

## は し が き

前期に引き続いて『微分・積分』の内容を標準的な問題を用いて学習する。夏休みにかけて基礎力がついたと思うから、2学期からは実戦力をつけることを目標にしている。やや程度の高い問題も含まれているが諸君の頑張りでもマスターしてもらいたい。

講義の方法は前期と同じであるが、次の点に留意して学習してもらいたい。

1. 週一回の授業で時間的に少ないから、教科書、参考書などで、基本事項の確認をしておくこと。
2. 毎回4問ずつ解説するから、前もって自分で考え、ノートに解いてみること（解けない場合は途中まででよい）。
3. 90分の講義では問題の要点をつかむことを心掛けること。
4. 必ず復習して重要事項を完全に覚え込むこと。
5. 理解できないところがあれば遠慮なく質問して身につけること。

以上であるが、数学は簡単に実力がつくものではない。時間をかけてコツコツ努力することが大切であるから途中でくじけないように頑張ってもらいたい。

## 目 次

第 1 回	関数の極限 .....	4
第 2 回	微分法と接線 .....	6
第 3 回	関数の増減, 極値, 最大・最小 .....	8
第 4 回	方程式・不等式への応用 .....	10
第 5 回	積分の計算 .....	12
第 6 回	定積分で表された関数 .....	14
第 7 回	定積分と極限, 不等式 .....	16
第 8 回	面 積 .....	18
第 9 回	体積, 曲線の長さ .....	20
第 10 回	微分方程式 (1) .....	22
第 11 回	微分方程式 (2) .....	24
第 12 回	微分・積分の総合問題 (1) .....	26
第 13 回	微分・積分の総合問題 (2) .....	28

## 第 1 回

【1】 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 4x + 1})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos 3x - \cos x}$$

【2】 等式  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^3} - (a+bx)}{x^2} = c$  が成り立つように、定数  $a, b,$

$c$  の値を定めよ。

【3】 中心O, 半径rの円上に定点Aと動点Pがある。点Aにおける円の接線に点Pから下ろした垂線の足をHとする。 $\angle AOP = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ),  $\theta$ に対応する弧APの長さをlとすると  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{PH}{AH^2} = \square$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{PH}{l^2} = \square$  である。

【4】 (1) 関数  $f(x) = \begin{cases} a & (x=0 \text{ のとき}) \\ x \sin \frac{1}{x} + \frac{2x+x^2}{3x+x^3} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

が  $x=0$  で連続になるように  $a$  の値を定めよ。

(2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + a x^2 + b x + 1}{x^{2n} + 1}$  がすべての実数  $x$  に対して連続となるように  $a, b$  の値を定めよ。

## 第2回

【5】 (1)  $\frac{d}{dx} \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$  を求めよ。

(2)  $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^9$  のとき  $f'(1) + f''(1) - \{f'(1)\}^2$  を求めよ。

【6】  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 1}$  とする。このとき  $f(-1) = \square$  ,  $f(2) = \square$  ,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \square$  である。 $f(x)$ の定義域において、 $f(x)$ は連続でない点を  $\square$

個もち、微分可能でない点を  $\square$  個もつ。

【7】 定点  $(1, a)$  から曲線  $y = e^x$  へ、異なる2本の接線を引くことができるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

【8】 2曲線  $C_1: y = a e^x$ ,  $C_2: y = b x^2$  ( $a, b > 0$ ) がある共有点で共通の接線  $l$  をもつ。

(1)  $a, b$  の関係式を求めよ。

(2) 接線  $l$  の方程式を  $b$  を用いて表せ。また、 $l$  はつねに定点を通ることを示せ。

(3) 曲線  $C_1$ , 接線  $l$  および  $y$  軸によって囲まれる図形の面積を  $S_1$ , 曲線  $C_2$ , 接線  $l$  および  $y$  軸によって囲まれる図形の面積を  $S_2$  とするとき、比  $S_1 : S_2$  を求めよ。

### 第3回

【9】 関数  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$  について

- (1)  $f(x)$  の導関数は  $f'(x) = (\quad)\cos x + (\quad)\cos(\quad)x$  と表される。  
(2)  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq \pi$  における極大値の大きな方は  $\quad$ 、極小値は  $\quad$  である。

【10】 (1) 関数  $y = x e^{-x^2+x}$  の極値を求めよ。

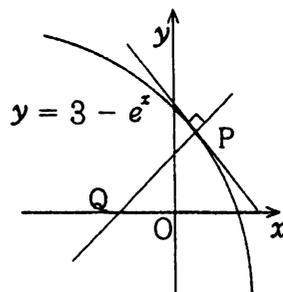
- (2) 2次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  に対して、 $F(x) = x e^{f(x)}$  で定義された関数  $y = F(x)$  が極値をもつための  $a, b, c$  の条件を求めよ。

【11】 関数  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$  ( $a > 0$ ) について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f'(x) = 0$  となる  $x$  の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた  $x$  の値を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。このとき、 $\beta$  と 1 の大小関係を求めよ。
- (3)  $0 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最大値が 1 であるとき、 $a$  の値を求めよ。

【12】 曲線  $y = 3 - e^x$  の上の点  $P(t, 3 - e^t)$  においてこの曲線に法線を引き、これと  $x$  軸との交点を  $Q$  とする。

- (1) 点  $Q$  の  $x$  座標を  $t$  の関数として表せ。
- (2) 点  $P$  がこの曲線上を点  $A(-1, 3 - e^{-1})$  から  $B(1, 3 - e)$  まで動くとき、 $x$  軸上の点  $Q$  の動く範囲を求めよ。ただし、 $e$  は自然対数の底であって、 $e^2 - 3e + 1$  の値は正である。



## 第 4 回

【13】 関数  $f(x) = x e^{-x^2}$  について

- (1)  $f(x)$  の極値を求めよ。
- (2) 方程式  $x e^{-x^2} = k$  の解の個数を求めよ。ただし、 $k$  は定数とする。

【14】 (1)  $x > 0$  のとき、 $e^x$  と  $\frac{1}{2}x^2$  の大小を比べ、それを用いて  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$  を求めよ。

(2) 関数  $y = (1+x)e^{-x}$  のグラフを書け。

【15】 次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

(1)  $x > 0$  のとき  $\frac{1}{x} \log(1+x) > 1 + \log \frac{2}{x+2}$

(2)  $n$  が正の整数のとき  $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}$

【16】  $m$  を実数とし、関数  $f(x) = \frac{-x+m}{x^2-1}$  とする。

(1)  $y = f(x)$  が極値をもたないための、 $m$  に関する条件を求めよ。

(2)  $k$  を実数とし、 $m = 2$  のとき、方程式  $k = f(x)$  の解の個数を求めよ。

## 第 5 回

【17】 次の計算をせよ。

(1)  $\int x^2 \log x \, dx$

(2)  $\int \frac{\tan x}{1 - \cos x} \, dx$

(3)  $\int_4^6 \frac{6x + 5}{(x + 1)^2(x - 2)} \, dx$

(4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx$

【18】  $f(x) = \sin(x - a)$  ( $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ ) とするとき、次の各問いに答えよ。

(1)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$  の値を求めよ。

(2)  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| \, dx$  を  $a$  で表せ。

(3)  $J$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

【19】 (1) 関数  $f(x)$  はつねに  $f(x) = f(-x)$  を満たす。このとき、

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^a f(x) dx \quad \text{となることを示せ。}$$

(2)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+e^{-x}} dx$  を計算せよ。

【20】 各  $x$  に対して、2つの関数  $f(x) = \sin 2x - \sin x$  と  $g(x) = \cos x - \frac{1}{2}$  の値の大きい方を  $h(x)$  で表す。このとき  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx$  を求めよ。

## 第 6 回

【21】 等式  $f(x) = x + 2 \int_1^x f(t) \log t dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

【22】 (1) 不定積分  $\int x \sin x dx$  を求めよ。

(2) 実数  $a$  に対して、 $F(a) = \int_0^{\pi} |x - a| \sin x dx$  とおくとき、 $F(a)$  の最小値を求めよ。

【23】 関数  $f(x)$  が  $\int_a^{x+1} f(t) dt = \frac{x}{x+1}$  を満足している。

- (1) 定数  $a$  の値と  $f(x)$  を求めよ。
- (2)  $y = e^x f(x)$  の極値を求めよ。

【24】  $x$  の関数  $f(x)$  を  $f(x) = \int_0^x t(\sin t - \cos t) dt$  で定義する。区間

$0 \leq x \leq 2\pi$  における  $f(x)$  の最大値および最小値を求めよ。

## 第 7 回

【25】 (1) 連続関数  $f(x)$  の原始関数の 1 つを  $F(x)$  とするとき、次の等式を導け。

$$\int_0^1 x f(x) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx$$

(2) 任意の  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) に対して不等式  $\int_x^1 f(t) dt \geq 1 - x^2$  を満たす

連続関数  $f(x)$  について、 $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{2}{3}$  となることを示せ。

【26】 次の極限值を定積分で表し、その値を求めよ。

$$(1) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)$$

$$(2) J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - n^2})$$

$$(3) K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (\sqrt{n^2 + 1} + 2\sqrt{n^2 + 2^2} + \cdots + n\sqrt{n^2 + n^2})$$

【27】 (1) 次の  $a_n$ ,  $b_n$  を求めよ。ただし,  $n$  は自然数とする。

$$a_n = \int_{-n\pi}^0 e^x \sin x \, dx, \quad b_n = \int_{-n\pi}^0 e^x \cos x \, dx$$

(2) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n - 1)$  の和を求めよ。

【28】  $S_n = \sum_{k=1}^n k^7$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n k^3$  とおく。

(1) すべての自然数  $n$  に対して, 不等式  $\frac{n^8}{8} < S_n < \frac{(n+1)^8 - 1}{8}$  が成り立つことを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n^2}$  を求めよ。

## 第 8 回

【29】 曲線  $y = \log(x + 1) - 1$  と、曲線の  $y$  軸との交点における接線、および  $x$  軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

【30】 曲線  $y = e^{2x}$  上の点  $P$  における接線と  $x$  軸との交点を  $Q$  とする。線分  $PQ$  を対角線とし、 $x$  軸上に 1 辺をもつ長方形を作る。

- (1) この長方形が正方形となるような点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) この長方形が曲線  $y = e^{2x}$  によって分けられる 2 つの部分の面積の比は、 $P$  の位置によらず一定となることを示し、その比を求めよ。

【31】 関数  $f(x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) は  $x = \square$  で最大値  $\square$  をとり,  $x = \square$  で最小値  $\square$  をとる。曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および2直線  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$  で囲まれた部分の面積は  $\square$  である。また曲線  $y = f(x)$  のグラフの概形は  $\square$  である。ただし, 変曲点は記入しなくてよい。

【32】 曲線  $y = \log x$  と  $x$  軸および2直線  $x = p$ ,  $x = p + 1$  ( $0 < p < 1$ ) で囲まれた部分の面積を  $S(p)$  とする。ただし,  $\log$  は自然対数を表す。 $S(p)$  を最小にする  $p$  の値と,  $S(p)$  の最小値を求めよ。

## 第9回

【33】 曲線  $y = k \cos x$   $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と両軸によって囲まれる図形を  $x$  軸および  $y$  軸の周りに回転してできる2つの立体の体積が等しくなるように  $k$  の値を定めよ。

【34】 曲線  $K: y = x^2 \log x$  がある。  $\left(\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0\right)$  を用いてよい

- (1)  $K$  の概形を描け。
- (2) 原点を通る  $K$  の接線  $l$  を求めよ。
- (3)  $K$ ,  $l$  および直線  $x = a$  ( $0$  に十分近い正の数) とによって囲まれた図形 (ただし,  $x \geq a$  の部分) を  $x$  軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ。また, この立体の体積を  $V(a)$  とするとき,  $\lim_{a \rightarrow +0} V(a)$  を求めよ。

【35】 正の数  $t$  に対して曲線  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  の  $0 \leq x \leq t$  の部分の長さを  $s(t)$  とする。

(1)  $s(t)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \log s(t))$  を求めよ。

【36】  $x, y$  平面上を動く点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  における位置が  $x = 1 + \frac{5}{4}t^2$ ,  
 $y = 1 + t^{\frac{5}{2}} (t \geq 0)$  で与えられているとする。

(1) 点  $P$  の描く曲線の接線の傾きが 1 となる時刻  $t_0$  を求めよ。

(2) 点  $P$  が時刻  $t = 0$  から  $t = t_0$  までの間に動く道のりを求めよ。

## 第10回

【37】 微分方程式  $\frac{d y}{d x} = x(2 y - 1)$  を初期条件「 $x = 0$  のとき  $y = 1$ 」のもとで解け。

【38】 平面上の曲線  $C$  が、微分方程式  $\frac{d y}{d x} = \frac{y(y+2)}{2 x(y+1)}$  を満たす。

- (1) 曲線  $C$  は、点  $(-1, -1)$  を通る。このとき曲線  $C$  の方程式を求めよ。
- (2) (1)で得られた曲線  $C$  と、直線  $y = x + a$  とで囲まれた図形の面積が  $\frac{9}{2}$  であるとき、 $a$  の値を求めよ。

【39】  $\int_1^x 3t f(t) dt = (x^2 - x - 2)f(x) - 4$  を満たす微分可能な関数  $f(x)$  を求めよ。

【40】 関数  $f(x)$  は微分可能で  $\int_0^x (t - t^2) f(x - t) dt = \frac{1}{2} x^2$  を満たしている。  $f(x)$  を求めよ。

## 第11回

【41】  $t$  の関数  $x(t)$ ,  $y(t)$  が次式を満たすとき,  $x(t)$ ,  $y(t)$  を  $t$  で表せ。

ただし,  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$  とする。

$$\begin{cases} \frac{d x}{d t} \cos t - \frac{d y}{d t} \sin t = t \\ \frac{d x}{d t} \sin t + \frac{d y}{d t} \cos t = -2 \end{cases}$$

【42】 (1) 関数  $f(x)$  が微分可能であるとき,  $(x^2+1)f(x)$  の導関数を求めよ。

(2) 等式  $(x^2+1)f'(x)+2xf(x)=x\sin x$ ,  $f(0)=1$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  の値を求めよ。

【43】  $x > 0$  に対して定義された関数  $f$  があって、曲線  $y = f(x)$  の上の点  $(x, f(x))$  におけるこの曲線の接線はいつも点  $\left(\frac{2}{3}x, -\frac{1}{3}x^3\right)$  を通るとい  
う。

(1)  $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x^3} \right\}$  を  $x$  の式で表せ。

(2) 曲線  $y = f(x)$  が直線  $y = 2x - \frac{5}{3}$  と接するように  $f(x)$  の形を定めよ。

【44】 曲線  $y = f(x)$  上の点  $P(x, y)$  における接線が、 $x$  軸および  $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $Q, R$  とする。点  $P$  は常に線分  $QR$  を  $2 : 1$  に内分する。

(1) この曲線が満たす微分方程式を求めよ。

(2) (1)の微分方程式を解け。

(3) このうち、点  $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$  を通る曲線の方程式を求めよ。

## 第12回

【45】 曲線  $y = c e^{-x} + x^2 - 2x + 2$  ( $c$  は定数) について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) で求めた接線は  $c$  によらず定点を通る。その定点の座標を  $(p, q)$  とおくと、 $p, q$  を  $x_0$  の式で表せ。
- (3)  $x_0$  が実数全体を動くとき、(2) で求めた点  $(p, q)$  の軌跡を図示せよ。

【46】  $F(x) = \int_0^1 \{(a-1)t + 1\}^x dt$  ( $x > -1$ ) とおくと、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log F(x)}{x}$  を求めよ。ただし、 $a > 1$  とする。

【47】  $\int_{-x}^x \sin^2 x dx = \square$  ,  $\int_{-x}^x \cos^2 x dx = \square$  であり,  $\int_{-x}^x x \sin x dx = \square$  ,

$\int_{-x}^x x \cos x dx = \square$  である。したがって, 定数  $a$  ,  $b$  に対して

$I = \int_{-x}^x (x - a \sin x - b \cos x)^2 dx = \square$  である。

ゆえに,  $I$  は  $a = \square$  ,  $b = \square$  のとき最小値  $\square$  をとる。

【48】 閉区間  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  を定義域とする媒介変数  $t$  を用いて,  $x$   $y$  座標平面上の曲

線  $C$  上の点の座標  $(f(t), g(t))$  は右

のように表される。

$$\begin{cases} f(t) = t^2 - \frac{\pi}{3}t \\ g(t) = \sin t \end{cases}$$

このとき, 曲線  $C$  と  $x$  軸および 2 直線

$x = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ,  $x = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  とで囲まれる図形の面積を求めよ。

## 第13回

【49】  $a$  は  $0 < a < 1$  を満たす定数とする。閉区間  $[0, 1]$  で定義された関数  $y = x^a + (1-x)^a$  のグラフの凹凸を調べ、最大値、最小値および対称軸を求めて、グラフの概形をかけ。

【50】 関数  $f(x) = \int_0^x (x-t)e^{-t} dt$  について

(1) 曲線  $y = f(x)$  の概形をかけ。

(2) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線と  $x$  軸、 $y$  軸との交点を

それぞれ  $(X_1, 0)$ ,  $(0, Y_1)$  とするとき、 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left( \frac{Y_1}{X_1} \right)$  を求めよ。

【51】  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$  とする。

(1) 関数  $f(x)$  の極大値と極小値を求めよ。

(2)  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  とおく。  $0 < x < 1$  を満たすすべての  $x$  について

$\frac{F(x)}{x} < F(1)$  が成り立つことを証明せよ。

【52】  $f(x) = x^n \log x$  ( $n$  は正の整数) とおく。

(1)  $f(x)$  の導関数および不定積分を求めよ。

(2) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸に挟まれた部分のうち、2直線  $x = 1$  と  $x = e$  の間にある部分を、 $x$  軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。