

目 次

1. 三角関数	2
2. 指数関数・対数関数	6
3. 数 列	8
4. 微 分 法	14
5. 積 分 法	18

§ 1 三角関数

【1】 次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$

(2) $\sin 5^\circ \sin 125^\circ + \sin 5^\circ \sin 245^\circ + \sin 125^\circ \sin 245^\circ$

【2】 $A + B + C = 2\pi$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

【3】 次の方程式を解け。

(1) $\cos 2\theta = \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

(2)
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x < 2\pi, \quad 0 \leq y < 2\pi)$$

【4】 次の不等式を解け。

(1) $\sin \theta < \sin 3\theta$ を解け。ただし、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$

(2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x < \sqrt{2} \quad (0 \leq x < \pi)$

【5】 次の問いに答えよ。

- (1) $y = 4 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$ の最大値, 最小値を求めよ。
- (2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $\sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$ の最大値, 最小値を求めよ。

【6】 x に関する方程式 $2 \sin x + \cos 2x - a = 0$ (ただし, $0 \leq x < 2\pi$) は,
 $a = \pi$ のとき, 異なる3個の実数解をもち, 1 $< a < \pi$ のとき,
異なる4個の実数解をもつ。

【7】 α を $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ をみたす定数とし、実数 x の関数

$$f(x) = \sin x + \sin(x - \alpha) + \sin(x - 2\alpha)$$

について

- (1) k を適当な定数として、 $f(x) = k \sin(x - \alpha)$ と表せることを示せ。
- (2) $f(x)$ の最大値を $M(\alpha)$ とするとき、 $1 \leq M(\alpha) \leq 2$ であるために α のみたすべき条件を求めよ。

【8】 平面上において A, B を 2 定点とする。点 P が $\angle APB = \alpha$ (一定) となるように動くとき、 $AP + BP$ の最大値を α と線分 AB の長さ l を用いて表せ。

§ 2 指数関数・対数関数

【9】 $A = \log_4(\log_3 4)$, $B = \log_3(\log_4 3)$, $C = \log_4(\log_4 3)$ のとき

- (1) $A + C$ の値を求めよ。
- (2) 大小の順を定めよ。

【10】 次の方程式・不等式を解け。

- (1) $\log_{\sqrt{2}}(2-x) + \log_2(x+1) = 1$
- (2) $(\log_4 x)^2 = \log_2 8x$
- (3) $\log_{a^2} 4x \leq \log_a(3-x)$

【11】 不等式 $\log_2 y^2 + \log_2 x^2 \geq 5$ を満たす点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ。

【12】 実数 a, α, β の間に $\alpha\beta = 10^8$, $(\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta) = a^2 - 6a$ なる関係がある。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $K = \alpha^A \cdot 10^B$, ただし $A = \log_{10} \beta$, $B = b^2 + ab$ (b は実数) とする。
 a と b が独立に変化するとき, K の最小値を求めよ。

§ 3 数 列

【13】 次のような2つの等差数列がある。

$$A: 2, 5, 8, 11, \dots, 899$$

$$B: 10, 18, 26, 34, \dots, 802$$

- (1) AとBとに共通にふくまれる数は、初項 、公差 の等差数列
- (2) その数列の末項は
- (3) その数列のうちで、最小のものはAおよびBのそれぞれ第 項および第 項で、最大のものはAおよびBのそれぞれ第 項および第 項
- (4) AとBとに共通にふくまれる数列の和は

【14】 等比数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 について、

$$a_1 + a_5 = 738, \sum_{i=1}^5 a_i = 1089, a_i > a_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

が成り立つとすれば、 $a_1 = \text{}$, $a_2 = \text{}$, $a_3 = \text{}$,

$a_4 = \text{}$, $a_5 = \text{}$ である。

【15】 数列 a_1, a_2, \dots, a_{10} は等差数列で、その和は10、各項の2乗の和は340である。

- (1) 数列の初項と公差を求めよ。
- (2) この等差数列の異なる2項の積の総和を求めよ。

【16】 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ のはじめの n 項の和 S_n は $n^3 - 2n^2 + 3n$ である。

- (1) a_n ($n \geq 1$) を求めよ。
- (2) この数列の奇数項だけからなる数列 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$ のはじめの n 項の和 T_n を求めよ。

- (3) $b_k = \frac{1}{k+1} T_{k+1} - a_{k+1}$ ($k \geq 1$) とするとき、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

【17】 分数を次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

- (1) $\frac{18}{25}$ は初めから数えて第何項目にあるか。
- (2) 初めから数えて第666項目にある分数は何か。
- (3) 初項から第666項目までの和を求めよ。

【18】 数列 a_1, a_2, a_3, \dots を次のように定める。

$$a_1 = 1, a_2 = a_3 = 2, a_4 = a_5 = a_6 = 3, \dots$$

- (1) 与えられた自然数 n に対して、 $a_i = n$ となるような i の範囲を求めよ。
- (2) m を自然数とするとき、この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ。

【19】 すべての自然数 n についての次の不等式を証明せよ。

(1) $3^n > n^2$

(2) $n(n+1)\frac{\log_{10} 3}{4} > \log_{10} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

【20】 任意の自然数 n に対して次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

【21】 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \sin^2 \theta + \frac{3}{2} \cos 2\theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) すべての n について $a_n < a_{n+1}$ となるような θ の範囲を求めよ。

【22】 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1, a_2 = 6, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$ を満たす。

(1) a_n を a_{n-1} で表せ ($n \geq 2$)。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

【23】 $x_1=11, y_1=1, x_{n+1}=6x_n+5y_n, y_{n+1}=x_n+2y_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がある。

- (1) 数列 $\{x_n-5y_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

【24】 a, b を整数, n を正の整数として $(a+\sqrt{2}b)^n=p_n+\sqrt{2}q_n$ とおく。ただし, p_n, q_n は整数とする。

このとき $(a-\sqrt{2}b)^n=p_n-\sqrt{2}q_n$ であることを数学的帰納法を用いて示せ。

§ 4 微 分 法

【25】 次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$ が成り立つような整式 $f(x)$ のうち、
次数が最も低いものを求めよ。

- (2) 関数 $f(x) = \frac{3ax^2 - (a-3)x - 1}{ax^2 - (3a^2-1)x - 3a}$ について、

(ア) $a = \frac{1}{\boxed{}}$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ は存在しない。

(イ) $a = \boxed{}$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{8}$ である。

(ウ) $a = \frac{1}{\boxed{}}$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x)$ は正の数であり、その値は $\boxed{}$ である。

【26】 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は $|x| \leq 1$ で $|f(x)| \leq 1$ をみたしている。

- (1) $|f'(1)| \leq 4$ を示せ。
(2) $|f'(1)| = 4$ となる $f(x)$ をすべて求めよ。

【27】 放物線 $y = x^2$ の上に異なる2点 $A(s, s^2)$, $B(t, t^2)$ をとる。それぞれの点における接線の交点を C とし, $\triangle ABC$ の重心を P とする。

(1) P の座標を求めよ。

(2) A, B がこの放物線上を動くとき ($A \neq B$), P の存在する範囲を xy 平面上に図示せよ。

【28】 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ただし $a > 0$) において,
 $f'(x) = 0$ が相異なる2実数解 α, β (ただし $\alpha < \beta$ とする) をもつとき,
 $f(x)$ の極大値と極小値の差は $(\beta - \alpha)^3$ の π 倍に等しい。したがって,
関数 $x^3 - x^2 - x$ の極大値と極小値の差は 4 である。

【29】 $f(x) = x^3 + x - 1$ とする。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は、ただ1つの実数解 α をもち、 $0 < \alpha < 1$ であることを示せ。

(2) 正の数 β が、 $\beta^4 + \beta - 1 = 0$ をみたすならば、 $\alpha < \beta$ であることを示せ。

【30】 4次関数 $f(x) = x^4 + 2px^2 + 4qx$ が極大値をもつような実数 p, q の範囲を求めよ。

【31】 点 $A(2, a)$ を通して, 曲線 $y = x^3$ に3本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

【32】 任意の x に対して, 不等式 $\cos^3 x - \sin^3 x + \cos x - \sin x + \sin x \cos x \leq 2$ がなりたつことを証明せよ。

§ 5 積 分 法

【33】 整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が任意の2次式 $g(x)$ に対して,

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0 \text{ をみたしている。このとき } a, b, c \text{ を求めよ。}$$

【34】 等式 $f(x) = 30x + x^2 \int_0^1 g(x)dx$, $g(x) = 30x^2 + x \int_0^1 f(x)dx$ を

みたす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めると, $f(x) = \boxed{}x^2 + 30x$, $g(x) = 30x^2$
 $+ \boxed{}x$

【35】 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとき、次の問いに答えよ。

$$f(x) = \int_0^1 (t+x) |t-x| dt$$

- (1) 定義域を $0 < x < 1$ として、 $f(x)$ を計算せよ。
- (2) (1)の場合について、 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) 定義域を $0 \leq x \leq 2$ として、 $f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (4) (3)の場合について、 $\int_0^2 f(x) dx$ を計算せよ。

【36】 $f(x) = x^2(x+1)$ とする。2次関数 $g(x)$ は $g(-1) = f(-1)$,
 $g(1) = f(1)$, $g(a) = f(a)$ をみたす。ただし、 a は実数で、 $|a| < 1$
である。

- (1) $S(a) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$ を求めよ。
- (2) $S(a)$ の最小値を求めよ。

【37】 次の問に答えよ。

- (1) 次の公式を証明せよ。ただし、 α, β は実数とする。

$$-\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

- (2) 点(2, 4)を通り、傾きが a である直線の方程式を求めよ。
- (3) (2)で求めた直線と曲線 $y = (x-1)^2 + 2$ とが囲む図形の面積 S を求めよ。
- (4) (3)で求めた面積 S が最小となるような傾き a を求めよ。

【38】 曲線 $C: y = |x^2 - 3x| - x$ と直線 $l: y = mx$ は原点以外に2つの交点をもっているとする。このとき

- (1) m の値の範囲を求めよ。
- (2) C と l とで囲まれた2つの部分の面積が等しくなる m を求めよ。

【39】 曲線 $C: y = x^3 - x$ 上の点 P における接線が l 、 P の x 座標 a は正である。

- (1) l が C と再び交わる点を Q 、 y 軸と交わる点を R とする。線分 PR の長さを L_1 、線分 RQ の長さを L_2 とするとき、比 $L_1 : L_2$ を求めよ。
- (2) C と l とで囲まれた図形において、 y 軸の右側にある部分の面積を S_1 、 y 軸の左側にある部分の面積を S_2 とする。比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

【40】 4次曲線 $C: y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4$ について

- (1) 曲線 C 上の点 $A(2, -8)$ における接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 直線 l は A 以外の点 B において曲線 C に接している。 B の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 l によって囲まれた部分の面積を求めよ。

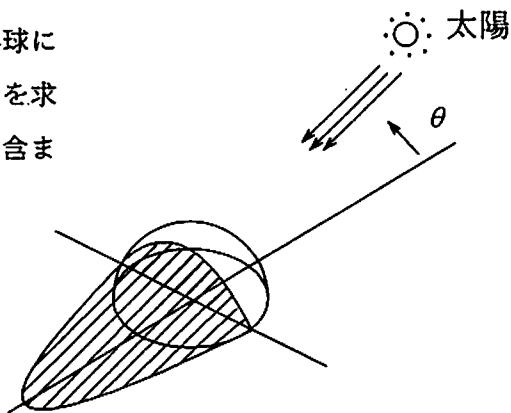
【41】 (1) だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) において2点 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$

をとる。線分 AB 上に動点 P をとり、 P を通って y 軸に平行な直線を考える。この直線からだ円によって切りとられる線分を QR とする。 QR を1辺とする正三角形 QRS を xy 平面に垂直にたてる。点 P を A から B まで動かしたとき、 $\triangle QRS$ が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

(2) $a > 0$, $b > 0$ が $a + b = 6$ の関係式をみたすとき、(1)で求めた V を最大にする a とそのときの V の値を求めよ。

【42】 半径 r の半球が地平面にある。

太陽が仰角 θ のとき、この半球によりひかげになる部分の体積を求めよ。ただし、半球の内側は含まない。



- 【43】 (1) $a > 0$ とする。直線 $y = ax$ と放物線 $y^2 = a^2x$ とで囲まれる図形を x 軸, y 軸のまわりにそれぞれ回転してできる 2 つの回転体の体積を求めよ。
- (2) (1) で求めた 2 つの回転体の体積が等しくなるような a の値を定めよ。

- 【44】 放物線 $y = x^2$ を y 軸の周りに回転してできる曲面があり, y 軸が水平面に垂直で y 軸の正の部分が上方にあるようにおいてある。その曲面の中に半径 r ($r > \frac{1}{2}$) の球を落とし込む。このとき, この回転面と球面とで囲まれた部分の体積を求めよ。