

目 次

第 1 回	• • • • • • •	2
第 2 回	• • • • • • •	4
第 3 回	• • • • • • •	6
第 4 回	• • • • • • •	8
第 5 回	• • • • • • •	10
第 6 回	• • • • • • •	12
第 7 回	• • • • • • •	14
第 8 回	• • • • • • •	16
第 9 回	• • • • • • •	18
第 10 回	• • • • • • •	20
第 11 回	• • • • • • •	22

第 1 回

【1】 自然数 n が無限に大きくなるとき、次の数列の収束、発散を調べよ。

$$(1) \{\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n-1}\} \quad (2) \left\{ \frac{7+5^{2n}}{9^n} \right\}$$

【2】 $a_1 = 2$ で、 $\log_{10} a_n (n=1, 2, \dots)$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるとき

(1) $\log_{10}(a_1 a_2 \cdots a_n)$ を計算することによって、 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)$ を求めよ。

【3】(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{(4 - \sqrt{3} + 2 \sin \theta)^{n+2}}$ が 0 以外の値に収束するのは

のときであり、その極限值は である。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(2) $f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + n \cos^2 x} + \frac{1}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$ とする。

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求め、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

【4】 a, b は、 $0 < a < b$ を満たす定数とし、 n を自然数とする。

(1) 不等式 $n \log_2 b < \log_2(a^n + b^n) < n \log_2 b + 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ を求めよ。

第 2 回

【5】 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列

の一般項と $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

【6】 数直線上の 2 点 A_1, A_2 に対して、線分 A_1A_2 を 2 : 1 に内分する点を A_3 、線分 A_2A_3 を 2 : 1 に内分する点を A_4 、……、一般に、線分 A_nA_{n+1} を 2 : 1 に内分する点を A_{n+2} ($n \geq 1$) とする。点 A_n の座標を a_n とすると、数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = \text{ア} \square a_{n+1} + \text{イ} \square a_n$ ($n \geq 1$) を満たし、更に $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1$) とおくと、数列 $\{b_n\}$ は、漸化式 $b_{n+1} = \text{ウ} \square b_n$ ($n \geq 1$) を満たす。

いま、 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ とすると、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $\text{エ} \square$ となり、これより、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\text{オ} \square$ となる。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{カ} \square$ である。

【7】 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の関係式 $a_0 = 1$, $a_n = 2p a_{n-1} + p^2 b_{n-1}$, $b_0 = 0$, $b_n = p^2 a_{n-1} + 2p b_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとき

- (1) 数列 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するような実数 p の値の範囲を求めよ。

【8】 数列 $\{x_n\}$ を, $0 < x_1 < 1$ として $x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

で定める。

- (1) すべての n に対し, $0 < x_n < 1$ であることを示せ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し, その極限值を求めよ。

第 3 回

- 【9】無限等比級数 $\frac{2-x}{x} + \frac{(2-x)^2}{x^2} + \frac{(2-x)^3}{x^3} + \dots + \frac{(2-x)^n}{x^n} + \dots$ が収束するためには x の値はどのような範囲になければならないか、その範囲を求めよ。また、そのときのこの級数の和を求めよ。

【10】(1) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 3}$ を求めよ。

(2) 無限級数 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) + \dots$ の和は である。

【11】 $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ただし、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$ は既知とする。

【12】 $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$ ($n \geq 2$) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) 一般項 a_n を n の式で表せ。
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

第 4 回

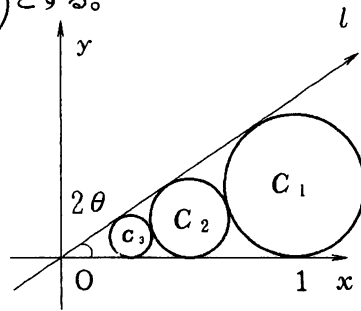
- 【13】 自然数を右の図のように四角に配列して
- | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | • | • |
| 2 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | • | • |
| 5 | 6 | 7 | 14 | 23 | 34 | • | • |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 22 | 33 | • | • |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 32 | • | • |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • |
- いくとき、対角線上より 1 段下段に並ぶ数
で作られる数列 2, 6, 12, 20, 30, ……
について
- (1) 階差数列の一般項 b_n を求めよ。
- (2) 与えられた数列の一般項 a_n を求めよ。
- (3) $c_n = \frac{a_n}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}$ とお
くとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ の和を求めよ。

- 【14】 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 3^n を分母とする既約分数で 0 より大きく
1 より小さいものの総和を S_n とおく。
- (1) S_n を n の式で表せ。
- (2) 級数 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots$ の和を求めよ。

- 【15】 3辺が3, 4, 5である三角形 T_1 に内接する円を C_1 , C_1 に内接する T_2 と相似な三角形を T_2 , T_2 に内接する円を C_2 とし, 以下同様に $T_3, C_3, T_4, C_4, \dots$ を作る。三角形 T_i の面積を S_i として $\sum_{i=1}^{\infty} S_i$ を求めよ。

- 【16】 直線 l を $y = (\tan 2\theta)x$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)とする。

右の図のように, 点 $(1, 0)$ を通り x 軸と l に接する円を C_1 , l と C_1 と x 軸に接する円を C_2 , l と C_2 と x 軸に接する円を C_3 , 以下同様に, l と C_k と x 軸に接する円を C_{k+1} とする。



円 C_k の面積を S_k とするとき, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。

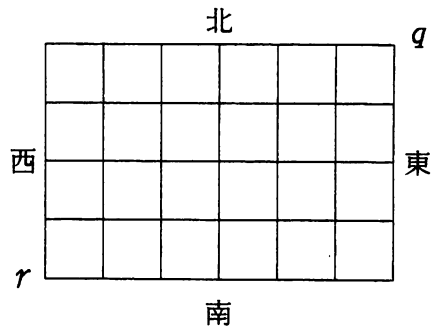
第 5 回

- 【17】 0, 1, 2, 3, 4から異なる3つの数字を選んで, 3桁^{けた}の整数を作る
とき, 奇数となるものは□(1)□個ある。また, 同様にして作ったこれら3
桁^{けた}の整数のなかで3の倍数となるものは□(2)□個ある。

【18】 次の問いに答えよ。

- (1) 千円札, 五百円硬貨, 百円硬貨を使って3000円を支払う方法は何通りあるか。
具体的に示せ。
- (2) 8段の階段がある。1段または2段ずつのぼるとき, 1段が2回で2段が3
回となるのぼり方は何通りあるか。

- 【19】 右図のように，東西方向の5本と南北方向の7本の道路で碁盤の目に区画された市街地がある。このとき，この市街地の東北隅 q から西南隅 r にいたる最短経路の本数を求めよ。



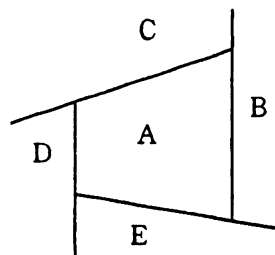
- 【20】 互いに同形のガラス玉 g 個と，互いに同形のダイヤモンド d 個と，表裏のあるペンダント1個とを，まるくつないでネックレス状のものをつくる。ただし，ペンダントの両隣はダイヤモンドにする。 $(d \geq 2, g \geq 1)$
- (1) 何通りのつくり方があるか。
 - (2) どの2個のダイヤモンドも隣り合わないことにしたら，何通りのつくり方があるか。

第 6 回

【21】 5色の絵の具を用いて右図の

A, B, C, D, Eを塗り分けるとき,

- (1) すべての色が異なる場合は何通りあるか。
- (2) 同じ色を何回用いてもよいが、隣り合う部分は異なる色とする場合は何通りあるか。



【22】 equationのすべての文字を使って、順列を作る。このとき、次のようなものは、それぞれ何通りあるか。

- (1) e, nが両端にあるもの
- (2) q, aが、隣り合っていないもの
- (3) t, i, o, nの順が、このままのもの

【23】 男子4人, 女子3人の合計7人を3組に分ける。

(i) 4人, 2人, 1人の3組に分ける方法は 通りである。

(ii) 4人, 2人, 1人の3組に分け, どの組にも女子が入っているように分ける方法は 通りである。

(iii) 2人, 2人, 3人の3組に分ける方法は 通りである。

【24】 各項が1, 2, 3, 4のどれかであるような長さ5の数の列 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の全体をSとする。

(1) Sに属する数の列の個数を求めよ。

(2) Sに属する数の列 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ で, $a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$ であるものの個数を求めよ。

(3) Sに属する数の列 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ で, 1, 2, 3, 4がすべて現れるものの個数を求めよ。

第 7 回

【25】 次の問いに答えよ。

(1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ を展開したとき、 x^{11} の係数は

(2) n を正の整数とする。 $\left(x^5 - \frac{1}{x^7}\right)^n$ を展開するとき、定数項 (すなわち、 x を含まない項) をもつ最小の n は幾らか。

【26】 $\left(x + y + \frac{1}{3xy}\right)^6$ の展開式における定数項は である。

【27】 次の問いに答えよ。

- (1) x と y を実数, n を自然数とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n {}_n C_k k x^k y^{n-k} = n x (x+y)^{n-1}$$

- (2) $2 \cdot 1 \cdot {}_n C_2 + 3 \cdot 2 \cdot {}_n C_3 + \cdots + k(k-1) {}_n C_k + \cdots + n(n-1) {}_n C_n$ を計算せよ。

- 【20】 (1) $\sum_{k=1}^n (x+1)^k$ を x についての多項式に整理したときの x^2 の係数を求めよ。
- (2) $\sum_{k=1}^n (x+2)^k$ を x についての多項式に整理したときの x の係数を求めよ。

第 8 回

【29】 2つのサイコロ A, B を投げて出た目をそれぞれ a, b とし, 行列

$$C = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & -b \end{pmatrix} \text{ を考える。}$$

- (1) C が逆行列 C^{-1} をもつ確率を求めよ。
- (2) C^{-1} が自然数を成分とする行列である確率を求めよ。

【30】 5個の白球と8個の赤球がはいっている箱から4個の球をとり出すとき, 赤球が1個だけふくまれる確率は , 2個ふくまれる確率は 。したがって, 赤球が1個もしくは2個ふくまれる確率は , また赤球が少なくとも1個ふくまれる確率は 。

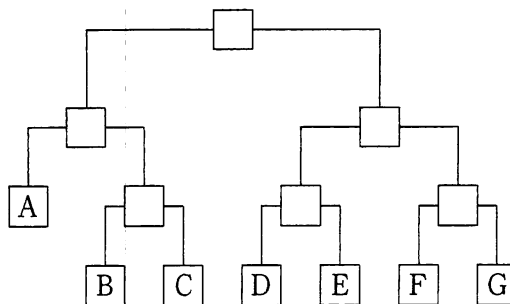
【31】 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の番号のついた札が4枚ずつ入った箱がある。この箱からでたらめに札を3枚取り出して、出た順にならべて3桁の数をつくるとき、この数が534より大きくなる確率を求めよ。

【32】 サイコロをふって出た目の数だけ原点より出発して数直線上にコマを進める。1回目は正の方向に、2回目は負の方向に、3回目は正の方向に、4回目は負の方向に動くものとする。このとき

- (1) 2回目に原点にもどる確率は $\frac{7}{21}$ である。
- (2) 3回目に原点にもどる確率は $\frac{7}{21}$ である。
- (3) 4回目に原点にもどる確率は $\frac{7}{21}$ である。

第9回

【33】 右の表は、テニスの試合のトーナメント表である。シードA, B, C, D, E, F, Gの決定は抽選による。また出場者全員が互いに相手に勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。ある出場者が



- (1) 一回戦は不戦勝で、優勝する確率を求めよ。
- (2) 一回戦を戦って、優勝する確率を求めよ。
- (3) このトーナメントで優勝する確率を求めよ。

【34】 1回の試行によって起こる2つの事象A, Bに対して $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$ で、

$P_A(B) = \frac{1}{3}$ である。このとき $P(A) = \square$

さらに、AとBが独立であれば $P(A \cup B) = \square$ 。ただし、事象 \bar{A} に対し、Aはその余事象、 $P(A)$ はAの起こる確率、 $P_A(B)$ はAが起こったときBが起こる条件付き確率を表す。

【35】 当たりとはずれのくじが5本ずつ計10本はいた箱がある。当たりくじを引いた人は持ちさるが、はずれくじの人は箱にもどしてしまうものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2人目の人が当たる確率を求めよ。
- (2) 2人目と3人目の2人が共に当たる確率を求めよ。
- (3) 2人目の人が当たったとき、3人目の人の当たる確率を求めよ。

【36】 甲、乙2人で、それぞれの勝つ確率が下表に示されるゲームを続けて行う。甲、乙のどちらか一方が続けて2度ゲームに勝ったとき試合は終了し、2度続けて勝った者が試合の勝者となる。このとき、次の問いに答えよ。

	第1回目の ゲ ー ム	甲が勝った 次のゲーム	乙が勝った 次のゲーム
甲の勝つ確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
乙の勝つ確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$

- (1) 3回以内のゲーム数で試合が終了する確率を求めよ。
- (2) 4回のゲームで試合が終了したことがわかっている。このとき、甲が勝者となっている確率を求めよ。
- (3) 甲、乙のどちらかが試合に勝つ確率が大きいかを調べよ。

第10回

【37】 1枚の硬貨を続けて投げる。表の出た回数が4または裏の出た回数が4
になったところで投げることをやめる。このとき、

- (1) 4回投げてやめにならないで、5回投げてやめることになる確率を求めよ。
- (2) 5回投げてやめることにならない確率を求めよ。

【38】 原点Oから出発する点Pがある。サイコロを振って、偶数の目が出たら
点Pをx軸の正の方向に1だけ動かし、奇数の目が出たらy軸の正の方向
に1だけ動かす。サイコロを8回続けて振ったとき

- (1) 点Pの到達する確率が最も大きい点 P_0 の座標と、その確率 Q_0 を求めよ。
- (2) 点Pが円 $x^2 + y^2 = 16$ の内部にある確率Qを求めよ。

【39】 ある工作機械が2日連続して故障する確率は $\frac{1}{3}$ 、2日は連続して故障しない

確率は $\frac{1}{2}$ である。今日、この機械は故障した。

- (1) 4日後この機械が故障しない確率を求めよ。
- (2) 5日後この機械が故障しない確率を求めよ。

【40】 A君は日記をなるべくつけるようにした。日記をつけた日の翌日は確率

$\frac{2}{3}$ で日記をつけ、日記をつけなかった日の翌日は確率 $\frac{5}{6}$ で日記をつけてい

るという。初日に日記をつけたとして、第 n 日に日記をつける確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $p_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} p_n$ である。

(2) p_n を求めると $p_n = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \left(-\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} \right)^{n-1}$ である。

第11回

- 【41】 片面が白、もう一方の面が黒のカード6枚を、白の面を表にして横1列に並べておく。この状態から始めて、「さいころを振り、 n の目が出たら、左から n 番目のカードを裏返す」という操作を考える。この操作を続けて4回行った後で、黒の面が k 枚出ている確率を $p_k (0 \leq k \leq 6)$ とすると、

$$p_0 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad p_2 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},$$

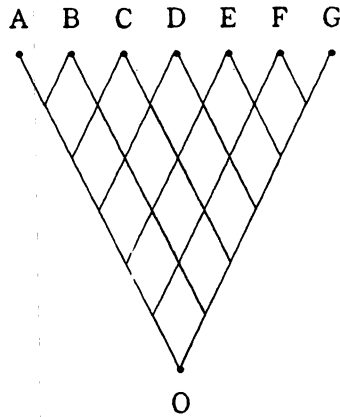
$$p_3 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \quad p_4 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}, \quad p_5 = p_6 = 0$$

である。したがって、黒の面が出ているカードの枚数の期待値 E は

$$E = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ で与えられる。}$$

- 【42】 右図の点Oから出発し、公正な銅貨を投げて、表なら斜め右上へ、裏なら斜め左上へひとつずつ進むものとする。

1. 点Dに到達する確率を求めよ。
2. 点Dに線分ODより左側には行かずに到達する確率を求めよ。
3. 点Dに到達すれば、得点5、点B、C、E、Fのいずれかに到達すれば、得点-1、点Aまたは点Gに到達すれば、得点10がえられるとする。得点の期待値(平均)を求めよ。



【43】 $k = 1, 2, \dots, n$ のいずれかの値をとる確率変数 X について, $X = k$ となる確率が $a \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ であるとする (a は定数), 次のものを n と a の式で表せ。

(1) $s = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(2) X の平均 $E(X)$

(3) X の分散 $V(X)$

【44】 次の問いに答えよ。

(1) $1, 2, \dots, n$ の n 個の値を等しい確率でとる確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

(2) $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ の n 個の値を等しい確率でとる確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。

(3) (2)において, $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Y)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} V(Y)$ を求めよ。