

< 論理的に考えようの記号 >

- (1) \Rightarrow の説明をせよ。
- (2) \Leftrightarrow の説明をせよ。
- (3) 背理法による証明とは。

< 数と式 >

- (4) 次の関係を図示せよ。
- (7) $Z \in X$ (1) $X \subseteq Y$ (2) $X \cup Y$
- (8) $X \cap Y$ (3) \bar{X} (or $U - X$)
- (5) N, Z, Q, R, C と $R[x]$ の名前と包含関係を図示せよ。

- (6) 集合 X が演算 α について閉じているとは? 具体例を示せ。
- (7) ベキ乗 x^n の定義と性質を4つかけ。
- (8) 絶対値の定義をかけ。
- (9) 平方根 \sqrt{a} の定義をかけ。

(10) 2乗根号 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \square$

(11) $a, b \in R$ とし、 $a + bi = 0 \Leftrightarrow \square$

(12) X の n 次の整式 (多項式) とは?

(13) 展開計算の基本は?

(14) 因数分解の基本は?

(15) 記憶すべき等式とは?

① $(a \pm b)^3 =$ ② $a^3 - b^3 =$

③ $(a + b + c)^2 =$

④ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) =$

⑤ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

⑥ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) =$

(16) 整式において、倍教・約教、公倍教・公約教、最小公倍教 (L.C.M.)

最大公約教 (G.C.H.) の定義は?

(17) 互いに素とは、どういうことか。

(18) 除法の原理をのべて。

(19) 因数定理をのべて。

(20) 分教式の計算の Points は?

(21) 連比 $a:b:c (= x:y:z)$ の定義と計算のテクニックは?

(22) P 進法 $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ とは 10 進法で \square である。

(23) 対称式とは何か?

(24) 対称式についての定理は?

< 方程式と不等式 >

(25) 1次方程式 $ax + b = 0$ の解は?

(26) ① $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式は。 ② $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式は?

(27) 2次方程式の解の判別をかけ。

(28) 2次方程式の解・係数・因数分解の関係をかけ。

(29) (和) と (積) のわかっている2数は、2次方程式 \square の2解である。

(30) 高次方程式の解き方は?

(31) 相反方程式とその解法は?

(32) $x^2 = 1$ の解 (1の2乗根) と性質は?

(33) 方程式とグラフの関係とをのべて。

(34) 無理方程式の解法は?

(35) 連立方程式の解法は?

(36) $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつ必要十分条件は。

(37) 3次方程式の解・係数・因数分解の関係とかけ。

(38) (和) と (積の和) と (積) のわかっている3数は、3次方程式 \square の解である。

(39) 不等式の (一般的) 解法は?

(40) 分教不等式の解法は?

(41) 無理不等式の解法は?

< 関数とグラフ >

(42) 関数のグラフの書き方をいへ。

(43) 1次関数 $y = ax + b$ のグラフは?

(44) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは? 標準形をかくて示せ。

(45) $y = f(x)$ と Z 軸上の P , Y 軸上の Q が平行移動した関数は \square 。

(46) 分教関数 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0$) の標準形は? グラフは?

(47) 無理関数 $y = \sqrt{ax + b} + c$ ($a > 0$) のグラフは?

(48) $y = f(x)$ の逆関数の求め方をいへ。また、注意する点は何か?

(49) 合成関数とは?

(50) $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$ のグラフは? また、その応用は?

(51) 絶対値のついた関数の扱いは?

< 式と証明 >

(52) 恒等式とは何か?

(53) 未定係数法の原理をのべて。

(54) 記憶すべき不等式 (絶対不等式)

① 相加相乗平均

② シュワルツの不等式

③ 三角不等式

(55) 不等式の証明の方法は?

(56) 命題とは何か?

(57) $P \Rightarrow Q$ の逆、裏、対偶の図式をかけ。

(58) 必要・十分条件について証明せよ。

(59) \sqrt{a} は無理数であることを証明せよ。

毎日10分の努力が合格への道

< 平面図形と式 >

以下では、 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x, y)$ とす。

(61) 2点 A, B の距離は、 $AB = \square$ 。

(62) 線分 AB を $m:n$ に分ける点 P の座標は？ (円分、外分)

(63) 線分 AB の中点 M は？

(64) $\triangle ABC$ の重心 G は？

(65) 直線系の方程式の一般形をかけ。

(66) 点 $A(x_1, y_1)$ を通り、傾き m の直線は？

(67) 2直線 $y = m_1x + n_1, y = m_2x + n_2$ の関係を調べよ。

② (68) 点 $A(x_1, y_1)$ から直線 $ax + by + c = 0$ へ下した垂線の長さ (距離) d は？

(69) $\triangle OAB$ の面積は？

(70) 円の方程式の一般形をかけ。

(71) 中心 (a, b) , 半径 r の円の方程式は？

(72) (71) の円上の点 (x, y) における接線の方程式をかけ。

(73) 円の接線の性質を2つかけ。

(74) 2曲線 $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ について、

① 2曲線が共有点をもつ \Leftrightarrow

② 2曲線が接する \Leftrightarrow

③ 2曲線の交点を通る曲線(群)の方程式をかけ。

(75) 曲線 $f(x, y) = 0$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q 平行移動した図形は？

(76) 媒介変数表示とは？

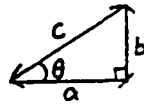
(77) 軌道線の求め方は？

(78) 不等式の表す領域の図示のし方は？

(81) $(y-x)^2(x^2+y^2-1) \geq 0$ の表す領域を図示せよ。

< 三角比 >

(79) $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ をいえ。



(80) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の三角比を求めるには、どんな直角 \triangle をかくか。

(81) 三角関数の定義をいえ。

(82) $\sin(180^\circ - \theta) = \square, \cos(180^\circ - \theta) = \square$ 。

(83) $\sin(90^\circ \pm \theta) = \square, \cos(90^\circ \pm \theta) = \square$ 。

(84) $\tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$ の関係は？

(85) $\cos \theta, \sin \theta$ の関係は？

(86) $\cos \theta, \tan \theta$ の関係は？

(87) 三角形に関する因式をかけ。

(88) 正弦定理をかけ。

(89) 余弦定理をかけ。

(90) 三角形の形状決定問題の解法をいえ。

(91) 三角形の面積 S を求める式を4つかけ。

< 整数値問題は >

(92) 2次方程式の整数解の求め方は？

② (93) $ax + by = 1$ (a, b は互いに素) の整数解の求め方は？

(94) $2x + 3y = 1$ の整数解の求め方を示す。

わかれてもいい。毎日10分

くり返しよう!

< memo >

(51) 最大値+問題の4 points をかけ

(52) 11° ② (1)

数I基本70問の解答

<論理的に考えるための記号>

(1) $P \Rightarrow Q$ (P ならば Q) とは、

P を仮定すれば Q が導かれること

(十分) \Rightarrow (必要)

(2) $P \Leftrightarrow Q$ (P, Q は同値、必要十分)

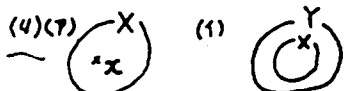
とは、 P と Q は真理はどちらか同じ内

をたもつことを表す。 $P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$

(3) $P \Rightarrow Q$ を証明する方法は、

P のとき Q を仮定して矛盾を導く

<数と式>



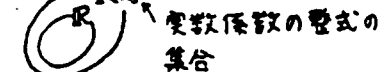
X は X の要素 X は Y の部分集合



和集合 共通部分 X の補集合



自然数の集合



変数係数の整式の集合

(6) 任意の $x, y \in X$ に $xy \in X$.

(例) Z は $+, -, \times; Q, R, C$ は四則;

$R[x]$ は $+, -, \times$ について閉じている。

(7) $X^n = X \cdot X \cdots X$ (n 個の積)

① $X^m \cdot X^n = X^{m+n}$ ② $\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$

③ $(X^m)^n = X^{mn}$ ④ $X^m \cdot Y^n = (XY)^n$

(8) $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

(9) $X^2 = a$ の解を $\pm\sqrt{a}$ とかく。

(注) ① $a \geq 0$ のとき、 \sqrt{a} は正の実数

② $a < 0$ のとき、 $\sqrt{a} = \sqrt{-a} i$ 虚数

(10) $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

$\left. \begin{matrix} (x, y \text{ は } (和) x+y=a \\ (積) xy=b \end{matrix} \right\} \text{と} \exists x, y$
($x > y$)

(11) $a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

(12) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
($a_n \neq 0$) の3形の式

(13) 同次数項ごとに計算する。

(14) ① 共通因数くくり出し。

② 最低次数の1文字についてせいり。

(3次以上の場合)

③ 因数定理の利用

④ (ほじり) = t とおく。置換

⑤ (4次) 2束の差をつくる。

(例) $x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$
 $= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

(15) ① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

② $a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a \mp b)$

③ $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

④ $\frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

⑥ $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2$

(16) $P(x) = A(x)Q(x)$ のとき、 $P(x)$ は

$A(x)$ の倍数、 $A(x)$ は $P(x)$ の約数。

Z 以上の整式に共通の約数(約

数)を公倍数(公約数)といい、

初内次数の最小(最大)のものを

最小公倍数(最大公約数)という。

(17) 2つの整式で1次以上の公約数

があるものを互いに素という。

(18) 整式において、

$P(x) \in A(x)$ を割り、 $Q(x)$ 、余り $R(x)$

$\Leftrightarrow P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$

($R(x)$ の次数 $<$ ($A(x)$ の次数)

(注) ① $A(x) = 0$ の解を代入する。

② 重解のときは倍分の利用

(1) $f(x) = 0$ (i.e. $x=a$ は $f(x)=0$ の解)

$\Leftrightarrow f(x) = (x-a)g(x)$ と因数分解できる。

(20) ① (分子の次数) $<$ (分母の次数) とせよ。

② 部分分数に分ける。 $(x-\frac{a}{2}) \cdot x$

③ はし分数の計算(例) $(i-\frac{x}{2}) \cdot x$

(21) $a:b:c = x:y:z$

$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} (=t \text{ とおく (7)})$

(22) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

(23) どんな2文字の入れかえをしても変化しない式。(例. $x^2+y^2, a^2+b^2+c^2$)

(24) 対称式は基本対称式で表せる。

基本対称式 (3変数)

和	$x+y+z$
積	xyz
和の2乗	$x^2+y^2+z^2$
積の2乗	$xy^2+yz^2+zx^2$

<方程式と不等式>

(15) $ax+b=0$ $\begin{cases} a \neq 0 \text{ (唯一解)} \\ a = 0 \begin{cases} b = 0 \text{ (不定解)} \\ b \neq 0 \text{ (無解)} \end{cases} \end{cases}$

(16) ① $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, D = b^2 - 4ac$

② $x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a}, D' = b'^2 - ac$

(27) 相異なる2実数解 $\Leftrightarrow D > 0$

重根(実数)解 $\Leftrightarrow D = 0$

共役な2虚数解 $\Leftrightarrow D < 0$

(28) 実数解 $\Leftrightarrow D \geq 0$

(29) $aX^2+bX+c=0$ ($a \neq 0$) の解が α, β

$\Leftrightarrow aX^2+bX+c = a(X-\alpha)(X-\beta)$ と因数分解できる。

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (解と係数の関係)
☆ 両辺を乗算して係数と比較する

(29) $t^2 - (和)t + (積) = 0$

(30) ① 因数定理の利用

② (ほじり) = t とおく。置換

(31) $ax^2+bx^2+cx^2+bx+a=0$ ($a \neq 0$)

左右対称の係数

【解法】 $x \neq 0$ を明記し, $x+\frac{1}{x}=t$ とおく

(32) 1の3乗根は, $1, \omega, \omega^2$

(性質) ① $\omega^3=1$ ② $\omega^2+\omega+1=0$

(33) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 (重複解)

且 $y=f(x)$ のグラフと x 軸 ($y=0$) との交点 (接点) の x 座標である。

(34) ① (両辺) ≥ 0 のとき, 両辺2乗

② ($\sqrt{\quad}$ の中) ≥ 0 , ($\sqrt{\quad}$ 外側の) ≥ 0 に

(35) (未知数(文字)の数) = (式の数) に注意して, 1文字消去

(36) $ad-bc=0$ ② $ax=0+x+0$ の解を t と $\Leftrightarrow ax=0$

(37) $ax^2+bx^2+cx+d=0$ ($a \neq 0$) の解 α, β, γ

$\Leftrightarrow ax^2+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

と因数分解できる。

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$ (解の係数関係)

(38) $t^2 - (初) t^2 + (積) t - (積) = 0$

(39) 与不等式を (因数分解した式) と変形し, 次の原則で $y=(左辺)$ のグラフを

かく。① 最高次の係数 \Rightarrow 右より Start
② () は接し, () は交わる。

(40) (符号) を両辺にかける, (右側) $\neq 0$ を併加

(41) 無理式を不等号の一方の辺に含めず
して, $y=(左辺)$ と $y=(右辺)$ のグラフをかく。

③ 不等式 $f(x) \geq 0$ の解は, $y=f(x)$ のグラフと x 軸 ($y=0$) 上にある部分の x の範囲である。

< 関数とグラフ >

(42) グラフの概形を覚えておく, 適当な点をとりかく。

(43) 傾き a , y 軸切片 b の直線

(44) $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a}$, 軸 $x=-\frac{b}{2a}$

頂点 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ の 2乗関数

($a > 0$ のとき下向き凸, $a < 0$ のとき上向き凸)

(45) $y-g=f(x-p)$ ① $(x-p)=t$ とおく

(46) $y=\frac{k}{x-p}+g$ ① 通分して

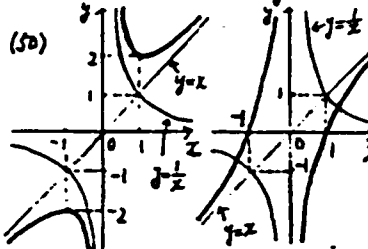
漸近線 $x=p, y=g$

(47) 2乗関数の平方の概形をかき

(48) ① x, y を入れかえる (変域) ②

② y を x と解く ($y=g$ の形)

(49) $y=f(g(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(z) \\ z=g(x) \end{cases}$ の解



($y=x+\frac{1}{2}$) ($y=x-\frac{1}{2}$)

(応用) $x+\frac{1}{x}=t$ と置換すると,

t の変域は $\begin{cases} x > 0 \text{ のとき } t \geq 2 \\ x < 0 \text{ のとき } t \leq -2 \end{cases}$

(51) (7) 全体に1-1対応しているとき,

$y=f(x)$ のグラフは, $y=f(x)$ のグラフで $y < 0$ の部分を x 軸から折り返して

して2つ。

(1) 部分的に1-1対応しているとき,

1-1の定義により場合分けする。

(52) () を整数に変形し, 表をつくる。

(53) 特殊解を1つ求めて代入した式を与式からひく。

< 式と証明 >

(52) 等式 $f(x)=g(x)$ が x の恒等式 \Leftrightarrow 任意の x に対して等式が成立 ($f(x)=g(x)$ とかく。)

(53) $f(x), g(x)$ を n 次以下の整式とすると

$f(x) \equiv g(x)$

\Leftrightarrow 相異なる $(n+1)$ 個の x の値に対して, $f(x)=g(x)$ が成立。

$\Leftrightarrow f(x), g(x)$ の各次数の係数がすべて等しい。

(54) ① $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (等号条件 $a=b$)

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (等号条件 $a=b=c$)

② $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

(等号条件 $a:b=c:x:y$)

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

(等号条件 $a:b:c=x:y:z$)

③ $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

(等号条件: (左側) $x, y \geq 0$, (右側) $x, y \leq 0$)

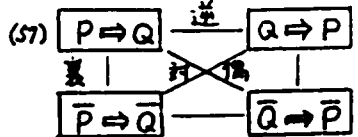
(55) ① (左側) $-(右側) \geq 0$ を示す。

② (両側) ≥ 0 を示す, (左側) $-(右側) \geq 0$ を示す。

③ (4) の絶対不等式を利用する。

④ グラフをかくて調べる。重要

(56) 真・偽の定まっている文 (主張)



(57) $P \Rightarrow Q$ が成立するとき,

{ P は Q のための十分条件, Q は P のための必要条件 } という。

(58) $P \Leftrightarrow Q$ が成立するとき,

P, Q は必要十分条件であるという。

(60) $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ (既約分数) として, 平方

(p, q は互いに素) を導く。

Handwritten notes at the bottom left, including some calculations and diagrams.

<平面図形と式>

(61) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(62) $P \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$

($mn > 0$ - 同分, $mn < 0$ - 外分)

(63) $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

(64) $G \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

(65) $ax + by + c = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

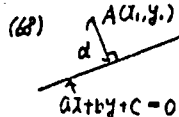
(66) $y - y_1 = m(x - x_1)$

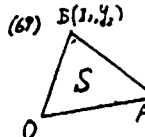
(67) ① 一致である $\iff m = m', n = n'$

② 重なる平行 $\iff m = m', n \neq n'$

③ 直交する $\iff m \cdot m' = -1$

④ 交わる $\iff m \neq m'$

(68)  $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

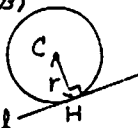
(69)  $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$

(70) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

(71) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

(72) $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

(73) ① $CH \perp$ (接点) ② $CH =$ 半径 r



(74) ① 連立して得る2次方程式の $D \geq 0$ の場合は図をかき、中心間の距離と半径の和差の関係を調べよ。

② 接点にて、接点を共有する $\iff D = 0$

③ $f(x,y) + g(x,y) = 0$ (k:定数)

(75) $f(x-p, y-q) = 0$

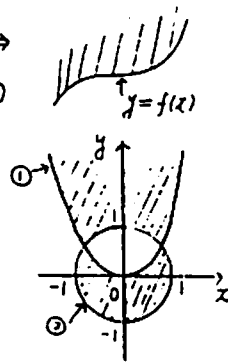
(76) 曲線の方程式を t を媒介として、 $x = f(t), y = g(t)$ (たのまて) と表す。

(77) 軌跡を S とする動点 $E(x, y)$ とおき、条件より $\boxed{X, Y \in S}$ の関係式を示す。(軌跡の方程式)

(78) ① 不等号を等号にして、境界線をかく。(含むか否かを明示せよ)




② 境界線で区切られた各部分内の適当な点を代入して成り立つものは、その部分を領域である。




③ $y \geq f(x) \iff$ (グラフの上側)

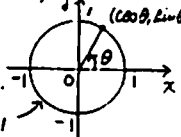


(例の解) 境界線は $\begin{cases} y = x^2 & \text{--- ①} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{--- ②} \end{cases}$ (①, ②を含む)

<三角比>

(79)  $\sin \theta = \frac{b}{c}$  $\cos \theta = \frac{a}{c}$  $\tan \theta = \frac{b}{a}$

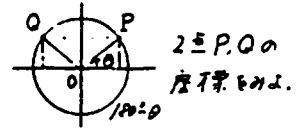
(80)  45°  30°  60°

(81) $(\cos \theta, \sin \theta)$ は単位円周上の点である。 $x^2 + y^2 = 1$ 

$\triangle O\theta$ の公式

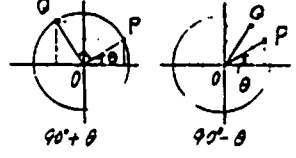
(82) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$



(83) $\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos \theta$

$\cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$



(84) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(85) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

(26) (85) の両辺を $\cos^2 \theta$ により $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

(87) R, r
 $\boxed{\text{正弦定理}} - \sin \theta$ (1種)
 $\boxed{\text{余弦定理}} - \cos \theta$ (内種)

(88) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(89) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$ (大文字)

(90) (87) を用いて、辺 a, b, c の関係式を導く。

[直角 $\triangle \iff a^2 = b^2 + c^2$ etc]

(91) $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ ($= \frac{1}{2} ac \sin B$)

$S = \frac{abc}{4R}$ (外接円)

$S = ar$ (内接円)

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$