

はじめに

この講座は1年間で『代数・幾何』の内容を基本から標準までの入試問題をレベルに沿って学習し、大学合格できる実力をつけることを目標にしています。

とくに前期は“基礎力養成期”として、定理や公式などの重要事項を確認しながら、入試問題の“考え方”“解き方”のコツが身につくように指導します。したがって、諸君も次の点に留意して学習してもらいたい。

1. 各項目毎に重要事項をまとめてあるが、教科書、参考書などで定理、公式などの確認をしておくこと。
2. 毎回4問ずつ解説するから、前もって自分で考え、ノートに解いてみること。
解けない場合は途中まででもよい。
3. 90分の講義では解法のポイントをつかむように心掛けること。
4. 必ず復習して、その日の講義の重点を完全に身につけること。
5. 理解できないところがあれば遠慮なく質問して解決しておくことよい。

以上であるが、数学は簡単に身につくものではない。時間をかけてコツコツ努力することが大切であるから途中でくじけないように頑張ってもらいたい。

目 次

第 1 回	ベクトル (1)	-----	6
第 2 回	ベクトル (2)	-----	8
第 3 回	ベクトル (3)	-----	10
第 4 回	空間座標 (1)	-----	14
第 5 回	空間座標 (2)	-----	16
第 6 回	行 列 (1)	-----	20
第 7 回	行 列 (2)	-----	22
第 8 回	1 次変換 (1)	-----	26
第 9 回	1 次変換 (2)	-----	28
第 10 回	2 次曲線 (1)	-----	32
第 11 回	2 次曲線 (2)	-----	34

＜重要事項＞

① 基本変形

$$(1) \vec{AB} = -\vec{BA} \quad (2) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \quad (3) \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

② 3点A, B, Cが同一直線上にあるための条件

$$\begin{aligned} \vec{AC} = t\vec{AB} &\Leftrightarrow \vec{OC} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad (t \text{ は実数}) \\ &\Leftrightarrow \vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}, \quad m+n=1 \end{aligned}$$

③ 分点ベクトル

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 線分ABを $m:n$ に分ける点をPとすると

$$\vec{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad (mn > 0 \text{ のとき内分, } mn < 0 \text{ のとき外分})$$

④ 重心ベクトル

三角形ABCの重心をGとすると

$$(1) \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \quad (2) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

⑤ 内積と図形

$\vec{OA} = \vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{OB} = \vec{b} = (x_2, y_2)$ のとき

$$(1) \text{ 大きさ: } OA = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad AB = |\vec{b} - \vec{a}|$$

$$(2) \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角 } \theta: \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$(3) \text{ 垂直条件: } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

(4) $\triangle OAB$ の面積:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

⑥ 1次独立: $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ のとき

(1) $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \iff m = n = 0$

$m\vec{a} + n\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b} \iff m = p, n = q$

(2) 平面上の任意のベクトル \vec{c} は $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ と1通りに表わすことができる。

⑦ 空間ベクトル

空間ベクトルの性質は平面ベクトルを空間に拡大したもので、同じである。

第 1 回 ベクトル (1)

【1】平面上の点 P と $\triangle ABC$ との間に次の関係があるとき、点 P と $\triangle ABC$ の位置関係をそれぞれ調べよ。

(1) $\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{BC}$

(2) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{CP}$

(3) $4\vec{PA} + 3\vec{PB} = 3\vec{PC} + 4\vec{CA}$

【2】 $\triangle ABC$ の内部に点 P をとる。このとき、ベクトル \vec{AP} , \vec{BP} , \vec{CP} は $\vec{AP} + 4\vec{BP} + 6\vec{CP} = \vec{0}$ を満たしている。また、 $\vec{a} = \vec{CA}$, $\vec{b} = \vec{CB}$ とする。

(1) ベクトル \vec{CP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

(2) 辺 BC を $1:4$ に内分する点を D とし、 D を通り、辺 AC に平行な直線が辺 AB と交わる点を Q とする。このとき、 \vec{CQ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

(3) 3点 C , P , Q は同一直線上にあることを示せ。

- 【3】 $\triangle OAB$ において、辺 OB の中点を M 、辺 AB を $1:2$ に内分する点を C 、辺 OA を $2:3$ に内分する点を D 、 CM と BD の交点を P とする。ベクトル \vec{OA} を \vec{a} 、ベクトル \vec{OB} を \vec{b} とするとき、
- (1) ベクトル \vec{OC} を \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。
 - (2) $CP:PM = s:1-s$ 、 $BP:PD = t:1-t$ とするとき、ベクトル \vec{OP} を s 、 \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。また、 \vec{OP} を t 、 \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。
 - (3) s 、 t の値を求め、ベクトル \vec{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。

- 【4】 平面上に $\triangle OAB$ があり、その面積を S とする。平面上の点 P に対して $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ と表す。
- (1) s 、 t が条件 $3s + 4t = 2$ をみたすとき、 P はどんな図形上にあるか。
 - (2) 点 P が $\triangle OAB$ 内にあり、かつ s 、 t が条件 $3s + 4t \geq 2$ をみたすとき点 P の存在する範囲の面積を S で表せ。

第2回 ベクトル (2)

【5】 (1) $\vec{a} = (4, 3)$ と 60° の角をなし、大きさが2倍であるベクトル \vec{b} を求めよ。

(2) 次の p, q, r, s の値を求めよ。

① ベクトル $\vec{x} = (1, p, q)$ は2つのベクトル $\vec{a} = (2, 4, 3)$, $\vec{b} = (5, 9, 7)$ の両方に直交する。

② ベクトル $\vec{y} = (1, r, s)$ は2つのベクトル $\vec{c} = (-3, 4, 0)$, $\vec{d} = (2, -2, -1)$ のなす角を2等分する。

【6】 ベクトル \vec{x} の大きさを $|\vec{x}|$ と表すとき、 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$ である。

(1) \vec{a} と \vec{b} の内積 (\vec{a}, \vec{b}) を求めよ。

(2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$ を求めよ。

【7】 三角形ABCにおいて、辺ABを1:2に内分する点をEとし、辺ACを3:2に内分する点をDとする。線分BDと線分CEの交点をPとし、線分APの延長と辺BCの交点をFとするとき

- (1) \vec{AP} を \vec{AB} , \vec{AC} を用いて表せ。
- (2) $\vec{AF} = m\vec{AP}$ を満たす実数 m の値を求めよ。
- (3) 辺AB, AC, BCの長さがそれぞれ $2\sqrt{3}$, 2, 4であるとき、 \vec{AF} と \vec{BC} の内積 $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ を求めよ。

【8】 $OA=2$, $OB=1$, $\angle AOB$ が直角である直角三角形OABにおいて、点Oから斜辺ABにおろした垂線の足をHとする。更に $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし、辺OA, OB上にそれぞれ $\vec{OP} = k\vec{a}$, $\vec{BQ} = -k\vec{b}$ ($0 < k < 1$)となる点P, Qをとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{OH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (2) \vec{HP} を k と \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 内積 (\vec{HP}, \vec{HQ}) の値を求めよ。
- (4) $|\vec{PQ}|$ を最小にする k の値を求めよ。

第3回 ベクトル (3)

【9】 3点A(1, 2), B(2, 4), C(3, 0)に対して点Pが,

$$|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 3$$

をみたしながら動くとき, 点Pはある円周上を動く。この円の中心は□
□, 半径は□である。更に, Oを原点とし, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ としたとき,
内積 $\vec{OP} \cdot \vec{a}$ の最大値は□, 最小値は□である。

【10】 (1) \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積Sは,

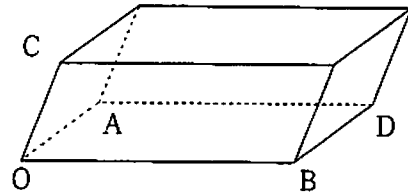
$$S = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$$

であることを証明せよ。

(2) $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ のとき, Sを x_1, y_1, x_2, y_2 で表せ。

(3) 3点A(1, 1, 0), B(3, -1, 0), C(2, 0, -3)を頂点とする三角形ABCの面積を求めよ。

- 【11】 原点 O と3点 $A(-3, -1, 0)$,
 $B(-1, 3, 1)$, $C(2, 1, 4)$
 を頂点とする図のような平行六面体
 について



- (1) 平行四辺形 $OADB$ の面積は $\sqrt{\quad}$ である。
 (2) ベクトル \vec{OA} , \vec{OB} のそれぞれに直交し、大きさが平行四辺形 $OADB$ の面積に等しいベクトルは $\pm(1, -3, \quad)$ である。
 (3) この平行六面体の体積は \quad である。

- 【12】 1辺の長さ l の正四面体 $OABC$ で、 OA の中点を M , BC の中点を N とする。ベクトル \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} と書くとき、ベクトル \vec{MN} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表すと、 $\vec{MN} = \quad$ である。ベクトル \vec{MN} の大きさは $|\vec{MN}| = \quad$ であり、ベクトル \vec{MN} とベクトル \vec{OB} のなす角を弧度法で表せば \quad ラジアンである。

空間座標

<重要事項>

① 距離, 分点の座標 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ のとき

(1) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(2) AB を $m : n$ に分ける点 $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right)$

② 直線の方程式

$$\vec{OA} = \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{OB} = \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{u} = (l, m, n)$$

のとき

(1) 点 A を通り, \vec{u} に平行な直線

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

(2) 2点 A, B を通る直線

(1)において $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ とすればよい。

③ 平面の方程式

(1) 点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り $\vec{u} = (l, m, n)$ に垂直な平面

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$$

(2) 一般形 $ax + by + cz + d = 0$

④ 点と平面との距離

点 $A(x_1, y_1, z_1)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

⑤ 2平面の関係

$ax + by + cz = 0, a'x + b'y + c'z + d' = 0$ において

(1) なす角 θ : $\cos \theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$

(2) 2平面の交線を含む平面

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

⑥ 球の方程式

(1) 中心 (a, b, c) , 半径 r の球: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

(2) 一般形: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

⑦ 2つの球の関係

(1) 2つの球 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

交わりを含む球は $f(x, y, z) + kg(x, y, z) = 0$ (k は定数)

とおける。ただし, $g(x, y, z) = 0$ は除く。

とくに, $k = -1$ のとき, 交わりを含む平面である。

(2) 2つの球の半径を r_1, r_2 , 中心間の距離を d とおくと

$r_1 + r_2 > d$ のとき 分離

$r_1 + r_2 = d$ のとき 外接

$r_1 \sim r_2 < d < r_1 + r_2$ のとき 相交

$r_1 \sim r_2 = d$ のとき 内接

$r_1 \sim r_2 > d$ のとき 包含

第4回 空間座標 (1)

【13】 2直線 $g : \frac{x-1}{2} = \frac{5-y}{3} = \frac{z+3}{4},$

$$l : \frac{x-3t}{3} = y-2t = \frac{z-t}{2}$$

がある。

- (1) g, l が交点をもつときの t の値を求めよ。
- (2) (1)のとき、この2直線を含む平面の方程式を求めよ。

【14】 空間内に点 $P(2, 1, 1)$ と直線 $l : \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-1$ がある。

- (1) 点 P を通り、直線 l に垂直に交わる直線 m の方程式を求めよ。
- (2) 点 P を通り、直線 m に垂直な平面の方程式を求めよ。

【15】 2直線 $\frac{x-5}{3} = y = \frac{z-4}{2} \dots \textcircled{1}$ $x+2 = \frac{y-2}{2} = 1-z \dots \textcircled{2}$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 2直線①, ②のいずれにも垂直な1つのベクトルを求めよ。
- (2) 直線PQが2直線①, ②のいずれにも垂直であるような①上の点P, ②上の点Qの座標を求めよ。

【16】 空間に3点A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 6)が与えられている。

- (1) 3点A, B, Cを通る平面の方程式を求めよ。
- (2) 三角形ABCの重心をDとすると、2点A, Dを通る直線の方程式を求めよ。。また、 $\angle BAD$ の大きさを求めよ。
- (3) 原点をOとすると、四面体OABDの体積を求めよ。

第5回 空間座標 (2)

【17】 2つの直線 $l_1: x=y=z$, $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = z-3$ がある。

- (1) 直線 l_1 を含み、直線 l_2 に平行な平面 π_1 の式を求めよ。
- (2) 直線 l_2 を含み、平面 π_1 に垂直な平面 π_2 の式を求めよ。
- (3) 平面 π_2 と直線 l_1 の交点 P の座標を求めよ。
- (4) 点 P と直線 l_2 の距離を求めよ。

【18】 直線 $l: x=y=z-1$ と球面

$$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-1)^2 = 1$$

とについて、

- (1) S の中心を通り l に垂直な平面 α の方程式
- (2) α と l との交点 P の座標
- (3) S と l とが共有点をもつための a , b の条件を求めよ。

【19】 球面 S は点 $(3, 2, 6)$ を中心とし、点 $(5, 4, 7)$ を通る。

- (1) 球面 S の方程式を求めよ。
- (2) 球面 S 上の点で、原点との距離が最小になるような点 P の座標を求めよ。
- (3) (2)で求めた点 P において、球面 S に接する平面の方程式を求めよ。

【20】 2点 $(0, 0, 1), (2, 2, 5)$ を直径の両端とする球面 S_1 と、2点 $(-1, 0, 3), (3, 4, 1)$ を直径の両端とする球面 S_2 がある。 S_1 と S_2 の交わりは円 C である。この円 C の中心の座標と、半径を求めよ。

行 列

<重要事項>

① 行列の演算

乗法については「結合法則」は成り立つが、「交換法則」は一般に成り立たない。

② 行列 A の基本性質 (E は単位行列, O は零行列)

$$(1) \quad xA + yE = O \rightarrow A = kE \text{ または } x = y = 0$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

③ 逆行列

$$(1) \quad AX = XA = E \text{ のとき, } X \text{ を } A \text{ の逆行列といい, } A^{-1} \text{ で表す。}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき, } \Delta(A) = |A| = ad - bc \neq 0 \text{ のとき}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A^{-1}, B^{-1} \text{ が存在すれば } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(4) \quad AB = O \text{ のとき } A = O \text{ または } B = O \text{ とは限らない。}$$

$A \neq O, B \neq O$ で $AB = O$ となる A, B (零因子) が存在する。

④ 行列の n 乗

(1) 数学的帰納法の利用

A^2, A^3, \dots などから A^n を推定し, 数学的帰納法で証明する。

$$\text{例 } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

(2) 特別な形

$$(r) \quad ad - bc = 0 \text{ のとき } A^2 = (a+d)A \text{ より } A^n = (a+d)^{n-1}A$$

$$(i) \quad a + d = 0 \text{ のとき } A^2 = -(ad - bc)E \text{ を利用して次数を下げる。}$$

(3) 一般的な求め方

(i) ケーリー・ハミルトンの定理の利用

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E = 0 \text{ から}$$

$$A^{n+2} - (\alpha + \beta)A^{n+1} + \alpha\beta A^n = 0$$

数列の隣接3項間の漸化式の要領で解く。

(ii) 多項式の割り算の利用

(iii) 対角化の利用

(iv) 固有ベクトルの利用

(v) 2項定理の利用

⑤ 固有値, 固有ベクトル

行列 A , ベクトル \vec{x} ($\neq \vec{0}$), 実数 k に対して

$$A\vec{x} = k\vec{x}$$

が成り立つとき, k を A の固有値, \vec{x} を A の固有ベクトルという。

固有値 k の求め方

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とすると, 固有方程式 } k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0$$

の解として求める。

第6回 行列 (1)

【21】 (1) A, B は2次の正方行列で $2A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$A+2B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ であるとき, $AB = \square$ である。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ と単位行列 E , 零行列 O について,

$A^2 - 2A + \square E = O$ が成り立つならば, $a = \square$, $b = \square$

\square , $c = \square$ である。

【22】 (1) E が2次の単位行列で $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}E$ のとき, A の逆行列を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする行列 AB の逆行列が

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ であるとき, A を求めよ。

【23】 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき,

(1) 行列の積 AB を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるような行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を求めよ。

(3) 連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ を解け。

【24】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b+1 \\ -b & 2a+1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし,

a, b は $a^2 + b^2 = 1$ をみたす実数とする。

(1) A は逆行列をもつことを証明せよ。

(2) 連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ が, $x = y = 0$ 以外の解を持つとき,

A を求めよ。

第7回 行列(2)

【25】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ が $A^2 - 3A + 2E = O$ をみたすとき、次の問い

に答えよ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列を表す。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) n を自然数とすると、行列 A^n を求めよ。

【26】 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 、 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ について、

- (1) 行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。
- (2) 行列 $(P^{-1}AP)^n$ を求めよ。
- (3) 行列 A^n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

【27】 (1) x^n を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りは である。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し,

$A^2 - A - 2E = \text{}$ となる。これと(1)の結果から, $A^n = \text{}$ となる。

【28】 行列 $A = \begin{pmatrix} p+2 & p^2-2 \\ -p-1 & 1-p \end{pmatrix}$ は $A^2 = 3A - 2E$ をみたしている。

ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p > 0$ とする。

(1) p の値を求めよ。

(2) A^3, A^4, A^5 を $\alpha A - \beta E$ (α, β は自然数) の形に表せ。

(3) n が自然数で $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とするとき,

a_n, b_n, c_n, d_n を求めよ。

1 次変換

<重要事項>

① 1次変換

座標平面上の点 $P(x, y)$ に点 $Q(x', y')$ を対応させる変換 f が

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定められるとき、 f を1次変換という。

② 1次変換の図形的性質

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とすると

(1) $ad - bc \neq 0$ ならば

(i) 平面全体は平面全体に

(ii) 直線(線分)は直線(線分)に

(iii) 平行線は平行線に

(iv) 内分点は同じ比の内分点に

(2) $ad - bc = 0$ ならば

(i) $A \neq 0$ ならば 平面全体は原点を通る1直線に

(ii) $A = 0$ ならば 平面全体は原点に

③ 対称変換, 相似変換, 回転変換

(1) x 軸に関する対称 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) y 軸に関する対称 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 原点に関する対称 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $y = x$ に関する対称 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 相似変換 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(6) 原点を中心とする角 θ の回転 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

④ 1次変換の線形性

(1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ (2) $f(k\vec{x}) = k f(\vec{x})$

〔基本例題〕 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって、直線上の点がすべて同じ直線上に移される直線をすべて求めよ。

〔解法Ⅰ〕 求める直線の方法ベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p - 3q \\ 2p - q \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(4p - 3q)q = (2p - q)p$$

$$(2p - 3q)(p - q) = 0 \quad \therefore p : q = 3 : 2 \text{ または } 1 : 1$$

よって、求める直線は $y = \frac{2}{3}x + n$ または $y = x + n$ とおける。

また、この上の点 $(0, n)$ の像 $(-3n, -n)$ もこの直線上にうつるから

$$-n = -2n + n \text{ または } -n = -3n + n$$

$$n \text{ は任意} \quad \text{または} \quad n = 0$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x + n, y = x \quad (n \text{ は任意})$$

〔解法Ⅱ〕 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から、 y 軸に平行な不動直線はないから、 $y = mx + n$ とおける。

この直線上の点 $(t, mt + n)$ の像

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 - 3m)t - 3n \\ (2 - m)t - n \end{pmatrix} \text{ が同じ直線上に移るから}$$

$$(2 - m)t - n = m\{(4 - 3m)t - 3n\} + n$$

$$(3m^2 - 5m + 2)t + n(3m - 2) = 0$$

が任意の t に対して成り立つ。

ゆえに、 $m = \frac{2}{3}$ のとき n は任意

$$m = 1 \text{ のとき } n = 0$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x + n, y = x \quad (n \text{ は任意})$$

第 8 回 1 次変換 (1)

【29】 1次変換 f の行列 A を $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) 1次変換 f によって直線 $2x + 3y = 6$ はどのような図形に移されるか。
- (2) 1次変換 f によって原点以外で動かない点があれば求めよ。
- (3) 1次変換 f によって直線上の点がすべて同じ直線上に移されるような直線があれば、そのすべてを求めよ。

- 【30】 (1) 点 $(5, 5)$ を点 $(-1, -7)$ に、点 $(6, 2)$ を点 $(2, -6)$ に移す 1次変換を表す行列 A を求めよ。
- (2) a を任意の定数とするとき、上の 1次変換 A により、直線 $y = 2x + a$ はそれ自身に移されることを示せ。

【31】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる平面上の1次変換は直線

$g : y + 2x = 8$ を直線 $h : 2y - x = 1$ に移し、直線 h を直線 g に移すという。行列 A を求めよ。

【32】 (1) 平面上で点を直線 $y = x$ に関して対称移動し、更に原点を中心として -60° 回転させる1次変換の行列を求めよ。

(2) (1)の1次変換によって、直線 l が $3x - 5y + 2 = 0$ となった。
直線 l の方程式を求めよ。

第9回 1次変換(2)

【33】 行列 $\begin{pmatrix} 2-a & b \\ -1 & 4-a \end{pmatrix}$ による1次変換は、 xy 平面のすべての点を

直線 $y = mx$ の点に移し、直線 $y = mx$ のすべての点を原点に移すとする。このときの a , b , m を求めよ。

【34】 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2a \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f がある。3点 $A(0, 0)$,

$B(1, 0)$, $C(1, 1)$ を頂点とする三角形は、 f によって面積3、重心の座標が $(2, 2)$ の三角形に移される。このとき a , b , c の値を求めよ。

【35】 任意の点 (x, y) を $(4x, 4y)$ に移す1次変換を f 、直線 $y = -x$ に関する対称移動を g 、原点を中心とする回転角 45° の回転を h とするとき、合成変換 $h \circ g \circ f$ を表す行列を求めよ。また、この合成変換によって点 $(\sqrt{2}, 0)$ に移される点の座標を求めよ。

【36】 座標平面で、点 $P(x, y)$ を原点 O の周りに θ だけ回転して $P'(x', y')$ となったとする。このとき x', y' を x, y, θ を用いて表すと、 $x' = \square$ 、 $y' = \square$ である。

曲線 $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y + 4 = 0$ に、上の回転をほどこすと $x'y'$ の係数は \square となり、これが0となるときの θ の値は \square である。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

2 次曲線

<重要事項>

① 放物線

(1) 定義：定点と定直線から等距離にある点の軌跡である。

この定点を焦点，定直線を準線という。

(2) 標準形

$$y^2 = 4px \quad \text{焦点 } (p, 0), \text{ 準線 } x = -p$$

$$x^2 = 4py \quad \text{焦点 } (0, p), \text{ 準線 } y = -p$$

(3) 接線 ($y^2 = 4px$ について)

(i) 曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式： $y_1 y = 2p(x + x_1)$

(ii) 傾き m の接線の方程式： $y = mx + \frac{p}{m}$

② だ円

(1) 定義：2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡である。

この2 定点を焦点という。

(2) 標準形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(i) $0 < b < a$ のとき 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

長軸の長さ $2a$ ，短軸の長さ $2b$

(ii) $0 < a < b$ のとき 焦点 $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$

長軸の長さ $2b$ ，短軸の長さ $2a$

(3) 接線 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ について

(i) 曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式： $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ii) 傾き m の接線の方程式： $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

③ 双曲線

(1) 定義：2定点からの距離の差が一定である点の軌跡である。

この2定点を焦点という。

(2) 標準形

(i) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

頂点 $(\pm a, 0)$, 漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 焦点 $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$

頂点 $(0, \pm b)$, 漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$

(3) 接線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ について

(i) 曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式： $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = \pm 1$

(ii) 傾き m の接線の方程式： $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$

直角双曲線 $xy = k$ について

曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式： $y_1 x + x_1 y = 2k$

第10回 2次曲線(1)

【37】 (1) 2つの焦点が $(3, 0)$, $(-3, 0)$ で点 $(-4, 0)$ を通るだ円の方程式は□である。

(2) $x y$ 平面において、原点を中心とし、長軸の長さが $2\sqrt{3}$ 、1つの焦点の座標が $(1, 0)$ であるようなだ円の方程式は□である。

【38】 方程式 $2x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 11 = 0$ で表されるだ円の中心の座標は□で、長軸は短軸の□倍の長さを持ち、焦点の x 座標のうち小さい方は□である。また、このだ円と直線 $y = x + k$ とが共有点をもつような k の範囲を求めよ。

【39】 方程式 $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 12$ …… ① の表す図形を原点 O の周りに正の向きに 60° 回転すると、だ円 $\frac{x^2}{\square} + \frac{y^2}{\square} = 1$ …… ② となる。そして、だ円②の焦点は $(\pm\sqrt{\square}, 0)$ である。

【40】 a, b は正の定数で $a > b$ とする。双曲線 $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、

- (1) 双曲線 H の焦点の座標を求めよ。
- (2) 双曲線 H について、負の傾きをもつ漸近線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた漸近線と直交する直線が、双曲線 H と接するとき、その接点の座標を a, b を用いて表せ。

第11回 2次曲線 (2)

- 【41】 円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ の外部の点 P から 2 本の接線を引く。それらの直線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

- 【42】 点 $A(a, 0)$ から双曲線 $x^2 - y^2 = 1 (x > 0)$ の上の点 $B(x, y)$ への距離を s とする。
- (1) s^2 を a と x で表せ。
 - (2) s^2 の最小値を求めよ。

【43】 放物線 $y = x^2$ の焦点を $F(0, p)$, 放物線上の点を P , 線分 PF と円 $x^2 + y^2 - 2py = 0$ との交点を A , P から x 軸に下ろした垂線の足を H とする。

(1) p の値は何か。

(2) $\triangle PAH$ が正三角形であるとき, その面積を求めよ。ただし, P は第1象限にあるものとする。

【44】 xy 平面上に定点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) とだ円 $3x^2 + 16y^2 = 195 \dots \textcircled{1}$ がある。いま, 原点 O を通る直線 $y = 2\sqrt{3}x \dots \textcircled{2}$ が第1象限において, だ円 $\textcircled{1}$ と交わる点を B とし, 線分 AB の中点を C とする。このとき, C はだ円 $\textcircled{1}$ 上の点になった。

(1) 定数 a の値, および B と C の座標を求めよ。

(2) $\angle BOC$ を求めよ。

(3) $\triangle BOC$ の面積を求めよ。