

基礎解析(定理プリント) 三角関数

[定理1] (三角関数の定義) 次の値を求めよ.

$$(1) \sin 1950^\circ \quad (2) \cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right) \quad (3) \tan \frac{19}{4}\pi$$

$$(4) \cos 15^\circ \quad (5) \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{k\pi}{8}$$

[定理2] (定義-置換+変域)

$\tan \theta = -\frac{4}{3}$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ を求めよ. ただし,
 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

[定理3] (置換+変域) 次の式を簡単にせよ.

$$f(\theta) = \frac{1 - \sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta - \cos \theta} + \frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{1 - \sin \theta + \cos \theta}$$

[定理4] (グラフ) 次の関数のグラフをかき, 周期をいえ.

$$(1) y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2) y = \tan \frac{x}{2}$$

[定理5] (三角方程式・不等式-置換+変域) 次の方程式・不等式を解け.

$$(1) 2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1 = 0$$

$$(2) \sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$(3) 3 + 2 \sin x \cdot \tan x \leq 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

[定理6] (連立方程式-置換+変域) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x, y < 2\pi)$$

[定理7] (tanの置換) 次の証明せよ.

$$\tan \theta = t \text{ のとき, } \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

[定理8] (単振動の合成) 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

$$y = 3 \cos x - \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

[定理9] (2乗は半角・積は2倍角)

$$(1) \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

を証明せよ.

(2) 関数 $f(x) = 2 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$ の最大値, 最小値を $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で求めよ.

[定理10] (3倍角の公式- $18^\circ n$ -正多角形の面積)

(1) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ を証明せよ.
 (2) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ.

[定理11] (和-積) $\triangle ABC$ において次を証明せよ.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

[定理12] (対称式の置換+変域)

$y = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における値の範囲を求めよ.

[定理13] (2乗の和の置換+変域)

x, y が $x^2 + y^2 = 2$, $x > 0$, $y > 0$ を満たすとき,
 $z = x^2 + xy$ の値の範囲を求めよ.

[定理14] (置換+変域と最大・最小)

$$f(\theta) = \frac{3 - \sin \theta}{2 - \cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ について,}$$

(1) $f(\theta)$ の増減を調べよ.
 (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ.

基礎解析(定理プリント) 指数・対数関数

【定理1】(底の変換公式) $1 \neq x > 0, y > 0, 1 \neq a > 0$

のとき, $\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$ を示せ.

【定理2】(定義) 次の各値を求めよ.

(1) $9^{\frac{5}{4}} \cdot (3^{\frac{3}{2}})^3$ (2) $\log_{16} \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{10}^{\log_{10} 2}$

【定理3】(グラフ) 次の関数のグラフをかき,

それらの位置関係をいえ.

(1) $y=3^{-x}$ (2) $y=\log_3 x$ (3) $y=3^{-x}+1$

(4) $y=\log_3(x+2)-3$

【定理4】(指数方程式・不等式-置換+変域 I)

次の方程式・不等式を解け.

(1) $4^x = 3^{x+1}$

(2) $2^{2x+1} + 3 \cdot 2^x - 2 \geq 0$

(3) $4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) = 1$

【定理5】(対数方程式・不等式) 次の式を解け.

(1) $\log_2(x-3) = \log_4(x-1)$

(2) $x^{\log x} = \frac{1000}{x^2}$ (底は10)

(3) $\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 2 = 2 \\ \log_x 16 + \log_y 8 = -1 \end{cases}$

(4) $\log_a(2x+13) > \log_a(12+4x-x^2)$

ただし, $1 \neq a > 0$.

【定理6】(桁数を求める)

(1) $\log_{10} 5$ の小数第1位の値は である.

(2) 2^{30} は 桁の数である.

(3) $(0.00125)^{90}$ は小数第 位に初めて0でない数があらわれる.

(ただし, $-\log_{10} 2 = 0.3010$ とせよ)

【定理7】(指数の置換+変域 II)

$f(x) = 8^x - 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x + 12$ について,

(1) 関数 $y=f(x)$ の $x \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x)=k$ が負の解をもつための k の条件を求めよ.

【定理8】(対数の置換+変域)

$y = \frac{x^{\log x}}{x^2}$ ($x > 1$) の最小値を求めよ.

【定理9】(対数の置換+変域 II)

次の領域 D を xy -平面上に図示せよ.

$$D = \{(x, y) \mid \log_x y \geq \log_y x\}$$

基礎解析(定理プリント) 数列

[定理1] (一般項を求める—まないと)

次の数列の一般項を求めよ.

1, 4, 9, 16, 25, ……………

[定理2] (和を求める—ずらしてひく)

次の和を求めよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n k r^{k-1}$$

[定理3] (Σ-公式の証明) 次を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

[定理4] (文章問題)

等差数列 $\{a_n\}$, 公比が整数の等比数列 $\{b_n\}$ 及び、数列 $\{c_n = \frac{a_n}{b_n}\}$ が与えられている. $c_1=2, c_2=1, c_3=\frac{4}{9}$ のとき, c_n を n の式で表せ.

[定理5] (分数の和—差に直して、まないと)

$$\sum_{k=1}^n \frac{3k+2}{k(k+1)(k+2)} \text{ を求めよ.}$$

[定理6] (和から一般項を求める)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき,

$$S_n = n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (n \geq 1)$$

で与えられる. このとき,

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < \frac{1}{16}$ を証明せよ.

[定理7] (積から一般項を求める)

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=a_1 \cdot a_2 \cdots a_n + 1 \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 次を示せ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 1$$

[定理8] (漸化式 I・II 型) 次を解け.

$$(1) a_1=2, \quad a_{n+1}=3a_n+4 \quad (n \geq 1)$$

$$(2) b_1=4, \quad b_{n+1}=3b_n-2^{2n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$(3) c_1=4, \quad c_{n+1}=3c_n+2(n-1) \quad (n \geq 1)$$

[定理9] (漸化式一般型) 次を解け.

$$a_1=0, \quad a_{n+1}=(n+1)a_n+n \quad (n \geq 1)$$

[定理10] (漸化式 III 型—分数型) 次を解け.

$$(1) a_1=5, \quad a_{n+1}=\frac{3a_n+4}{2a_n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$(2) a_1=4, \quad a_{n+1}=\frac{-4}{a_n+4} \quad (n \geq 1)$$

[定理11] (漸化式 IV 型—隣接 3 項間) 次を解け.

$$a_1=a_2=1, \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n \geq 1)$$

[定理12] (漸化式 V 型—連立漸化式) 次を解け.

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+y_n \\ y_{n+1}=3x_n+4y_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ただし, $x_1=1, y_1=0$ とする.

[定理13] (群数列) 次の数列について答えよ.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{3}{1}, \dots$$

(1) 第100項は何か.

(2) 第 $2m^2$ 項を a_m とするとき, $\prod_{k=1}^m a_k = \square$.

(ただし, $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$)

[定理14] (数学的帰納法) 次を説明せよ.

(1) (ベルヌーイの不等式)

$$x > 0, \quad n \geq 2 \text{ のとき, } (1+x)^n > 1+nx$$

(2) (2項定理) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n r x^r$

基礎解析(定理プリント) 微分法

[定理1] (極限 I)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + ax - b}{x^3 + x - 2} = 3$ を満たす定数 a, b は

$$a = \square, \quad b = \square.$$

[定理2] (極限 II) 次の条件を満たす整式 $f(x)$ で、次数が最小のものを求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{x - k} = k \quad (k = 1, 2)$$

[定理3] (極限 III - 導関数) 微分可能な関数 $f(x)$ が任意の実数 x, y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

を満たすとき、 $f(x)$ はどのような関数か。

[定理4] (グラフと接線 I)

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ のグラフをかけ。

(2) 点 $(1, 0)$ から(1)の曲線に引いた接線を求めよ。

[定理5] (2曲線が接する) 2つの曲線 $y = x^2 - a$ と $y = x^3 - x$ が1点 P を通り、 P において共通の接線をもつ。 P における法線 l の方程式を求めよ。

[定理6] (4次曲線に2点で接する接線) 次の曲線に異なる2点で接する直線を求め、さらに2接点の座標も求めよ。

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

[定理7] (2曲線が接して、交わる)

関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{256}{27}$

をとり、そのグラフは直線 $y = -\frac{5}{4}x + e$ と $x = \frac{1}{2}$

で接し、 $x = 4$ で交わる。定数 a, b, c, d, e を

求めよ。

[定理8] (3次方程式の実数解とグラフ I)

a を定数とすると、 x の3次方程式

$$x^3 - 3x^2 - a = 0$$

の実数解の個数を調べよ。

[定理9] (3次方程式の実数解とグラフ II)

3次方程式

$$2x^3 + 3ax^2 - 3a = 0$$

が相異なる3つの実数解をもつように定数 a の値の範囲を求めよ。

[定理10] (グラフと接線 II) 曲線 $y = x^3 - 4x$ に点 P から n 本の接線が引けるような点 P の存在範囲を求め、図示せよ。ただし、 $n = 1, 2, 3$ 。

[定理11] (不等式とグラフ) p, q は2以上の整数で、 $p > q$ とする。このとき、

$$1 \leq x > 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$$

が成立することを証明せよ。

[定理12] (最大・最小問題 I)

$a \geq 0$ のとき、 $-1 \leq x \leq 1$ における

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + 1$$

の最大値を求めよ。

[定理13] (最大・最小問題 II) 半径 r の球に内接する直円柱の体積 V の最大値を求めよ。

基礎解析(定理プリント) 積分法

[定理1] (積分の基本定理) 次を証明せよ.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \text{ は定数})$$

[定理2] (シンプソンの公式) $f(x)$ を3次以下の関数とするとき, 次を証明せよ.

$$(1) \int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} \{f(-h) + 4f(0) + f(h)\}$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\}$$

[定理3] (絶対値の付いた関数の積分)

$a > 0$ のとき, $f(x) = \int_0^x |x-a| dx$ の最小値を求めよ.

[定理4] (関数を求める I) 次のすべての条件を満たす関数 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

$$(1) f(0) = 1, g(0) = -1$$

$$(2) \frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = 2x + 1$$

$$(3) \frac{d}{dx} \{f(x) \cdot g(x)\} = 9x^2 - 14x + 5$$

[定理5] (関数を求める II) 任意の1次関数 $f(x)$ に対して,

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx = 0$$

を満たす2次関数 $g(x)$ を求めよ。ただし, $g(1) = 1$ とする。

[定理6] (関数を求める III) 任意の x に対して,

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - 2x^3 + x^2$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

[定理7] (関数を求める IV) 次の等式を満たし, 最高次の係数が1の整式 $f(x)$ を求めよ。

$$12 \int_0^x f(t) dt = x(x-1) \frac{df(x)}{dx}$$

[定理8] (関数を求める V) 任意の x に対して,

$$f(x) = x + \int_{-1}^1 (x^2 t + x t^2) f(t) dt$$

を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

[定理9] (面積 I) 放物線 $C: y = x^2$ と点 $(1, 2)$ を通り傾き m の直線 l とで囲まれた図形の面積 $S(m)$ を最小にする m の値と最小値を求めよ。

[定理10] (面積 II) 曲線 $y = x^3 - 2x$ と, この曲線の $x = a$ における接線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

[定理11] (面積 III) 曲線 $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ に異なる2点で接する直線を求め, この曲線と直線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

[定理12] (面積 IV) 放物線 $y = ax^2$ と, その上の異なる2点 $x = \alpha, x = \beta$ における2接線とで囲まれる部分の面積 S を α, β を用いて表せ。

[定理13] (面積 V) 2つの放物線 $y = ax^2$ と $y = a(x-p)^2 + q$ ($p > 0$) およびこれらの共通接線とで囲まれる図形の面積 S を a, p を用いて表せ。

[定理14] (体積 I) $y = x^2 - 2x$ と $y = x$ とで囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

[定理15] (体積 II) 半径 r の半球形の器に水が満たされている。これを θ 傾けるとき, 流れ出る水量 V を求めよ。

[定理16] (体積 III) 底面の半径 r の直円柱を底面の直径を含み底面と θ の角をなす平面で切ったときできる立体(小さい方)の体積 V を求めよ。