

大学受験本科

本科 開講日 4月19日(木)

休講日一覧

月	日	
4	29 (日)	休 講
	30 (月)	休 講
5	3 (木)	休 校
	4 (金)	休 校
	5 (土)	休 校
	6 (日)	休 校

目 次

第1回	関数の極限	6
第2回	微分法と接線	8
第3回	関数の極限、極値	10
第4回	最大、最小	12
第5回	方程式、不等式への応用	14
第6回	積分の計算	19
第7回	定積分の応用(1)	21
第8回	定積分の応用(2)	23
第9回	面積	25
第10回	面積、曲線の長さ	27
第11回	微分方程式	29

微分法とその応用

< 要点整理 >

① 重要な関数の極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

② 関数の連続

$f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が共に有限確定し, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

③ 微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

④ 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, その点で連続である。

(逆命題は不成立)

⑤ いろいろな微分法

$$(1) \{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(2) \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\text{特に, } \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(3) 合成関数の微分

$$y = f(u), u = g(x) \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(4) 媒介変数で表された関数の微分

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

⑥ 中間値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ のとき、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して、 $f(c) = k$ ($a < c < b$) なる c が存在する。

⑦ ロルの定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能で、 $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ 、 $a < c < b$ となる c が存在する。

⑧ 平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能ならば $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 、 $a < c < b$ となる c が存在する。

⑨ 接線・法線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における

接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

法線の方程式は $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ (ただし、 $f'(a) \neq 0$)

⑩ 増減・極値

① $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ ならば、} f(x) \text{ はその区間で増加する} \\ f'(x) < 0 \text{ ならば、} f(x) \text{ はその区間で減少する} \end{cases}$

② $\begin{cases} f(x) \text{ が } x = a \text{ の前後で } f'(x) \text{ の符号が正から負に変わるとき} & \text{極大} \\ f(x) \text{ が } x = a \text{ の前後で } f'(x) \text{ の符号が負から正に変わるとき} & \text{極小} \end{cases}$

⑪ 曲線の凹凸・変曲点

① $\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ ならば、} f(x) \text{ はその区間で下に凸} \\ f''(x) < 0 \text{ ならば、} f(x) \text{ はその区間で上に凸} \end{cases}$

② $f''(x)$ の符号が $x = a$ の前後で符号が変わるとき、

曲線上の点 $(a, f(a))$ はこの曲線 $y = f(x)$ の変曲点という。

第 1 回 関数の極限

[1] 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x+3x^2} - \sqrt{1-3x}}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

[2] (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+8} - 6}{x-1} = \frac{1}{3}$ であるとき、定数 a の値を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} + x) = -1$ が成り立つように、定数 a 、 b の値を求めよ。

- [3] a, b を定数とする。 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + a x^n + b x + (a-b)}{x^{2n} + (2-a)x^n + a}$
 が、 $x > 0$ において連続関数となる条件は である。

- [4] 右図において、点Aおよび点Cは動点であり、点CはBD上を動く。
 $AB = 1, AC = 2, BD = 3$ とし、 $\angle ABC = \theta$ とする。

- (1) $BC = x$ として、 x を θ を用いて表すと、

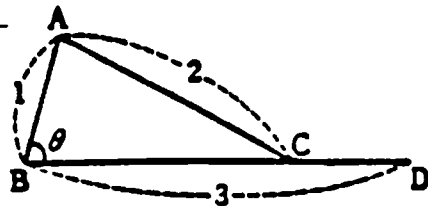
$$x = \text{ア} \cos \theta + \sqrt{\text{イ} \cos^2 \theta + \text{ウ}}$$

となる。

- (2) 三角形ABCの面積を $S(\theta)$ とすると、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \text{エ} \text{ となる。}$$

- (3) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{\theta^2} = \text{オ}$



第 2 回 微分法と接線

[5] 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{\log x}{x^2}$$

$$(2) y = \sqrt{a + b \sin x}$$

$$(3) y = \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$(4) y = x^{1+\varepsilon x}$$

[6] 関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとき、次の極限値を a , $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表せ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(a)\}^2}{x - a}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{af(x)\}^2 - \{xf(a)\}^2}{x - a}$$

[7] (1) 曲線 $y = \log x$ の接線のうちで点 $(0, -1)$ を通るものの方程式は $y = \square$ である。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 曲線 $y = \frac{\sin x}{x}$ ($x > 0$) 上の点 (p, q) における接線の方程式を求めよ。

次に $p \rightarrow \infty$ のとき、この接線の傾きおよび y 切片は、それぞれどうなるか調べよ。

[8] 2つの曲線 $y = 2 \log x$ と $y = a x^2$ がある点で共通接線をもつとする。定数 a の値および接点の座標を求めよ。

第3回 関数の増減・極値

[9] (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x^3}$ ($x > 0$) の極大値は である。

(2) 関数 $f(x) = a \sin 2x + b \cos x$ は $x = \frac{7}{6}\pi$ のとき、極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をもつ。係数 a , b を求めよ。

[10] 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right)$ について

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、また極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} f(x)$ を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。

- [11] 座標平面上の3点 $A(-1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(2, 0)$ から直線
 $y = mx + 1$ への距離の平方和 S を求めよ。次に, m の関数 S の極値
と変曲点を調べて, そのグラフの概形をかけ。

- [12] 関数 $f(x) = |x - 1|e^x + ax$ について
- (1) $f(0) + e f(1) = 0$ であるように定数 a の値を定めよ。
 - (2) (1)のとき, $f(x)$ に極値があればそれを求めよ。

第4回 最大・最小

[13] 関数 $f(x) = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値と最小値を求めよ。

[14] 曲線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(a, a^2 + a)$ における接線に点 $(1, -a^2 + a)$ から下ろした垂線の長さを $f(a)$ とする。 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、最大値、最小値を求めよ。

[15] 点Oを(0, 0)とし, 点Aを(1, 0)とする。円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上で $y > 0$ の部分に点Pをとり, $\angle AOP = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)とする。また, Pから x 軸へ下ろした垂線の足をQとする。

(1) $\triangle APQ$ の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

[16] 曲線 $y = e^{-x}$ 上の点 $P(a, e^{-a})$ (ただし, $a > -1$)における接線と x 軸および y 軸とで囲まれる三角形の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) 関数 $S(a)$ のグラフの凹凸を調べ, $S(a)$ の最大値を求めよ。

第5回 方程式・不等式への応用

[17] 実数 a, b に対して、次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$,

$n = 1, 2, \dots$ を用いてよい。

- (1) $e^x = ax$ の解の個数を調べよ。
- (2) $e^x = bx^2$ の解の個数を調べよ。

[18] 方程式 $\log x = -x^2 + 3x + p$ が3個の相異なる実数解をもつための p の範囲を求めよ。ただし、 $\log 2 = 0.6931 \dots$ とする。

[19] 不等式 $3x < 2\sin x + \tan x$ が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で成立することを証明せよ。

[20] 任意の $x > 0$ に対して $\log_e x < a\sqrt{x}$ が成り立つような a の範囲を求めよ。

積分法とその応用

< 要点整理 >

① 不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき, $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分といい, $F(x) = \int f(x) dx$ とかく

$$(1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad (2) \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$(3) \int \sin x dx = -\cos x + C \quad (4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C \quad (6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

② 置換積分法

$$x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t)) g'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$(1) \int f(ax+b) dx = F(ax+b) \text{ とすると } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$(2) \int \{f(x)\}^a f'(x) dx = \frac{1}{a+1} \{f(x)\}^{a+1} + C$$

$$(3) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

③ 部分積分法

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

④ 定積分

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とおくと $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

⑤ 偶関数、奇関数の定積分

(1) $f(-x) = -f(x)$ のとき, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

(2) $f(-x) = f(x)$ のとき, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

⑥ 定積分と不等式

(1) $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ ならば $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (等号は $f(x) \equiv 0$)

(2) $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (等号は $f(x) \equiv g(x)$)

(3) $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とすれば

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

⑦ 積分の平均値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c), \quad a < c < b$$

なる c が存在する。

⑧ 定積分と級数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

⑨ 面積

$f(x)$, $g(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ で連続で $f(x) \geq g(x)$ のとき,

曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ とで囲まれる部分の面積

S は

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

⑩ 体積

曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) とで囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

⑪ 曲線の長さ

$$(1) \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$(2) \quad s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

⑫ 微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x) \text{ より } \int \frac{1}{g(x)} \cdot dy = \int f(x) dx$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \text{ の解は } F(x) = \int f(x) dx \text{ とおくと } y = A e^{F(x)}$$

第 6 回 積分の計算

[21] 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$(3) \int \frac{1}{e^x+2} dx$$

$$(2) \int \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$(4) \int x \log x dx$$

[22] 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x \cos 3x dx$$

$$(3) \int_{e^2}^e \frac{dx}{ex \log x}$$

$$(2) \int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 3x dx$$

[23] 関数 $f(x) = 2 \cos^2 x + \sin x - 1$ について

(1) $0 \leq x \leq \pi + \frac{\pi}{6}$ または $2\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ のとき、 $f(x)$ が 0

であり、 $\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{6}$ のとき、 $f(x)$ が 0 である。

(2) $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \omega$ $\sqrt{\varepsilon}$ となる。

[24] 関数 $f(x)$ が、条件: $f'(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $f(a) = 0$ ($a > 0$) を

満たしている。

(1) $\int_0^a f(x) dx + \int_0^a x f'(x) dx$ を求めよ。

(2) $\int_0^a f(x) dx$ を求めよ。

第7回 定積分の応用(1)

[25] $1 \leq x \leq e$ において定義された関数 $f(x) = \int_1^x (2-t) \log t dt$ は

$x = \text{ア}$ のとき最大値 イ をとり, $x = \text{ウ}$ のとき最小値 エ をとる ($2.7 < e < 2.8$)。

[26] (1) $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^2 t f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_{\frac{1}{4}}^1 |f(x)| dx$ を求めよ。

[27] 関数 $f(x)$, $g(x)$ は微分可能で, それらの導関数が連続であるとする。

$$\text{このとき, } f(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x (f'(t) + g(t)) dt$$

$$g(x) = \sin x - \int_0^x (f(t) - g'(t)) dt$$

を満たす $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

[28] $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ であるとき,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi} (a \sin x + b \cos x)^2 dx$$

の最大, 最小を考える。

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = \text{ア} \boxed{\quad}, \quad \int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx = \text{イ} \boxed{\quad}$$

であるから, $I(a, b) = \text{ウ} \boxed{\quad}$ と表される。いま, b を固定し a を動かしたときの $I(a, b)$ の最大値は $\text{エ} \boxed{\quad}$, 最小値は $\text{オ} \boxed{\quad}$ となる。次いで, b を動かすことにより, 求める最大値 $\text{カ} \boxed{\quad}$, 最小値 $\text{キ} \boxed{\quad}$ を得る。これらは, それぞれ $(a, b) = \text{ク} \boxed{\quad}$, $(a, b) = \text{ケ} \boxed{\quad}$ のときである。

第 8 回 定積分の応用(2)

[29] 次の積分について, 下記の(1), (2)に答えよ。

$$f(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - a x)^2 dx$$

- (1) $f(a)$ を計算せよ。
- (2) $f(a)$ の最小値を求めよ。

[30] $\cos x \int_0^x f(t) dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 1$ のとき

- (1) $\int_0^x f(t) dt$ を x の関数として表せ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。

[31] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \{(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2\} \dots (A)$ とおく。

(1) $\sum_{k=1}^n k^2$ を求めよ。

(2) (1)の結果を用いて、(A)の値を求めよ。

(3) (A)を定積分を用いて表し、その値を計算せよ。

[32] (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ が成立することを示せ。

(2) 不等式 $\pi \log 2 < \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + \sin x) dx < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

を証明せよ。ただし、 \log は自然対数を表す。

第9回 面積

[33] k を正の定数, $f(x) = 1 - \frac{6k}{x} + \frac{5k^2}{x^2}$ とするとき

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S とするとき, $\frac{S}{k}$ の値を求めよ。

[34] k は正の定数とする。原点を通る直線が, 曲線 $y = \log(kx)$ と第1象限で接する点を A とし, 点 A におけるこの曲線の法線が, x 軸と交わる点を B とする。

(1) 点 A の x 座標を求めよ。

(2) 点 B の x 座標を求めよ。

(3) この曲線, x 軸および法線 AB によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[35] 2曲線 $y = \frac{a}{x^2+3}$ (a は正の実数) および $y = x^2$ の交点のうち、

第1象限にあるものをPとする。点Pにおける各曲線の接線が直交するとき

- (1) a の値およびPの座標を求めよ。
- (2) 2曲線が囲む部分の面積を求めよ。

[36] a を正の定数として、次の式で表される曲線をCとする。

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

- (1) 曲線Cの接線のうち、 x 軸の正の向きと $\frac{\pi}{4}$ の角をなすものの方程式を求めよ。
- (2) 曲線Cと(1)で求めた接線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

第10回 体積, 曲線の長さ

[37] 関数 $f(x) = x + 2 \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) について, 次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 2\pi$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[38] $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ について次の問いに答えよ。

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求め, 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと, x 軸とで囲まれる領域のうち $y \geq 0$ となるほうの領域の面積を求めよ。
- (3) (2) で面積を求めた領域を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

[39] 座標空間において、 x が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、2点 $P(x, 0, \cos^2 x)$ 、 $Q(x, 1 - \sin x, 0)$ を結ぶ直線 PQ が動いてできる曲面を S とする。このとき、 S と3つの座標平面で囲まれる立体の体積を求めよ。

[40] 対数は自然対数とする。関数 $f(x) = \log(2 \sin x)$ ($0 < x < \pi$)について

- (1) 増減、極値および凹凸を調べ、曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。
- (2) この曲線の $y \geq 0$ の部分の長さを求めよ。

第11回 微分方程式

[41] 微分方程式 $\frac{d y}{d x} = -2 x y^2$ がある。ただし、初期条件は $x = 0$ のと

き、 $y = \frac{1}{a^2}$ とする ($a > 0$)。

(1) 微分方程式の解 $y = f(x)$ を求めよ。

(2) 積分 $I(a) = \int_0^a y dx$ を計算せよ。

(3) 関数 $S(a) = \pi a + I(a)$ を最小にする a の値と、そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

[42] 微分方程式 $x \frac{d y}{d x} + y = \log x$, $x = 1$ のとき $y = 0$ を解くために、

$y = \frac{u}{x}$ とおく。 $\frac{d u}{d x} = \text{ア}$ となり、これを解いて解 u を求めれば、

$u = \text{イ}$ となり、したがって $y = \text{ウ}$ となる。

[43] 次の式を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

(1) $f'(x) = 2f(x) + 10$, $f(0) = 0$

(2) $\int_0^x u^3 g(u) du = x^4 + g(x)$

[44] 第1象限にある曲線 $C: y = f(x)$ は、点 $A(1, 1)$ を通り、次の性質を満たしているとする。曲線 C 上の任意の点 P における法線と x 軸との交点を Q とし、点 Q より直線 $y = 2x$ に下ろした垂線の足を R とすれば、直線 PR は x 軸と直交する。

(1) 点 P の座標を $(a, f(a))$ とするとき、 a , $f(a)$, $f'(a)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。