容器内の分子数を  $N$ 、容器の体積を  $V$  とするとき、その圧力  $p$  は、気体が理想気体のとき、

$$p = \frac{1}{3} m \overline{v^2} \frac{N}{V} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2) 分子の運動エネルギーと温度

1 分子の運動エネルギーの平均値  $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$  は絶対温度  $T$  に比例し、次の③式で示される。

①は 1 mol の気体のとき、 $p = \frac{1}{3} m \overline{v^2} \frac{N_A}{V} \dots\dots\dots \textcircled{1}'$

1 mol の気体の状態方程式は  $pV = RT \quad \therefore p = \frac{RT}{V} \dots\dots \textcircled{2}$

①', ②から、 $\frac{1}{3} m \overline{v^2} N_A = RT \quad \therefore \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k T \dots\dots \textcircled{3}$

ただし、 $\frac{R}{N_A} = k$  とおき、 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  でボルツマン定数（1 分子あたりの気体定数）とよぶ。

(3) 気体の内部エネルギー

(a) 内部エネルギー：物体を構成する分子の運動エネルギーと分子間引力による位置エネルギーのすべての分子についての総和である。

(b) 理想気体の内部エネルギー

単原子分子 1 mol の内部エネルギー  $U$  は、理想気体では分子間引力は 0 であるので、

$$U = \frac{3}{2} k T \times N_A = \frac{3}{2} k N_A T = \frac{3}{2} R T \quad (R/N_A = k)$$

(4) 気体の体積変化と仕事

圧力が  $p$  の気体の微小な体積変化を  $\Delta V$  とするとき、ピストンが気体にする仕事  $W$  は、

$$W = -p \Delta V$$

ただし、 $\Delta V < 0$  (圧縮) のとき  $W > 0$

$\Delta V > 0$  (膨張) のとき  $W < 0$

気体がピストンにする仕事  $W'$  は  $W' = p \Delta V$  ただし、 $\Delta V > 0$  のとき  $W' > 0$ ,

$\Delta V < 0$  のとき  $W' < 0$

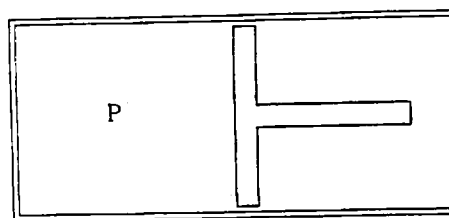


図1

(5) 熱力学第1法則

物体に与えられた熱を  $Q$ 、物体になされた仕事を  $W$ 、内部エネルギーの変化を  $\Delta U$  とすると、

$$\Delta U = Q + W$$

気体のときには、 $\Delta U = Q - p \Delta V$   $\therefore Q = \Delta U + p \Delta V$

(6) 理想気体での主な変化(1 molの場合)

(a) 等温変化: 気体の内部エネルギー  $U$  単原子分子では、

$$U = \frac{3}{2} R T \quad \therefore \Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T$$

したがって、等温変化  $\Delta T = 0$  のときは

$\Delta U = Q - p \Delta V$  で  $\Delta U = 0$  なので、

$$Q = p \Delta V$$

なお、図2において、

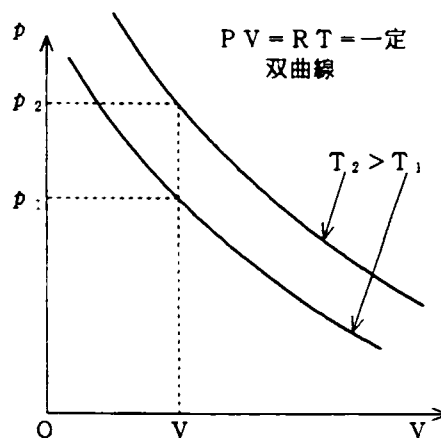
$$p_1 V = R T_1$$

$$p_2 V = R T_2$$

これら2式の比から、

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

となるが、 $p_2 > p_1$



であるから、 $T_2 > T_1$ となる。

(b) 定積変化：熱力学第1法則

$\Delta U = Q - p\Delta V$ において、 $\Delta V = 0$ であるので、 $Q = \Delta U$

気体の定積モル比熱を $C_v$  [ $J/K \cdot mol$ ]とすると、単原子分子では、

$$C_v = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{3}{2}R$$

(c) 定圧変化：熱力学第1法則から $\Delta U = Q - p\Delta V \quad \therefore Q = \Delta U + p\Delta V$

定圧モル比熱を $C_p$  [ $J/K \cdot mol$ ]とすると、

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{p\Delta V}{\Delta T} = C_v + R \quad \therefore C_p - C_v = R$$

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta T} = C_v\right) (pV = RT \rightarrow p\Delta V = R\Delta T)$$

(d) 断熱変化：熱力学第1法則 $\Delta U = Q - p\Delta V$

において $Q = 0$ とおくと、

$$p\Delta V = -\Delta U = -\frac{3}{2}R\Delta T$$

$\Delta V > 0$  (膨張) のとき  $\Delta T < 0$  (温度降下)、

$\Delta V < 0$  (圧縮) のとき  $\Delta T > 0$  (温度上昇)。

$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$  ( $> 1$  で He では 1.7) を用いて、

断熱変化では  $pV^\gamma = \text{一定}$  となる。

したがって、図3において、

A  $\rightarrow$  B が断熱変化を示すものと

すると、

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = \text{一定}$$

となる。また、

$$p_1 V_1 = R T_1$$

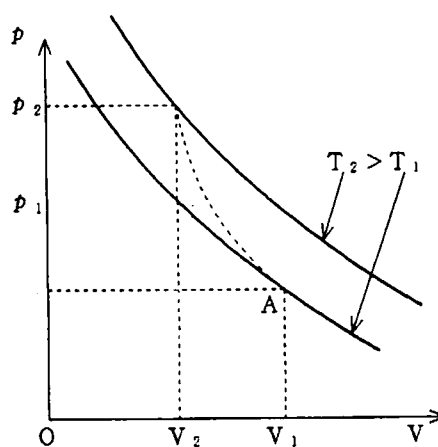


図3

$$p_2 V_2 = R T_2$$

なる関係も成り立つ。

(7) 熱効率( $e$ )と熱力学第2法則

熱機関に与えられた熱を $Q$ 、熱機関から放出される熱を $Q'$ とすると、

$$e = \frac{Q - Q'}{Q}$$

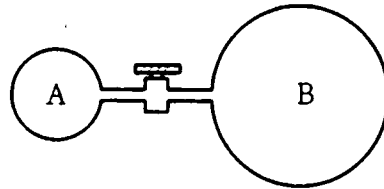
なお、 $e < 1$ であることを熱力学第2法則という。

問 題

1.  $1\text{atm}(=1.0\times 10^5\text{N/m}^2)$  のとき、密度 $1.0\text{kg/m}^3$ の酸素ガスがある。この酸素ガスを理想気体と考えて、次の各問に答えよ。

- (1) 酸素の分子量は32である。この酸素ガス $1.0\text{mol}$ の体積はいくらか。
- (2) この酸素ガスの温度はいくらか。ただし、気体定数は $8.3\text{J/mol}\cdot\text{K}$ とする。
- (3) このとき、酸素分子1個あたりがもっている平均運動エネルギーはいくらか。ただし、アボガドロ定数は $6.0\times 10^{23}/\text{mol}$ とする。
- (4) この酸素分子の平均速度(速度の2乗平均の平方根)はいくらか。

2. 容器A, Bは容積の無視できるコックのついた細管で連結されている。初め、コックは閉じてあり、Aは容積が $2.0\text{l}$ で、圧力 $1.0\text{atm}$ 、温度 $27^\circ\text{C}$ の空気が入られ、Bは容積が $3.0\text{l}$ で、圧力 $2.0\text{atm}$ 、温度 $77^\circ\text{C}$ の空気が入れてある。コックを開いて、内部が一様な状態になったとき、その温度、圧力を求めよ。



3. 次の□の中にな適切な数式を入れよ。ただし、必要ならば気体定数R、アボガドロ定数 $N_0$ を用いよ。

気体運動論によると、気体の状態量である圧力 $p$ および温度 $T$ は、気体分子1個の平均運動エネルギー $K$ と以下のように関係づけられる。図1のような辺の長さ $L$ の立方容器に含まれている質量 $m$ の単原子分子からなる $n$ モルの理想気体について考える。ある分子の速度 $\vec{v}$ (大きさ $v$ )の $x$ 成分を $v_x$ とすると、1回の弾性衝突によりこの分

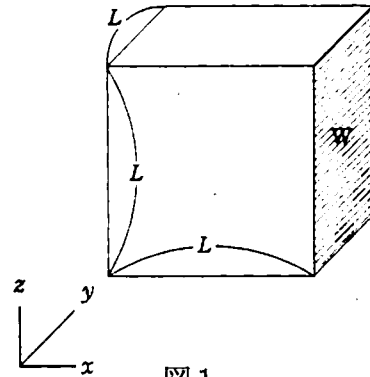
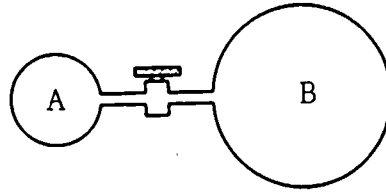


図1

子が $x$ 軸に垂直な壁 $W$ に与える力積は、(1)□である。この分子は $t$ 時間に $W$ と(2)□回衝突するから、 $t$ 時間にこの分子が $W$ に与える力積は(3)□である。したがって容器中の分子 $N$ 個についての $v_x^2$ の平均値 $\overline{v_x^2}$ を用いると、分子 $N$ 個が $W$ に与える圧力は $p = (4)□$ となる。また分子運動はどの方向についても同等であるから、 $\overline{v_x^2}$ は $v^2$ の平均値 $\overline{v^2}$ で書きかえられる。このようにして $p$ は $K$ 、 $L$ および $N$ のみで表せて $p = (5)□$ となる。一方、この理想気体の状態方程式として $P$ と $T$ の間には(6)□の関係式が成り立つので、温度も $T = (7)□$ のように $K$ の関数で表される。

## 演習問題

1. 右図のように、容器A、Bがコックのついた細長い管（容積は無視できる）でつながれている。A、Bの容積は温度に対し一定で、それぞれ22.4 l、44.8 lである。初め、コックは閉じたまま、Aには0℃で2気



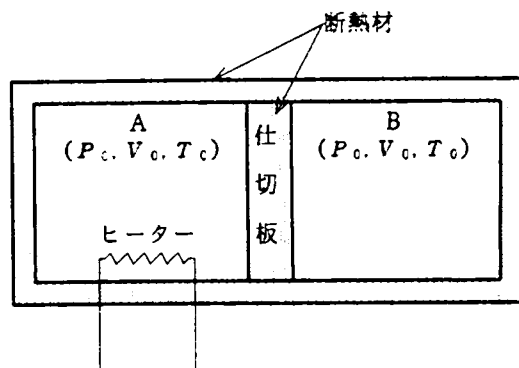
圧、Bには273℃で1気圧の理想気体が入っている。次の問いに答えよ。ただし、1気圧 =  $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 、気体定数 =  $8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$  とし、有効桁数3桁まで求めよ。

- (1) コックが閉じられているとき、A、B内の気体のそれぞれのモル数  $n_A$ 、 $n_B$  はいくらか。
- (2) コックを開いて全体が一様になったときの温度  $T_0$  [K] と圧力  $P_0$  [気圧] を求めよ。ただし、装置の熱容量は無視でき、また、この場合、外からの熱の出入りはないものとする。
- (3) 次に、コックを開いたまま、Aの温度を  $T_0$  に、Bの温度を  $-91^\circ\text{C}$  に保つと、容器内の圧力  $P_1$  は何気圧か。また、B内の気体のモル数は問(2)に比べて何倍になるか。ただし、容器と気体の温度は常に等しいものとする。

(弘前大-H1)



2. 断熱壁で囲まれたシリンダーが、気密で滑らかに動く熱を通さない仕切板で2つの部屋A, Bに分けられている。A, Bにはそれぞれ1モルの単原子分子からなる理想気体が入っており、それらは図に示すように初め圧力 $P_0$ 、体積 $V_0$ 、温度 $T_0$ の



状態におかれている。今、Aの気体にヒーターでゆっくりと熱を加えたところ、その圧力が2倍になった。次の問いに答えよ。但し、気体の圧力を $P$ 、体積を $V$ 、温度を

$T$ とすると、1モルの理想気体は状態方程式  $PV = RT \dots (1)$

にしたがうほか、断熱的な状態変化に対しては  $PV^{\frac{5}{3}} = \text{一定} \dots (2)$

が成り立ち、この気体1モルの内部エネルギー $U$ は  $U = \frac{3}{2}RT \dots (3)$

で与えられる。ここに $R$ は気体定数で、 $R = 8.3\text{J/mol}\cdot\text{K}$ である。

- (1) Bの部屋の体積を $V_0$ を用いて表せ。
- (2) Bの部屋の温度を $T_0$ を用いて表せ。
- (3) Aの部屋の温度を $T_0$ を用いて表せ。
- (4)  $T_0 = 273\text{K}$ とすると、Aの部屋の気体に加えた熱量は何ジュールか。

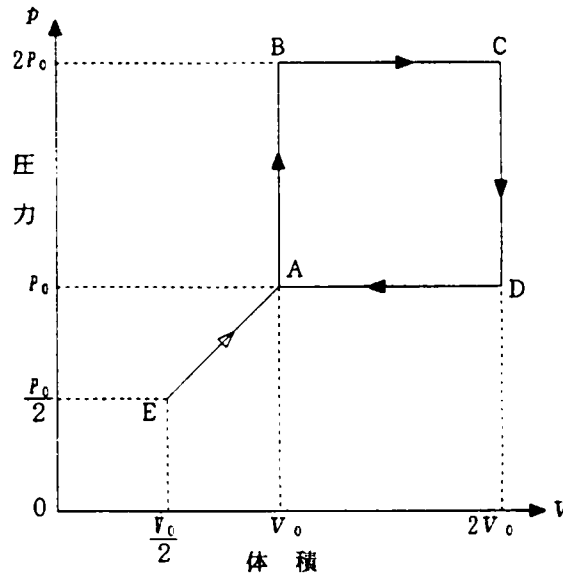
なお、必要があれば次の数値を用いよ。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = 0.66, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = 0.31, \quad (2)^{\frac{3}{5}} = 1.52, \quad (2)^{\frac{5}{3}} = 3.17$$

(大阪市大-H1)

3. 単原子の理想気体 1 mol を用いた熱機関がある。図はその  $p$ - $V$  図である。

ここで圧力  $p$ 、体積  $V$  は A 点でそれぞれ  $p_0$ 、 $V_0$  と定義されている。はじめに、A 点を出発し、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  と、ひとまわりする過程を考える。A 点の温度を  $T_0$  とすれば、C 点の温度は (1)  であり、BC 間で気体に流入する熱量は、ガス定数(気体定数)  $R$  と  $T_0$  を用いて (2)  と書ける。



(2) の中で (3)  が外部に対する仕事になる。また、ひとまわりして気体が外部にした仕事総量を、 $A \rightarrow B \rightarrow C$  の過程で気体が吸収した熱量で割ると、整数比で (4)  となる。

次に、E から A に行く過程を考える。ここで気体が外部に対してする仕事は、 $R$  と  $T_0$  を用いて (5)  となる。また E A 線上を動かした時のモル比熱は (6)  となる。

上記の(1)~(6)に対する解答を、指定された記号を用いて示せ。

(大阪大(前)-H1)

# III 波 動

## [11] 波の性質

(1) 波: 振動の伝わる現象または波形の移動する現象。波を伝えるものを媒質という。

(2) 横波(図1の(a))と  
縦波(疎密波)

縦波を横波のように示すには、  
図I(c)のように変位を90°だけ  
反時計式に回転する。

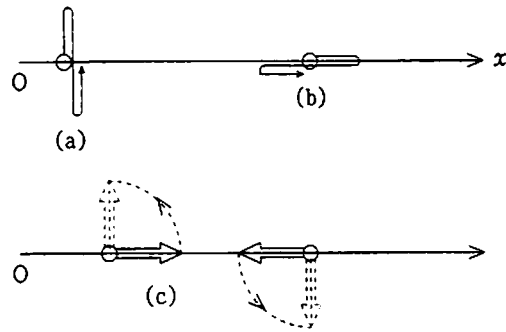


図1

(3) 波動の公式

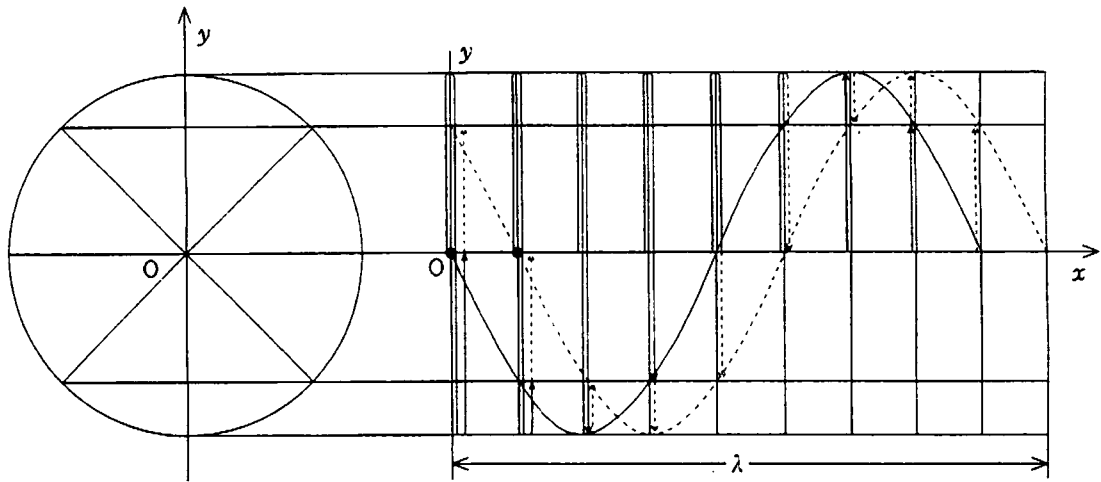


図2

波の伝わる速さを  $v$ , 周期(振動が1回行われる時間)を  $T$ , 波長(時間  $T$  の間に波の進む距離)を  $\lambda$ , 振動数(単位時間の振動の回数)を  $f$  [Hz] とすると,

$$v = \frac{\lambda}{T}, \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{これら2式から } v = f \lambda$$

なお、波長はとなり合う同一位相の2点間の距離であるともいえる。

(4) 波を表す式

原点( $x=0$ )での単振動の時刻  $t$  での変位を  $y_0$  とすると、

$$y_0 = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin 2\pi f t$$

$x$  軸の正の向きに進む波の座標を  $x$ 、時刻  $t$  での変位を  $y$  とする。

波が  $x$  だけ伝わるのに時間  $x/v$  (伝わる速さ:  $v$ ) を要するので、 $x$  での変位  $y$  は原点での  $x/v$  だけ以前の振動と等しい。したがって、

$$\begin{aligned} y &= A \sin \left( 2\pi f \left( t - \frac{x}{v} \right) \right) = A \sin \left( 2\pi f t - 2\pi \frac{x}{v/f} \right) \\ &= A \sin \left( 2\pi f t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

上の式での ( ) を位相とよぶ。 $x$  での振動は原点での振動より位相が

$2\pi \frac{x}{\lambda}$  だけ遅れる。

原点から  $x$  軸の負の向きに進む波のときは、 $x$  での変位  $y$  は、 $x < 0$  であるので、

原点の振動より位相が  $2\pi \frac{(-x)}{\lambda} = -2\pi \frac{x}{\lambda}$  だけ遅れるので、

$$y = A \sin \left\{ 2\pi \frac{t}{T} - \left( -2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right\} = A \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

(5) 波の伝わる速さ (媒質に対する速さで、媒質と波の種類による。)

(a) 弦を伝わる横波の速さ  $v$  は張力を  $S$ 、線密度を  $d$  とすると、

$$v = \sqrt{\frac{S}{d}}$$

(b)  $t$  °C のときの空気中の音速を  $v$  [m/s] とすると、

$$v = 331.5 + 0.6 t$$

(6) ホイヘンスの原理 (波の進み方を示す原理。図3(b))

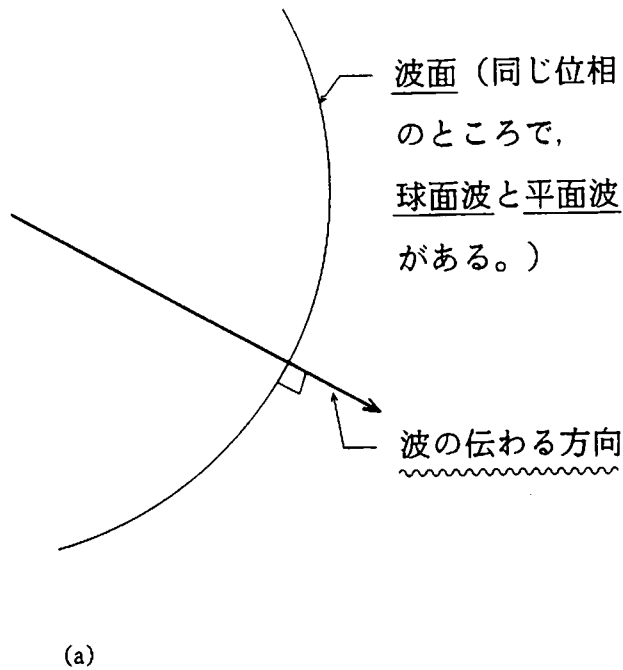


図3

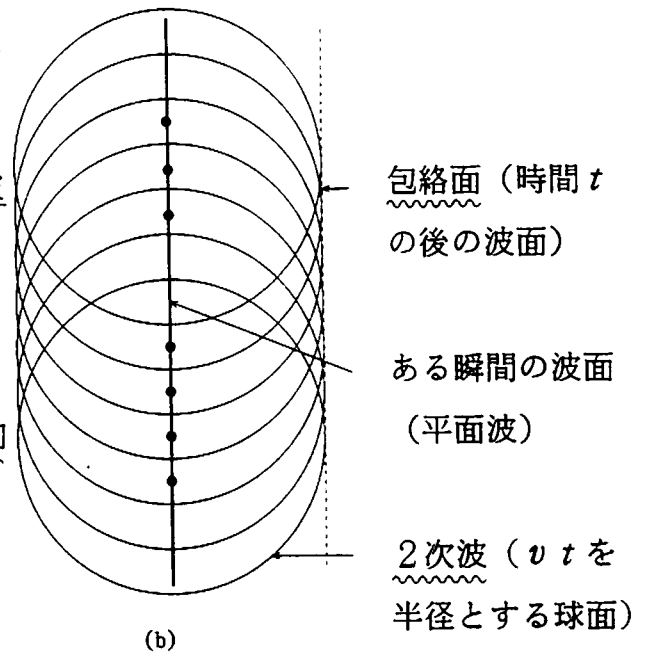


図4

(7) 波の強さ : 波の伝わる方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する振動のエネルギー

振幅Aの単振動のエネルギーをEとすると,

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = 2 \pi^2 f^2 A^2 m$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ 2 \pi f = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right\} \rightarrow 4 \pi^2 f^2 m = k$$

波の強さをI, 波の速さをv, 媒質の密度をdとすると,

$$I = 2 \pi^2 f^2 A^2 \times 1 \times v d = 2 \pi^2 f^2 A^2 v d$$

$$\therefore I \propto f^2 A^2$$

(8) 重ね合わせの原理

波1だけがきたときの変位を $y_1$ 、波2だけがきたときの変位を $y_2$ とすると、  
波1と2が同時にきたときの変位 $y$ は、 $y = y_1 + y_2$ で与えられる。

(9) 波の干渉

波長 $\lambda$ の等しい二つの波の山と山(谷と谷)が重なれば変位は大きくなり、  
山と谷が重なれば変位は小さくなる。図5で $S_1$ 、 $S_2$ から振動数 $f$ 、波長 $\lambda$   
の同位相の波が出てPに達するとき、 $S_1$ 、 $S_2$ からの波のPにおける変位を  
それぞれ $y_1$ 、 $y_2$ とすると、

$$y_1 = A \sin \left( 2\pi \left( f t - \frac{l_1}{\lambda} \right) \right)$$

$$y_2 = A \sin \left( 2\pi \left( f t - \frac{l_2}{\lambda} \right) \right)$$

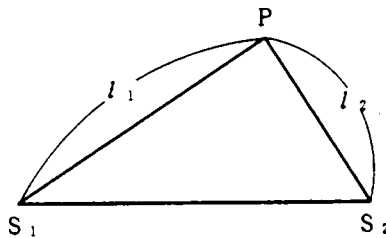


図5

Pでの合成波の変位を $y$ とすると、

$$y = y_1 + y_2$$

$$= \left\{ 2A \cos \pi \left( \frac{l_2 - l_1}{\lambda} \right) \right\} \sin \left( 2\pi \left( f t - \frac{l_2 + l_1}{2\lambda} \right) \right)$$

合成波の振幅が $2A$ になるには、

$$\pi \left( \frac{l_2 - l_1}{\lambda} \right) = \pm \frac{\pi}{2} (2m) \quad \therefore l_2 - l_1 = \pm \frac{\lambda}{2} (2m)$$

ただし、 $m = 0, 1, 2, \dots$

合成波の振幅が0になるには、

$$\pi \left( \frac{l_2 - l_1}{\lambda} \right) = \pm \frac{\pi}{2} (2m + 1)$$

$$\therefore l_2 - l_1 = \pm \frac{\lambda}{2} (2m + 1)$$

$y_1$ 、 $y_2$ のPでの合成波 $y$ の振幅 $A'$ は次のように求めることもできる。

図6で  $y_1$  の振幅  $A$  を示すベクトルを  $\vec{OQ}$ ,  $y_2$  の振幅  $A$  を示すベクトルを  $\vec{OR}$  とする。  $l_1 > l_2$  であるとする、  $y_1$  は  $y_2$  より位相が、

$$\begin{aligned} \phi &= \left( 2\pi f t - 2\pi \frac{l_2}{\lambda} \right) \\ &\quad - \left( 2\pi f t - 2\pi \frac{l_1}{\lambda} \right) \\ &= 2\pi \frac{l_1 - l_2}{\lambda} \quad (l_1 > l_2 \text{ と仮定}) \end{aligned}$$

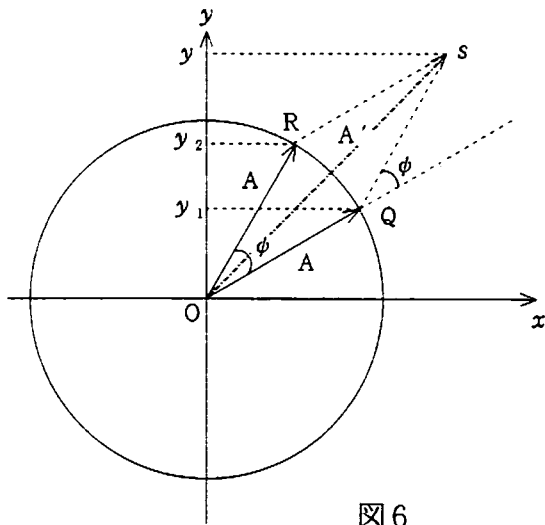


図6

だけ遅れるので、図6で  $\angle ROQ = \phi = 2\pi \frac{l_1 - l_2}{\lambda}$

合成波の振幅  $A'$  を示すベクトル図6の  $\vec{OS}$  であるので、第2余弦定理を  $\triangle OQS$  に用いて、

$$\begin{aligned} A'^2 &= A^2 + A^2 - 2AA \cos(\pi - \phi) = 2A^2 + 2A^2 \cos \phi \\ &= 2A^2 + 2A^2 \cos 2\pi \frac{l_1 - l_2}{\lambda} \end{aligned}$$

したがって、  $2\pi \frac{l_1 - l_2}{\lambda} = \pi \times 2m$

$\therefore l_1 - l_2 = \frac{\lambda}{2} (2m)$  のとき  $A' = 2A$  となり、

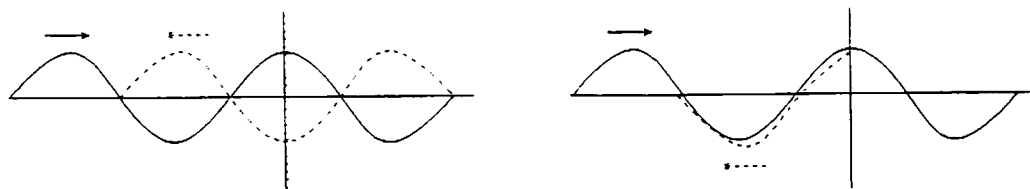
$$2\pi \frac{l_1 - l_2}{\lambda} = \pi (2m + 1)$$

$\therefore l_1 - l_2 = \frac{\lambda}{2} (2m + 1)$  のとき  $A' = 0$  となる。

ただし、  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

(10) 波の反射と位相の変化

固定端での反射では位相が $\pi$ だけずれるが、自由端の反射では位相のずれはない。



(a) 固定端での反射

(b) 自由端での反射

図7

(11) 定常波

波長( $\lambda$ )と振幅の等しい2つの波が反対向きに進むとき干渉に(空間的干渉)によって生じる波。図8は固定端での反射によって生じた定常波である。

定常波の腹と節との距離は $\lambda/4$ となる。

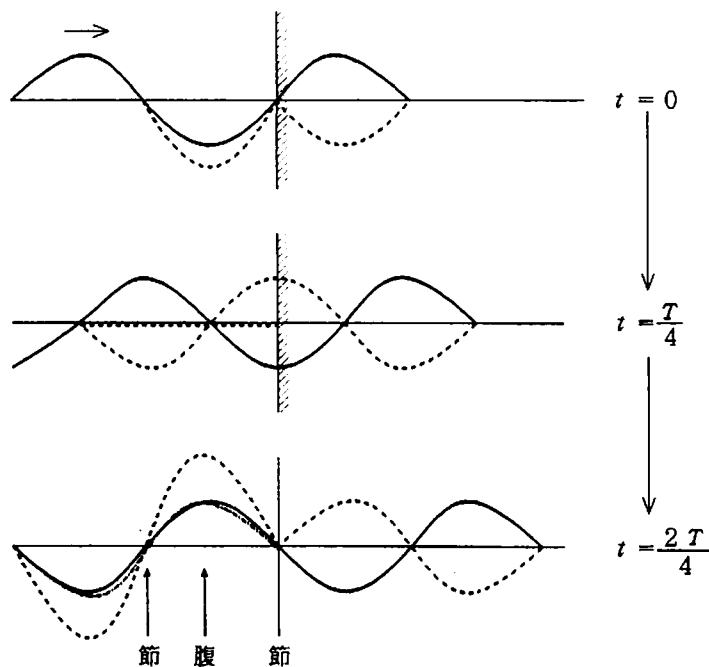
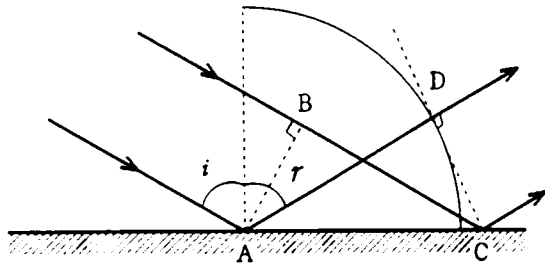


図8



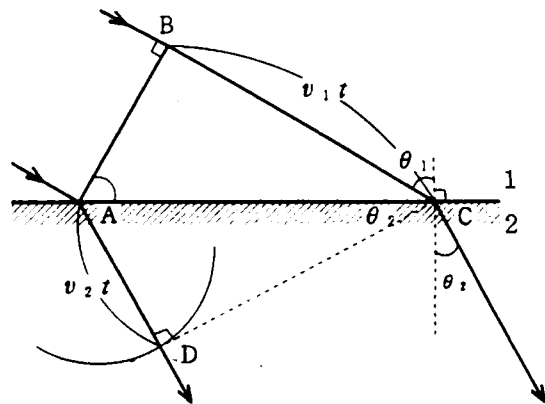
問 題

1. 右図で、 $\overline{AB}$ はある時刻で入射波の波面を、 $\overline{CD}$ はそれから時間  $t$  の後の波面を示したものである。この波の入射角を  $i$ 、反射角を  $r$  とするとき、 $i = r$  なることを示せ。



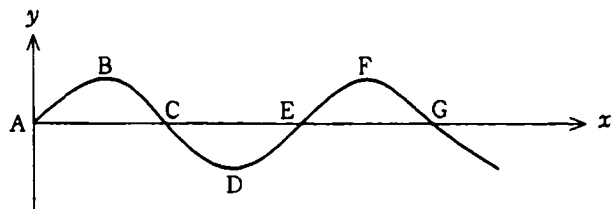
2. 右図で、 $\overline{AB}$ はある時刻で入射波の波面を、 $\overline{CD}$ はそれから時間  $t$  の後の波面を示したものである。この波の入射角を  $\theta_1$ 、屈折角を  $\theta_2$ 、媒質 1、2 中での波の伝わる速さをそれぞれ  $v_1, v_2$  とするとき、

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \text{ となることを示せ。}$$



3. 右図は  $x$  軸上をその正の向きに進むある縦波を横波のようにあらわしたものである。縦波に戻して考えたとき、次のようになっている媒質の点はどれか。

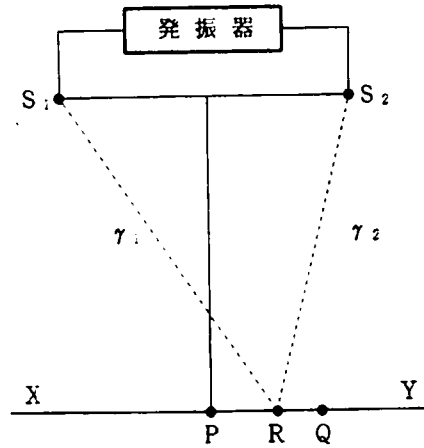
- (1) 媒質の運動速度が 0 の点
- (2) 最も密な点
- (3) 最も疎な点
- (4) 右向きに媒質の速度が最大の点



4. 次の(ア)□～(ウ)□を埋めよ。

図の  $S_1$ ,  $S_2$  に 2 つの小さいスピーカーを置き, 1 台の発振器で振動させ, 振幅一定, 波長  $\lambda$  の同じ正弦波の音波を発生させる。

いま, スピーカーの前方,  $S_1$ ,  $S_2$  を結ぶ線分より一定の距離にある直線  $XY$  の点で音波の強さを調べる。



$P$  は  $S_1S_2$  の垂直二等分線上の点,  
 $Q$  は  $S_1Q - S_2Q = \lambda$  となる点である。

$R$  は  $P$ ,  $Q$  の間の点で, もし, その  $R$  点で音波が完全に消えるなら,

$r_1 - r_2 =$  (ア) □ である。ただし,  $r_1 = S_1R$ ,  $r_2 = S_2R$  とする。また, この  $r_1$ ,  $r_2$  を経路として  $S_1$ ,  $S_2$  より直線  $XY$  に到達するそれぞれの音波の振幅は,  $P$ ,  $Q$  間の点で等しく,  $A$  であるとする。

次に, 発振器内の電気回路により  $S_1$  より出る正弦波を  $S_2$  の正弦波に対して逆位相になるようにする。このとき, 上で求めた  $R$  点における振幅は (イ) □  $\times A$  となり,

また,  $r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{3}$  となるような  $R$  点では振幅は (ウ) □  $\times A$  となる。

[12] 音 波

(1) うなり

振動数( $f_1, f_2$ )の少しちがう2つの音波の時間的干渉によって生じ、単位時間でのうなりの回数 $f$ は、 $f = \pm(f_1 - f_2)$

(2) ドップラー効果

媒質に対する音波の速さを $V$ 、  
音源(S)および観測者(O)の媒質  
に対する速度をそれぞれ $v_s, v_o$ 、  
音源の振動数を $f_s$ 、観測される振  
動数を $f_o$ とすると、

$$f_o = \frac{V - v_o}{V - v_s} f_s$$



図2  $v_s, v_o$ の正、負

また、 $v_s, v_o$ をSやOの地面に対する速度とし、 $V$ を地面に対する音速として  
も上式が成り立つ。そして、例えば、 $x$ 軸の正の向きに速さ $\omega$ の風が吹く場合には、  
空気に対する音速を $V_0$ とすると、 $V = V_0 + \omega$ となる。

音源(S)が図3のようにA→Bの  
向きに速さ $v$ で動くときOで観測  
するものとする、

$$v_s = v \cos \theta$$

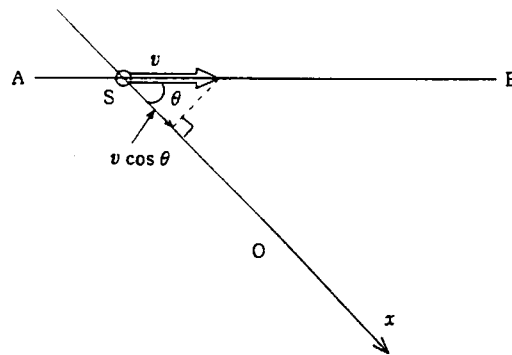


図3 S, Oの速度の方向がちがうとき

(3) 弦の横振動

両端を固定した弦では、固定端が節になるような定常波を生じる。  
 弦の長さを  $l$ 、弦に  $n (= 1, 2, 3 \dots)$   
個の腹を生じるときの振動数を  $f_n$ 、  
 弦の張力を  $S$ 、線密度を  $d$ 、弦を伝  
 わる横波の速さを  $v$  とすると、図 4

からすぐわかるように波長  $\lambda_n$  は、  

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$
 であるので、

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{S}{d}} \quad (v = \sqrt{\frac{S}{d}})$$

ただし、 $n = 1$  を基本振動、 $n = 2$  を 2 倍振動とよぶ。

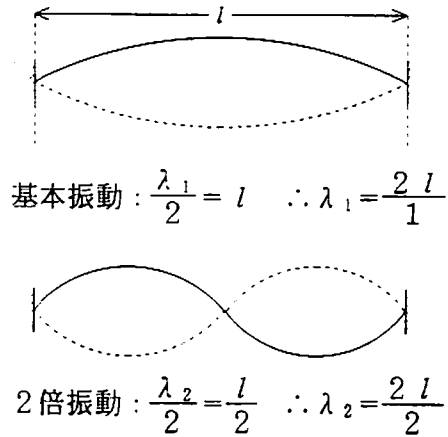


図 4

(4) 気柱の縦振動

気柱では、開端は腹、閉端は節  
 になるような定常波を生じる。

(a) 閉管のとき、振動する気柱の長さを  $l$  (管の長さを  $L$  とすると、 $l > L$  で、 $l - L$  を開口端補正とよぶ)、空気中の音速を  $V$ 、  
 $n (= 1, 3, 5, \dots)$  倍振動数を  
 $f_n$  とすると、波長  $\lambda_n = \frac{4l}{n}$  であるので、

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{4l} v$$

$n = 1$  を基本振動、 $n = 2$  を 2 倍振動とよぶ。なお、 $n$  は  $\frac{\lambda}{4}$  の数を示す。

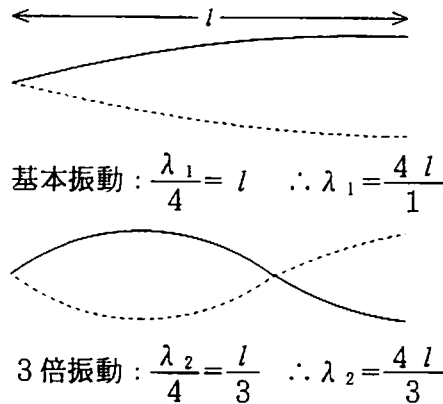


図 5

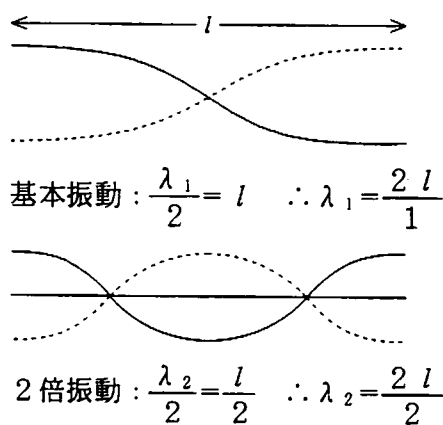


図 6

(b) 開管では、振動する気柱の長さを  $l$ 、空気中の音速を  $V$ 、 $n (= 1, 2, 3, \dots)$

倍振動数を  $f_n$  とすると、波長  $\lambda_n$  は、 $\lambda_n = \frac{2l}{n}$  であるので、

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} V$$

$n = 1$  を基本振動、 $n = 2$  を2倍振動とよぶ。なお、節の数または  $\frac{\lambda}{2}$  の数を示す。

### (5) 衝撃波

発音体の速さ  $v$  が音速  $V$  より大きくなると、図7のような衝撃波を生ずる。

はじめ  $S$  にあった音源が時間  $t$  の後に  $S'$  にきたとすると、

$$\sin \theta = \frac{SD}{SS'} = \frac{Vt}{vt} = \frac{V}{v} \quad (v > V)$$

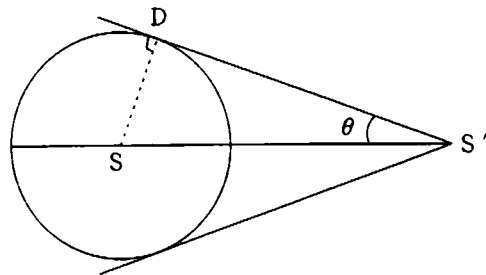


図7

問 題

1. 地面に静止している人に向かって振動数100Hzの音源が30m/sの速さで近づいている。  
ただし風はないものとし、音速は340m/sとする。

- (1) 耳に達する音波の波長はいくらか。
- (2) 耳に達する音波の振動数はいくらか。

次に、音源も人も静止していて、振動数100Hzの音源から人に向かう向きに30m/sの風が吹く場合について、

- (3) 耳に達する音波の波長はいくらか。
- (4) 耳に達する音波の振動数はいくらか。

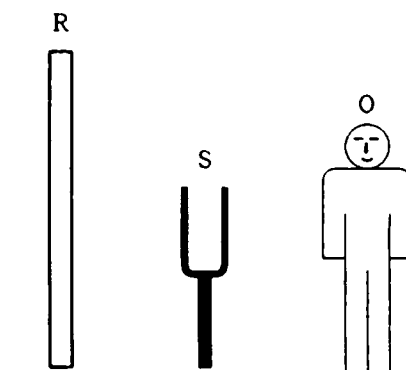
2. 右図において、Rは音の反射板、

Sは1000Hzの音波を生じる音叉、

Oは観測者であり、音速は340m/s

である。

- (1) RとOが地上に静止していて、  
Sが速さ1m/sでRに近づくととき、  
Oの聞く1秒間のうなりの回数は  
いくらか。



- (2) SとOが地上に静止していて、Rが速さ1m/sでSに近づくように移動するとき、  
Oの聞く1秒間のうなりの回数はいくらか。

3. 下端を水に浸して鉛直に立てた半径1.5cmのガラス管の上で、振動数512Hzの音を鳴らす。ガラス管を水中から次第に引き上げていったら、管の上端が水面から16.0cmになったときと、49.4cmになったときに共鳴して大きい音が聞こえた。
- (1) 以上のことから、空気中の音速を求めよ。
  - (2) 腹の位置は開端より少し上にある。この値(開口端補正)を求めよ。
  - (3) 管の上端と水面との距離を49.4cmより増していくとき、初めて大きい音が聞こえたときの管の上端と水面との距離はいくらか。
  - (4) 管の上端と水面との距離が49.4cmにしたままで、音源の振動数を512Hzより大きくしていくとき、初めて大きい音が聞こえたときの振動数を求めよ。

[13] 光 波

- (1) 媒質1,2の境界面で反射と屈折が  
おこる。  
(a) 入射光線, 反射光線, 屈折光線  
は法線(垂線)と同一平面内にある。

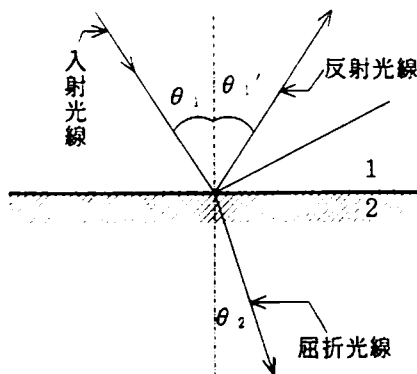


図1

- (b)  $\theta_1 = \theta_1'$   
(c)  $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$

$$\therefore n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$n_{12}$ は媒質1に対する媒質2の相対屈折率,

$n_1, n_2$ は(絶対)屈折率である。

$n_1 > n_2$ のとき,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  のときの入射角  
 $\theta_1$ を臨界角という。

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

入射角が臨界角をこえると全反射となる。

(2) 光学的距離

真空中での波長が $\lambda$ の光波が屈折率 $n$ の媒質中を進むときの波長を $\lambda'$ とすると,

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{n}{1} \quad \therefore \lambda' = \frac{\lambda}{n} \quad \text{となる。}$$

屈折率 $n$ の媒質中を $x$ (幾何学的距離)だけ進むときの光波の数は

$$\frac{x}{\lambda'} = \frac{x}{\lambda/n} = \frac{nx}{\lambda} \quad \text{となる。}$$

この $nx$ を光学的距離, 光学的距離の差を光路差という。



(3) ヤングの実験

図2で単スリット  $S_0$  で回折した波長  $\lambda$  の光が複スリット  $S_1, S_2$  に達し、ここで回折した光が  $P$  で干渉する。このときの光路差は、 $d \sin \theta$  であるので、

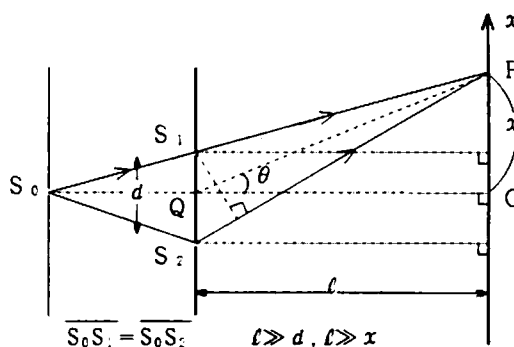


図2

$$d \sin \theta \cong d \tan \theta = d \frac{x}{l} = \frac{d x}{l}$$

$$\frac{d x}{l} = \pm \frac{\lambda}{2} (2m) \rightarrow x = \pm \frac{l \lambda}{2d} (2m) : \text{明}$$

$$\frac{d x}{l} = \pm \frac{\lambda}{2} (2m + 1) \rightarrow x = \pm \frac{l \lambda}{2d} (2m + 1) : \text{暗}$$

( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

光路差は次のように求めることもできる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{S_2 P^2} &= l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \\ \overline{S_1 P^2} &= l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{S_2 P^2} - \overline{S_1 P^2} = 2 x d$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{S_2 P} - \overline{S_1 P} &= \frac{2 x d}{\overline{S_2 P} + \overline{S_1 P}} \\ &\cong \frac{2 d x}{2 l} = \frac{x d}{l} \end{aligned}$$

(4) 薄膜による干渉

厚さ  $d$ 、屈折率  $n$  の薄膜に垂直に波長  $\lambda$  の光が入射するとき、膜の中の波長  $\lambda'$  は  $\lambda' = \lambda / n$  である。

図3(a)のときの光路差は  $2 d n$  であるが膜の上面での反射による位相のずれもあるので、

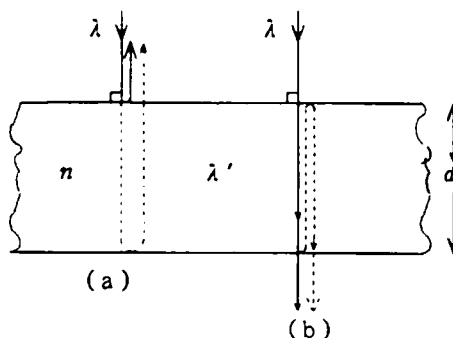


図3

$$2 d n = \frac{\lambda}{2} (2m + 1) : \text{明}, \quad 2 d n = \frac{\lambda}{2} (2m) : \text{暗}$$

図3(b)のときの光路差は  $2dn$  で、反射による位相のずれはないので、

$$2dn = \frac{\lambda}{2}(2m) : \text{暗}, \quad 2dn = \frac{\lambda}{2}(2m+1) : \text{明}$$

(5) 回折格子

格子定数  $d$  の回折格子に、波長  $\lambda$  の光を格子面に垂直に当てたとき、光  $a$ 、 $b$  の光路差は  $d \sin \theta$  である。そこで、

$$d \sin \theta = n \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

の成り立つ  $\theta$  の方向で各スリットからの光は干渉で強め合う。

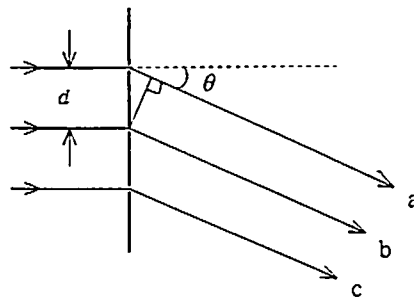
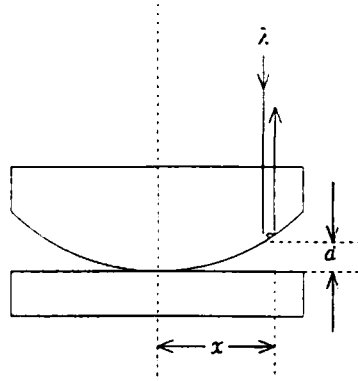


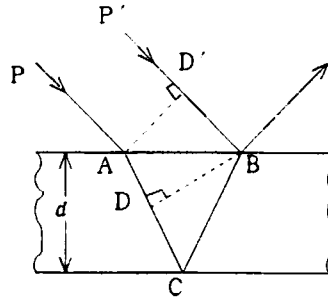
図4

問 題

1. 平面ガラスの上に曲率半径  $R$  の大きい平凸レンズを置き、上から波長  $\lambda$  の単色光で照らすと、平面ガラスと平凸レンズの接触点を中心に明暗のリングが見える。このとき暗いリングの半径  $x$  を  $m$  ( $0, 1, 2, 3, \dots$ ),  $R$ ,  $\lambda$  で示せ。ただし、反射光で見えるものとする。



2. 厚さ  $d$ , 屈折率  $n$  の薄膜に右図のように光が入射すると、一部は裏面で反射し、再び表面で屈折して進み、 $P$  と  $P'$  の光線が  $B$  で出会ったとする。このときの光路差  $n(\overline{DC} + \overline{CB})$  を  $d$ ,  $r$  ( $A$  での屈折角),  $n$  を用いて示せ。



## 演習問題

1. 次の文章の□の中になんか

式または言葉を入れよ。

右図のように、 $x = L$ が固定端で、 $x \leq L$ の媒質中を速さ $v$ 、振動数 $f$ の正弦波の横波が $x$ 軸の正の方向に進行して、 $x = 0$ での媒質の変位が  $y_1(0, t) = A \sin 2\pi f t$  である。



この波の位置 $x$ 、時刻 $t$ における変位は  $y_1(x, t) = (1)\square$  である。  
 $x = L$ で反射波が生じると媒質中には入射波と反射波が同時に存在し、そのときの合成波の変位は  $(2)\square$  原理によっておのこの波の変位の和になる。入射波の  $x = L$ での変位は  $y_1(L, t) = (3)\square$  であり、固定端  $x = L$ では任意の時刻において合成波の変位は零になっていなければならないことから、 $x = L$ での反射波の変位は  $y_2(L, t) = (4)\square$  であり、固定端での波の位相の変化が  $(5)\square$ であることを示している。反射波は速さ $v$ で $x$ 軸の負の方向に進行し、 $x = L$ での変位が位置 $x$ にやってくるのに時間  $(6)\square$  だけおくれることから、反射波の位置 $x$ 、時刻 $t$ での変位は  $y_2(x, t) = (7)\square$  となる。したがって、位置 $x$ 、時刻 $t$ での合成波は、  
 $y(x, t) = 2A \cos 2\pi f \left( t - \frac{L}{v} \right) \times (8)\square$  である。

いま  $x = 0$ も固定端とすると、上の考察から、振動数は正の整数 $m$ を用いて  $f_m = (9)\square$ 、波長は  $\lambda_m = (10)\square$ となる。この固有振動の振動数は基本振動数  $f_1 = (11)\square$  の整数倍になる。

上で考えた横波が張力 $T$ で張ってある一様な線密度 $\rho$ の弦を伝わる横波だとすると、この弦を伝わる横波の速さは  $v = \sqrt{T/\rho}$  であるから、長さ $L$ のこの弦に生じる固有振動の振動数 $f_m$ は $m$ を用いて  $f_m = (12)\square$  である。

(九州大-S60)

2. 鉛直に立てたガラス管の底部を、ゴム管で水だめ容器につなぎ、管内の水位を上下できるようにする。管の直径は、その長さに比べてじゅうぶんに小さいとし、管口から水面までの距離  $l$  で水位を測るものとする。管口近くに、振動数  $f$  を変えられるような音源をおき、次の実験を行った。

[実験1] 振動数を  $f_1$  に固定し、水位を管口部からしだいに下げていったところ、 $l$  の値がとびとびのところでは音が大きくなった。

[実験2] 水位を固定し、振動数を変化させたところ、 $f$  の値がとびとびのところでは音が大きくなった。

これらの実験について次の文中の□を埋めよ。

- (1) 実験1, 実験2において特別の場合に音が大きくなるのは、音源とガラス管内の空気柱との間に共鳴がおこっているためである。このとき、ガラス管内には管口付近を <sup>1</sup>□, 水面を <sup>2</sup>□ とする <sup>3</sup>□ が生じている。
- (2) 実験1において、 $l = 0$  からしだいに水位を下げていったとき、 $l_1$  のところで1回目の共鳴、 $l_2$  のところで2回目の共鳴がおこったとする。水位の差( $l_2 - l_1$ )はこのときの音波の波長の <sup>4</sup>□ 倍に等しいから音源の振動数  $f_1$  は空気中の音速を  $v$  として次の式で表される。 $f_1 =$  <sup>5</sup>□。  $l = l_2$  のとき、空気分子の運動方向は <sup>6</sup>□ であり、管口から距離 <sup>7</sup>□ の位置を境に、その向きが逆になっている。運動がもっともはげしい位置は管口から <sup>8</sup>□ の距離にある。
- (3) 次に、実験2において、ガラス管内の水位を  $l_1$  にもどして固定し、振動数を  $f_1$  からしだいに上げたところ、振動数  $f_2$  のところで再び共鳴がおこった。振動数  $f_2$  のときの音波の波長は空気柱の長さの <sup>9</sup>□ 倍であり、 $f_2$  は  $f_1$  の <sup>10</sup>□ 倍になっている。同じようにして  $n$  回目の共鳴のおこる振動数を  $f_n$  とするとき、 $f_n$  と  $f_1$  との間に次の関係式が得られる。 $f_n =$  <sup>11</sup>□  $f_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。
- (4) 空気中の音速を  $336\text{m/s}$ 、ガラス管の全長を  $1.2\text{m}$  とするとき、実験1において2回目の共鳴をおこさせるためには、音源の振動数  $f_1$  は <sup>12</sup>□ よりも <sup>13</sup>□ が必要である。
- (5) 実験室内の気温が上昇したとき、音速は <sup>14</sup>□ なるので、実験1における  $l_1$  の値は <sup>15</sup>□ なる。

(北見工大-S63)

3. 以下の文章中の空欄に適当な式, または言葉を記せ。ただし, ① [       ] と ⑤ [       ] は適当な言葉で, その他は文章中に出てくる  $f_1, v, u, L, t, w$  などを用いた式で答えよ。

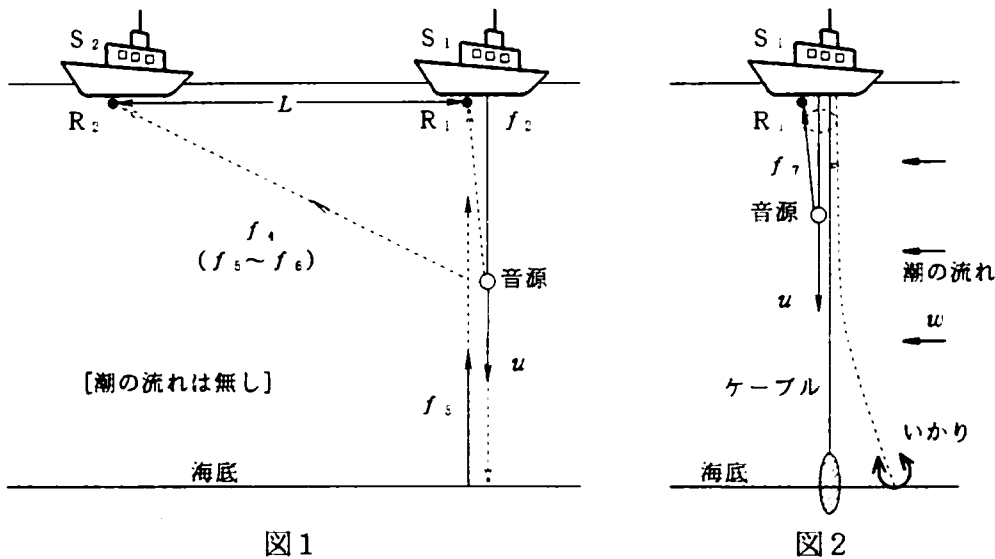


図1に示すように, 海面上に二隻の船  $S_1, S_2$  が停船している。船底にはそれぞれ音波受信装置  $R_1, R_2$  が取り付けられており, その間の距離は  $L$  である。

一方の船  $S_1$  から海中に振動数  $f_1$  [Hz] の連続超音波を発信する音源を一定の速さ  $u$  [m/s] で海底に向かってまっすぐに降ろす。ここで海中での超音波の音速は深さによらず一定値  $v$  [m/s] であり,  $u$  は  $v$  より十分小さく,  $R_1$  は音源の真上にあるものとする。

(1) 海中では潮の流れはまったく無いものとする。受信装置  $R_1$  では音源からの直接音および海底で反射してきた音(反射音)を聞くことができる。これらの音の振動数を調べると① [       ] 効果のため  $f_1$  の値とは異なり, 直接音の振動数  $f_2$  は② [       ] [Hz], そして反射音のそれ  $f_3$  は③ [       ] [Hz] である。また, 直接音と反射音の合成音は周期  $T =$  ④ [       ] [s] で強弱を繰り返す⑤ [       ] の現象を生じる。

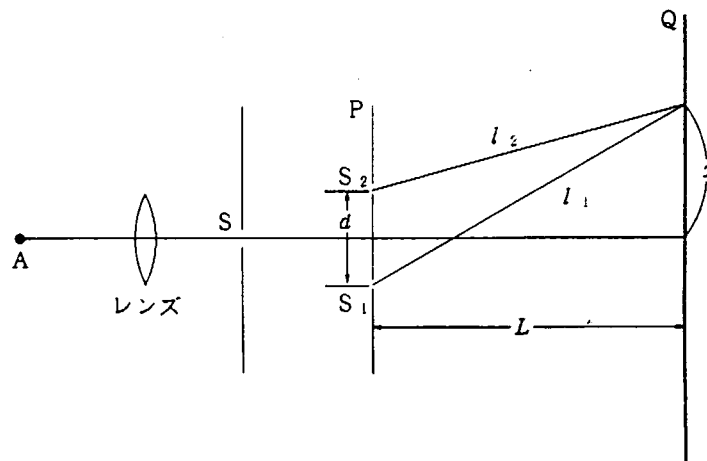
一方, 受信装置  $R_2$  で聞く直接音は音源の深さ  $D$  [m] =  $u t$  ( $t$  [s] は音源を降ろし始めてからの時間) とともに変化し, その振動数  $f_4$  は⑥ [       ] [Hz] となる。この時, 振動数  $f_4$  が取りうる最大値  $f_5$  は⑦ [       ] [Hz] であり, 最小値  $f_6$  は⑧ [       ] [Hz] である。ただし,  $f_6$  の値は  $L$  の値が無視できるほど深い位置に音源

が達した時の値とする。

- (2) 潮の流れがあるとき、図2に示すように船 $S_1$ をいかりで固定し、海底にまっすぐ降ろしたケーブルに沿って音源を一定の速さ $u$ で降ろす。潮の流れは深さによらず一定の速さ $w$  [m/s]で、その方向は海面と平行であるとする。音源から発した超音波の波面は潮の流れの影響を受けるため、音源から船の方向へ伝播する音波の見かけの波長 $\lambda$ は⑨ [      ] [m]となる。したがって、受信装置 $R_1$ で聞く直接音の振動数 $f_1$ は⑩ [      ] [Hz]となる。

(九州大-HI)

4. 図は光の干渉についてのヤングの実験のあらましを示している。単色の光源A(波長 $\lambda$ )から出た光をレンズを通して細いスリットSにあて、そのスリットSから出た光を、Sと



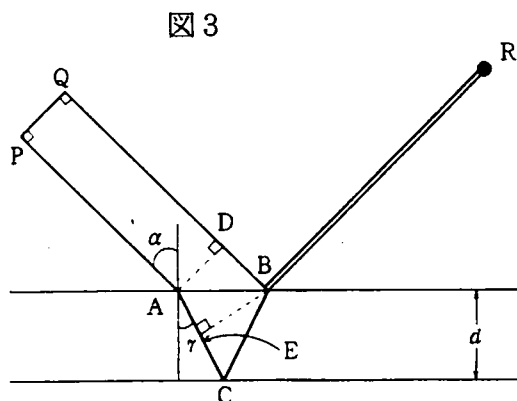
平行で、ついでPの面にある互いに平行な細い二つのスリット $S_1$ ,  $S_2$ にあてる。スリットの間隔を $d$ とし、 $S_1$ ,  $S_2$ の中点をC, SCはついでPに垂直とする。スリット $S_1$ および $S_2$ から出た光をPの面から $L$ の距離にあるPと平行におかれたスクリーンQにあてると、スリットと平行な多数の明暗のしまが現れる。SCの延長がスクリーンQと交わる点をOとする。ただし、 $d$ は $L$ に比べて非常に小さいとする。

- (1) O点は明るい暗い、その理由とともにのべよ。
- (2)  $m$ を0および $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ , ……の整数, Bをスクリーン上の任意の明るい線, または暗い線の位置とし, スリット $S_1$ ,  $S_2$ からそれぞれ $l_1$ ,  $l_2$ の距離にあるとする。その線が明るい場合および暗い場合につき, それぞれ $l_1 - l_2$ を $\lambda$ と $m$ とで表せ。
- (3) O点の近くに生じた明るい線のO点から測った距離 $OB = x$ を求めよ。また, 隣り合う明るい線の間隔 $\Delta x$ を求めよ。必要ならば $\varepsilon$ が1に比べて非常に小さい正の数に対する近似式 $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ を用いてもよい。
- (4)  $L = 1.0[\text{m}]$ ,  $d = 0.05[\text{cm}]$ のとき, 隣り合う暗い線の間隔が $0.11[\text{cm}]$ であれば, 単色光の波長はいくらか。
- (5) ついでPとスクリーンQの間の距離が $\Delta L$ だけ変わったので, しまの間隔が変化して, O点のすぐ隣りの明るい線から数えはじめて $m$ 番目の明るい線の位置が, 変化前の $n$ 番目の明るい線の位置に生じたとする。距離の変化 $\Delta L$ を $m$ ,  $n$ および $L$ で表せ。

(都立科技大-S62)



5. 膜の上面で反射した光と、膜の下面で反射した光の干渉を利用して膜の厚さを求める。図のように一様な厚さ  $d$  [nm] ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ )、屈折率  $n$  ( $n > 1$ ) の膜に空気中から、波長  $\lambda$  [nm] の単色平行光線を入射させる。平行な入射光線を  $PA$  および  $QB$  とし、 $PQ$  を入射波の波面とする。膜の下面で反射する光は  $PACBR$  と



進み、膜の上面で反射する光は  $QBR$  と進む。空気中の光の速さを  $c$  [m/s] として次の問いに答えよ。

問1 入射角  $\alpha$ 、屈折角  $\gamma$  のとき、屈折の法則を表す式を書け。

問2 (イ)  $A$  から  $QB$  に引いた垂線を  $AD$ 、 $B$  から  $AC$  に引いた垂線を  $BE$  とする。

光が  $AE$  を進むのに要する時間と、 $DB$  を進むのに要する時間が等しいことを示せ。

(ロ) 光が経路  $PACB$  を進むのと、経路  $QB$  を進むのに要する時間の差を  $d$ 、 $n$ 、 $c$ 、 $\gamma$  を用いて表せ。

問3 (イ) 点  $B$  で反射したとき、光波の位相はどうなるか。

(ロ) 点  $C$  で反射したとき、光波の位相はどうなるか。

(ハ)  $R$  で観測して、2つの光が干渉によって強めあう条件を  $d$ 、 $n$ 、 $\gamma$ 、 $\lambda$  と整数  $m$  を用いて表せ。

問4 屈折角が  $\gamma_0$  のとき、2つの光が干渉により強めあった。さらに入射光を傾け屈折角が  $\gamma_0 + \Delta\gamma$  になったとき再び強めあった。 $\Delta\gamma$  を  $d$ 、 $n$ 、 $\gamma_0$ 、 $\lambda$  を用いて表せ。 $\Delta\gamma$  は小さいとして、 $\cos\Delta\gamma \approx 1$ 、 $\sin\Delta\gamma \approx \Delta\gamma$  とせよ。

問5  $\lambda = 590 \text{ nm}$ 、 $n = 1.5$ 、 $\gamma_0 = 30^\circ$  であり、また  $\Delta\gamma = 4.0^\circ$  ( $\approx 0.070 \text{ rad}$ ) であった。この膜の厚さを求めよ。

(新潟大-H1)

## 付 録

### [ 1 ] 物理でよく用いる数学

#### (1) 三角関数

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta \\ \textcircled{2} \cos(a + \beta) = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \sin(a - \beta), \\ \cos(a - \beta) \text{のときは} \\ \text{左式の}\beta \text{に}(-\beta) \text{を} \\ \text{代入して導く。} \end{array}$$

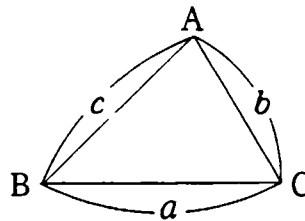
①で $\beta$ を $a$ とすると,  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

②で $\beta$ を $a$ とすると,  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\textcircled{3} \sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{a + \beta}{2} \cos \frac{a - \beta}{2}$$

③で $\beta$ を $(-\beta)$ とおくと,  $\sin a + \sin(-\beta) = \sin a - \sin \beta$ の公式が得られる。

$$\textcircled{4} \text{ 第2余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



#### (2) 近似式

①  $\theta$ の単位がradで $\theta$ が十分小さいとき,  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

②  $|x| < 1$ のとき  $(1+x)^n \approx 1 + nx$

#### (3) 微 分

$$\textcircled{1} \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \textcircled{2} \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \textcircled{3} \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\textcircled{4} \frac{d e^x}{dx} = e^x \quad \textcircled{5} \frac{d \log |x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

(4) 積 分

$$\textcircled{1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \textcircled{2} \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{4} \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\textcircled{5} \int \cos x dx = \sin x + C \qquad \textcircled{6} \int e^x dx = e^x + C$$

(5) 等比数列

初項を  $a$ 、公比を  $r$  とすると、第  $n$  項  $a_n$  は  $a_n = ar^{n-1}$ 、 $r \neq 1$  のときの  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(6) 2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解 } x \text{ は } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(7) 平方根

$$\sqrt{2} = 1.414 \quad \sqrt{3} = 1.732 \quad \sqrt{5} = 2.236$$

ひとよひとよ                      ひとなみに                      よじさんろく

$$\sqrt{7} = 2.64575 \quad \sqrt{10} = 3.1622$$

な                      に                      むしいない                      ひとまるはみいろにならぶ

(8) 近似式  $(1+x)^n \approx 1+nx$  を用いての平方根・立方根の求め方

[例1]  $\sqrt{97} = \sqrt{100-3} = \{100(1 - \frac{3}{100})\}^{\frac{1}{2}} \approx 10(1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{100}) = 9.85$

[例2]  $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125-25} = \{5^3(1 - \frac{25}{125})\}^{\frac{1}{3}} \approx 5(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}) = 4.7$

(9) 開閉計算

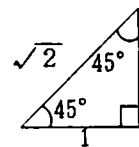
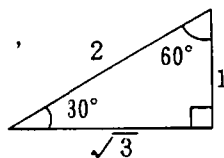
例  $\sqrt{4.5918}$

2	2. 1 4 2
<u>2</u>	<u>√4. 5 9 1 8</u>
4 1	4
<u>1</u>	5 9
4 2 4	<u>4 1</u>
<u>4</u>	1 8 1 8
4 2 8 2	<u>1 6 9 6</u>
	1 2 2 0 0
	8 5 6 4

(10) 三角関数の値

右図を用いると、例えば、

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  
 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$



[2] S I (International system of units)

力学 : MKS

熱 : MKS, K(ケルビン), mol(モル) } 基本単位 → 組立単位

電磁気 : MKSA

(人名が多い)

(例)  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$

### [3] 単位に用いる接頭辞

名 称	記号	倍 数	倍 数	記号	名 称
テラ tera	T	$10^{12}$	$10^{-12}$	<i>p</i>	ピコ pico
ギガ giga	G	$10^9$	$10^{-9}$	<i>n</i>	ナノ nano
メガ mega, meg	M	$10^6$	$10^{-6}$	$\mu$	マイクロ micro
キロ kilo	<i>k</i>	$10^3$	$10^{-3}$	<i>m</i>	ミリ milli
ヘクト h	<i>h</i>	$10^2$	$10^{-2}$	<i>c</i>	センチ centi
デカ d	<i>da</i>	$10^1$	$10^{-1}$	<i>d</i>	デシ deci

### [4] 次 元

$$\text{次元式 } [Q] = [L^x M^y T^z]$$

ただし、長さの次元はL、質量の次元はM、時間の次元はT。

- 次元の性質
- ① 加減法するとき次元は同じでなければならない。
  - ② 乗除法するとき次元は同じでなくてもよい。
  - ③ 物理式の各項の次元は同じでなければならない。
  - ④ 単なる数の次元は0である。

### [5] 測定値の計算法

測定値には有効数字があるので、次のように計算するとよい。

- ① 加減法：最後の位をそろえる。
- ② 乗除法：計算に用いる測定値のうち最小の有効数字を、計算結果の有効数字とする。
- ③ 測定値でない数の桁数：測定値の有効数字にそろえる。
- ④ 入試問題で、桁数の指定されていないときには答の桁数は2～3桁にする  
とよい。

[ 6 ] ギリシア文字

A	$\alpha$	アルファ	I	$\iota$	イオタ	P	$\rho$	ロー
B	$\beta$	ベータ	K	$\kappa$	カッパ	$\Sigma$	$\sigma$	シグマ
$\Gamma$	$\gamma$	ガンマ	$\Lambda$	$\lambda$	ラムダ	T	$\tau$	タウ
$\Delta$	$\delta$	デルタ	M	$\mu$	ミュー	$\Upsilon$	$\upsilon$	ウプシロン
E	$\varepsilon$	イプシロン	N	$\nu$	ニュー	$\Phi$	$\phi$	ファイ
Z	$\zeta$	ジータ	$\Xi$	$\xi$	クサイ	X	$\chi$	カイ
H	$\eta$	イータ	O	$o$	オミクロン	$\Psi$	$\psi$	プサイ
$\Theta$	$\theta$	シータ	$\Pi$	$\pi$	パイ	$\Omega$	$\omega$	オメガ