

代数・幾何(定理プリント) 平面・空間のベクトル

〔定理1〕(一直線上にあることの証明)

$\triangle ABC$ の辺 AB を $1:2$ に内分する点を P , 辺 BC を $3:2$ に外分する点を Q , 辺 CA を $4:3$ に内分する点を R とするとき, 3点 P, R, Q はこの順に一直線上にあることを示せ.

〔定理2〕(三角形の重心) $\triangle ABC$ の重心を G とす

るとき, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ を示せ.

〔定理3〕(角の2等分線) $AB=3, AC=2$ なる

$\triangle ABC$ の頂角 A の2等分線と辺 BC との交点を D

とすると, $BD:DC = \square : \square$ より

$$\overrightarrow{AD} = \square \overrightarrow{AB} + \square \overrightarrow{AC}$$

〔定理4〕(点の位置) $\triangle ABC$ の内部の点 P は

$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ をみたす. AP の延長と辺 BC との交点を D とするとき,

$$\frac{AP}{PD} = \square, \quad \frac{\triangle PAB}{\triangle PCA} = \square$$

〔定理5〕(点の軌跡) 同一直線上にない3点 O, A, B と実数 x, y に対して,

$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P の存在範囲を次の各条件の基で図示せよ.

$$(1) 2x + 3y = 12$$

$$(2) x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

〔定理6〕(1次独立) $\triangle OAB$ の辺 OA, OB をそれ

ぞれ $3:2, 5:1$ に内分する点を P, Q とし, AQ と BP の交点を R , 直線 OR と辺 AB の交点を S とする.

(1) \overrightarrow{OR} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} で表せ.

(2) $AS:SB$ を求めよ.

〔定理7〕(外積となす角)

$\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (-2, -1, 1)$ のとき,

(1) \vec{a} と \vec{b} の両方に垂直な単位ベクトル \vec{e}

(2) \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ

をそれぞれ求めよ.

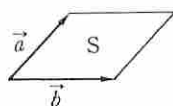
〔定理8〕(三角形の外心と垂心) $\triangle ABC$ の外心を

O として $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ とするとき, H はこの三角形の垂心であることを示せ.

〔定理9〕(垂直の証明) 四面体 $OABC$ において,

$OA \perp BC, OB \perp CA$ ならば $OC \perp AB$ であることを示せ.

〔定理10〕(面積) (1) 次を証明せよ.



$$S^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

(2) $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c), abc \neq 0$ のとき $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

〔定理11〕(シュワルツの不等式の応用) 実数 $x, y,$

z が $x + 2y + 3z = 14$ をみたすとき, $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ.

〔定理12〕(ベクトル方程式-I) 次の条件をみたす

図形のベクトル方程式を求めよ.

(1) 線分 AB

(2) 平行四辺形 $OABC$ の周及び内部

〔定理13〕(ベクトル方程式-II) 次の条件をみたす

点 P の集合(図形)を求めよ.

(1) $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

(2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 0$

代数・幾何(定理プリント) 空間図形

【定理1】(直線・平面・球面) 次の各々を証明せよ.

- (1) 点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り, 方向ベクトル $\vec{d}=(\ell, m, n)$ の直線の方程式は,

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

- (2) 点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り, 法線ベクトル $\vec{h}=(a, b, c)$ の平面の方程式は,

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

- (3) 中心 $C(a, b, c)$, 半径 r の球面の方程式は,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

【定理2】 次の各々の図形を求めよ.

- (1) 2点 $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ を通る直線.
 (2) 3点 $(1, 1, -1)$, $(0, 1, -3)$, $(4, 3, 1)$ を通る平面.
 (3) 2点 $(3, -1, 5)$, $(1, 3, 1)$ を直径の両端とする球面 S .

【定理3】(対称点と最短距離) 原点 O と定点 A

- $(-1, 1, 1)$ 及び平面 $x+2y+3z=7$ 上を動く動点 P がある. 距離 $OP+PA$ の最小値は \square .

【定理4】(交点となす角) 次の2直線 ℓ, m の交点 P の座標となす角 θ を求めよ.

$$\ell: x+5 = \frac{3-y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

$$m: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{2-z}{5}$$

【定理5】(点と直線の距離) 点 $A(1, -1, 3)$ から直線 $\ell: 3x+3=6(y-4)=-2z+16$ に引いた垂線の足を H とするとき, AH の長さを求めよ.

【定理6】(交線を含む平面-I) 点 $(1, 1, 1)$ を通り, 2平面 $x+y+2z+3=0$ と $2x-y+z-1=0$ の交線を含む平面を求めよ.

【定理7】(共通垂線) 2直線 $\ell: 2x=y=-2z+8$, $m: x+1=-y+3=2z$ について

- (1) ℓ と m はねじれの位置にあることを示せ.
 (2) ℓ と m の共通垂線の方程式及びその長さ(ℓ と m の距離の最小値)を求めよ.

【定理8】(正射影-I) 直線 $\ell: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = -z-1$

の平面 $\pi: x-2y-3z=0$ への正射影の方程式を次の順に求めよ.

- (1) ℓ を含み, π に垂直な平面 π' を求めよ.
 (2) 2平面 π, π' の交線を求めよ.

【定理9】(正射影-II) 2点 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$ と原点 O を含む平面 $\alpha: x+2y-3z=0$ がある.

$\triangle OAB$ の平面 α への正射影 $\triangle OA'B'$ の面積を求めよ.

【定理10】(球面と線分) 2点 $A(0, 1, 2)$, $B(3, -8, 5)$ を結ぶ線分 AB と球面 $x^2+y^2+z^2=14$ との交点を求めよ.

【定理11】(球面と平面→距離の公式)

球面 $S: x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z-50=0$ と平面 $\pi: 2x-y-2z=1$ について,

- (1) π に平行な S の接平面 π' を求めよ.
 (2) S の π による切り口はどんな図形か.

【定理12】(交線を含む平面-II) 2つの球面

$$S_1: x^2+y^2+z^2=9, S_2: (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$$

- について,
 (1) S_1, S_2 の交わりの円 C を含む平面を求めよ.
 (2) 交円 C の面積を求めよ.

代数・幾何(定理プリント) 行 列

[定理1] 任意の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,
 $AX = XA$ となる2次の正方行列 X を求めよ.

[定理2] (逆行列) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 3 & b-4 \end{pmatrix}$ について,

(1) A^{-1} が存在するための条件は \square である.

(2) $A^{-1} = A$ となるように a, b の値を定めよ.

[定理3] (連立方程式) 次を行列を用いて解け.

$$\begin{cases} ax + (a-1)y = -1 \\ (a+6)x + 2ay = -3 \end{cases} \quad (a \text{ は定数})$$

[定理4] (1次独立) 2次の正方行列 A に対して,

$A \neq kE$ (k : 実数) のとき, 次を示せ.

$$xA + yE = O \Rightarrow x = y = 0$$

[定理5] ((CH)-定理-I) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ を示せ.

(2) $A^2 - 4A + 3E = O$ ならば, $a + d = \square$,

$ad - bc = \square$ である. (ただし, $b \neq 0$ とする)

[定理6] (固有値・固有ベクトル) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ と

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{v} = k\vec{v}$ が成立するような

実数 k の大きい方と, そのときのベクトル \vec{v} を求めよ.

[定理7] ((CH)-定理-II) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

(1) $A^2 = O$ となる必要十分条件を求めよ.

(2) $A^n = O$ ($n \geq 2$) $\iff A^2 = O$ を示せ.

(3) $A^n = O$ ($n \geq 1$) となる A を求めよ.

⑨ (3)の行列 A を巾零行列という)

[定理8] (行列の n 乗-I) 次の行列の n 乗を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[定理9] (行列の n 乗-II) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について,

(1) A の固有値 α, β に属する固有ベクトルを $\vec{v}_\alpha,$

\vec{v}_β とし, 行列 $P = (\vec{v}_\alpha, \vec{v}_\beta)$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ となることを示せ.}$$

(2) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P$ を示し, A^n を求めよ.

[定理10] (行列の n 乗-III) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について,

(1) $A = B + \alpha E$, $B^2 = O$ をみたす実数 α と行列 B を求めよ.

(2) $A^n = \alpha^n E + n\alpha^{n-1} B$ ($n \geq 1$) を示せ.

[定理11] (行列の和) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき,

(1) A^n を求めよ.

(2) $S_n = E + A + A^2 + \dots + A^n$ を求めよ.

[定理12] (行列の n 乗と漸化式-I)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n \geq 1$) とおくと,

(1) 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ ($n \geq 2$) をみたす. 定数 p, q を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

[定理13] (行列の n 乗と漸化式-II)

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2 \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n + 3 \end{cases} \quad (n \geq 1) \text{ ただし, } \begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

この漸化式を行列を用いて解け.

代数・幾何(定理プリント) 1次変換

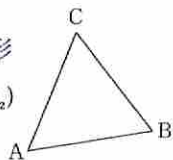
[定理1] 1次変換 f で点 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, -1)$ はそれぞれ点 $A'(-1, \sqrt{3})$, $B'(1, 0)$ に移る. このとき, f を表す行列を求めよ. また, f はどんな変換か.

[定理2] (合成変換・逆変換) f を原点のまわりの $\frac{\pi}{4}$ -回転とし, g を $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される1次変換とする. 合成変換 $f^{-1} \circ g$ を求め, これによる平面全体の像を求めよ.

[定理3] (θ -回転) 右図の正三角形

ABCについて, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

のとき, 点Cの座標を求めよ.



[定理4] (対称移動) 直線 $y=mx$ について点を対称に移す1次変換を表す行列 S_m を求めよ.

[定理5] ($\alpha E \cdot R(\theta)$) 1次変換 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

について, 次に答えよ. (ただし, $a > 0, b > 0$)

- (1) 原点を中心にもつ円は, その \square 倍の半径をもつ同心円に移される.
- (2) A^n ($n \geq 1$) を求めよ.

[定理6] (図形の移動-I) 1次変換 $f: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に

より, 直線 l_1 は直線 $l_2: x-y=1$ に移され, 直線 l_2 は直線 l_3 に移されるという. 直線 l_1 と l_3 の方程式を求めよ.

[定理7] (図形の移動-II) 1次変換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に

よる次の図形の像を求め, 図示せよ.

$$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

[定理8] (図形の移動-III) 1次変換 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に

よる次の各図形の像を求めよ.

- (1) 直線 $y = -x + 1$
- (2) 直線 $y = 2x - 2$
- (3) 放物線 $y = x^2 + 1$
- (4) 円 $x^2 + y^2 = 1$

[定理9] (図形の移動-IV) $\det(f) \neq 0$, f による3点 A, B, C の像を A', B', C' とする.

- (1) 正方形 $OABC$ の周及び内部は平行四辺形 $OA'B'C'$ の周及び内部に移されることを示せ.
- (2) 面積は $|\det(f)|$ 倍となることを示せ.

[定理10] (不動点・不変) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -2a & -a-1 \end{pmatrix}$ で

表される1次変換を f とする. (a は定数)

- (1) $f(P) = P$ となる点 P はどんな点か.
- (2) 直線 $l: y = mx$ 上の任意の点の像が l 上にあるための m の値を求めよ.

[定理11] (不動直線) 1次変換 $f: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ により

自分自身に移される直線をすべて求めよ.

[定理12] 1次変換 f により, 2直線 $x+y+1=0$,

$2x+y+1=0$ はそれぞれ順に直線 $y=x-1$,

$y=2x+1$ に移される. f を表す行列は \square .

[定理13] (像の面積) 1次変換 $f: \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

による放物線 $C: y=2x^2$ の像を C' とする. 曲線 C' と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

[定理14] (2次曲線と θ -回転)

曲線 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を θ -回転を利用して図示せよ.

代数・幾何(定理プリント) 2次曲線

〔定理1〕(曲線の判別) 次の方程式の表す曲線は何か。また、焦点、準線、漸近線があれば求め、図示せよ。

- (1) $y^2 - 4x + 2y + 13 = 0$
- (2) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
- (3) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 8 = 0$
- (4) $x^2 - 2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$
- (5) $x^2 - 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$

〔定理2〕(曲線の方程式を求める)

- (1) 2焦点が $(2, 3 \pm \sqrt{3})$ 、2焦点からの距離の和が4であるだ円の方程式を求めよ。
- (2) 2直線 $2x + 3y + 4 = 0$ と $2x - 3y - 8 = 0$ を漸近線とし、1つの焦点が $(1 + \sqrt{13}, -2)$ である双曲線の方程式を求めよ。

〔定理3〕(2次曲線と直線) 点 $(1, 2)$ を通る直線とだ円 $x^2 + 4y^2 = 4$ とが共有点をもつ条件をのべよ。また、接するときの2接線のなす角を求めよ。

〔定理4〕(放物線の性質) 放物線 $y^2 = 4px$ の弦PQについて、次の2条件は同値であることを示せ。

- (1) $OP \perp OQ$ (O は頂点)
- (2) 弦PQは定点 $(4p, 0)$ を通る。

〔定理5〕(だ円の準円) だ円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と C の準円 $C': x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ について、次を示せ。

- (1) 準円 C' 上の任意の点 P からだ円 C に引いた2本の接線は直交する。
- (2) だ円 C の直交する2接線の交点 P は準円 C' 上にある。

〔定理6〕(接線と距離) だ円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、

- (1) 傾き m の接線の方程式を求めよ。
- (2) だ円 C に外接する長方形の面積 S を求めよ。

〔定理7〕(円すい曲線の性質I) 曲線 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ の2焦点から任意の接線までの距離の積は b^2 である。これを示せ。

〔定理8〕(円すい曲線の性質II) 円すい曲線上の任意の点 P における接線 l は、 $FP, F'P$ と等角をなす。(ただし、 F, F' は2焦点または P から準線に下した垂線の足とする) これを示せ。

〔定理9〕(離心率+軌跡-I) 定点 $F(p, 0)$ と定直線 $l: x = -p$ に対して、 P から l に下した垂線の足を H とするとき、 $PF = ePH$ ($e > 0$) となる点 P の軌跡を求めよ。 $\sqrt{3}e = p = 1$ のときこれを図示せよ。

〔定理10〕(軌跡-II) 2直線 $ax \pm by = 0$ ($a > 0, b > 0$) に至る距離の積が一定値 k^2 ($k \neq 0$) となる点 P の軌跡は、この2直線を漸近線とする双曲線となることを示せ。

〔定理11〕(軌跡-III) 点 $(0, 2)$ を通る直線 l が、だ円 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ によって切りとられる線分の中点の軌跡を求め、図示せよ。

〔定理12〕(2次曲線の標準形化) 2次曲線

$C: 8x^2 + 4xy + 5y^2 - 20x - 14y - 19 = 0$ について、

- (1) θ -回転して xy の項を消せ。
- (2) 曲線 C はどんな曲線か。