

は し が き

この講座は1学期に続いて『代数・幾何』の内容を最近の入試問題を用いて、実戦力をつけることを目標にしている。

ハイクラス(H)は 入試問題の“標準”から“やや難”の問題

(国立理系, 難関私立理系)

スタンダード(S)は 入試問題の“基本”から“標準”の問題

(国立文系, 中堅私立理系)

ベーシック(B)は 入試問題の“基本”の問題

(私立文系)

のように選んであります。

2学期の学習は“考え方”“解き方”を完全に身につけることで、これによって実力をアップしてもらいたい。そのためには1学期と同様に、次の点に留意して下さい。

1. 週1回の授業で時間的に少ないから、教科書、参考書などで、基本事項の確認をしておくこと。
2. 毎回4問ずつ解説するから、前もって自分で考え、ノートに解いてみること(解けない場合は途中まででよい)。
3. 90分の講義では問題の要点をつかむことを心掛けること。
4. 必ず復習して重要事項を完全に覚え込むこと。
5. 理解できないところがあれば遠慮なく質問して身につけること。

以上であるが、数学は簡単に実力がつくものではない。時間をかけてコツコツ努力することが大切であるから途中でくじけないように頑張ってもらいたい。

目 次

ベクトル

第1回 4

第2回 6

空間座標

第3回 8

第4回 10

行 列

第5回 12

第6回 14

1次変換

第7回 16

第8回 18

第9回 20

2次曲線

第10回 22

第11回 24

総合問題

第12回 26

第13回 28

第 1 回

【1】 O を原点とする平面上に O, A, B が一直線上にないように点 A, B をとる。

更に、 $\vec{OD} = 3\vec{OA}$ 、 $\vec{OE} = 2\vec{OB}$ となるように点 D, E をとり、線分 BD 、 AE の交点を C とする。

(1) ベクトル \vec{OC} を \vec{OA} 、 \vec{OB} で表せ。

(2) 線分 OC 、 AB 、 DE の中点をそれぞれ S 、 T 、 U とするとき、 S 、 T 、 U は一直線上にあることを示せ。

【2】 三角形 OAB において辺 OA を $5 : 2$ に内分する点を C 、辺 OB を $3 : 4$ に内分する点を D 、線分 CD の中点を M とする。このとき

(1) ベクトル \vec{OM} は $\frac{1}{7}\square\vec{OA} + \frac{1}{4}\square\vec{OB}$ と表せる。

(2) 線分 OM の延長が辺 AB と交わる点を N とし、 $\vec{ON} = k\vec{OM}$ とおく。また、 $x\vec{NB} = y\vec{AN}$ とおくと、 $k = \frac{1}{\square}$ 、 $x : y = \frac{1}{\square} : \frac{1}{\square}$ である。

【3】 2つのベクトル $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(1, 2)$ と、条件 $s+2t \leq 2$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ を満たす実数変数 s, t によって表される原点を始点とするベクトル $\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ について、

- (1) ベクトルの終点 P の座標を (x, y) として、 s, t を x, y で表せ。
- (2) 終点 P の存在範囲を図示せよ。

【4】 三角形 ABC において、辺 AB を $1:2$ に内分する点を E とし、辺 AC を $3:2$ に内分する点を D とする。線分 BD と線分 CE の交点を P とし、線分 AP の延長と辺 BC の交点を F とするとき

- (1) \vec{AP} を \vec{AB}, \vec{AC} を用いて表せ。
- (2) $\vec{AF} = m\vec{AP}$ を満たす実数 m の値を求めよ。
- (3) 辺 AB, AC, BC の長さがそれぞれ $2\sqrt{3}, 2, 4$ であるとき、 \vec{AF} と \vec{BC} の内積 $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ を求めよ。

第2回

【5】 ベクトル \vec{a} , \vec{b} について, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \frac{1}{3}$,

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ が成り立っている。

(1) 2つのベクトルのなす角を θ とするとき, θ の値を求めよ。ただし,

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

(2) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

【6】 空間内の平面上に平行四辺形 $ABCD$ がある。この平面上にない点 P に対し、ベクトル \vec{PA} , \vec{PB} , \vec{PC} , \vec{PD} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} とする。このとき

(1), (2) を証明せよ。

(1) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

(2) 平行四辺形 $ABCD$ が特に長方形であるとき, $|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2$ が成り立つ。

【7】四面体OABCにおいて、辺ABを1:2に内分する点をD、線分CDを3:5に内分する点をE、線分OEを1:3に内分する点をF、直線AFが平面OBCと交わる点をGとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。

- (1) \vec{OE} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) AG:FGを求めよ。

【8】三角すいOABCにおいて、 $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $OA = 1$ とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ として

- (1) $\triangle ABC$ の重心をGとするとき、 \vec{OG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。
- (2) 頂点Oから平面ABCに下した垂線が、 $\triangle ABC$ の重心Gを通るとき、辺OB, OCの長さを求めよ。

第3回

【9】 空間内に2直線 $g_1: x+5 = \frac{a-y}{2} = \frac{z-a}{2}$, $g_2: \frac{x}{3} = \frac{y-a}{4} = \frac{2-z}{5}$

がある。

- (1) 2直線 g_1 , g_2 のなす角を求めよ。
- (2) 2直線 g_1 , g_2 が交わるような定数 a の値を求めよ。
- (3) 2直線 g_1 , g_2 が交わる時、その交点を通り、両直線に垂直な直線の方程式を求めよ。

【10】 空間で直線 $l: \frac{x}{2} = y - a = \frac{z - 2a}{-2}$ を考える。

- (1) いかなる a に対しても直線 l は同一の平面に含まれることを示せ。
- (2) 原点からの距離が1で(1)の平面と平行な平面の方程式を求めよ。

【11】 空間に2平面 $\alpha : \frac{1}{2}x - y + z + 1 = 0$, $\beta : -2x + y + 2z - 1 = 0$

がある。

- (1) α と β との交線 l を求めよ。
- (2) l を含み, α と β のなす角を2等分する平面を求めよ。
- (3) 点 $P(1, 4, 1)$ の α に関する対称点 Q を求めよ。

【12】 空間内に, 直線 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = z-2$ を含む平面 π がある。

- (1) π が平面 $3x + 6y - z = 0$ に垂直であるとき, π の方程式を求めよ。
- (2) (1)で求めた平面が2点 $(p, q, 0)$, $(0, 0, 1)$ を結ぶ線分と交わるための条件を p, q についての不等式で表せ。

第 4 回

【13】 空間において、点 $A(5, 4, 2)$ を通り、 xy 平面との交わりが円 $x^2 + y^2 - 4(x + y) + 7 = 0$ である球面を S とする。

- (1) S の方程式を求めよ。また、 A を通り S に接する平面の方程式を求めよ。
- (2) S と平面 $x - y - 2z = 1$ との交わりである円の中心の座標および半径を求めよ。

【14】 球面 $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 8$ 上の点と直線

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$ 上の点との最短距離は となる。

【15】 空間内の直線 l の方程式を $\frac{x-3}{2} = -y+1 = -z+2$ とし、 l と点 $P(3, 6, -3)$ を含む平面を α とする。

(1) 平面 α の方程式を求めよ。

(2) S を点 $A(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 6)$ を中心とする球とする。 S が平面 α と交わってできる円の面積が 9π であるとき、 S の方程式を求めよ。

【16】 空間内の点 $A(0, 1, 2)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (1, 0, 1)$ に平行な直線を l とする。

(1) xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ と直線 l との距離を求めよ。

(2) x 軸および直線 l から等距離にあるような点 $P(x, y, 0)$ の軌跡を求めよ。

第5回

【17】 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について

- (1) A^3 , B^2 , $BA - A^2B$ を求めよ。
- (2) (1)の結果を利用して, A^2BABA^2 を求めよ。

【18】 a, b は $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実数とし $A = \begin{pmatrix} 3a - 2 & -b + 7 \\ 3b + 7 & a \end{pmatrix}$ と

する。次の連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 8y \\ 7x - 3y \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外

の解をもつならば, $A = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ または $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ である。

【19】 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 4A + 3E = O$ を満たすとき、 $a + d$ および $ad - bc$ の値を求めよ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列を表す。

【20】 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ で、条件 $a > 0$ 、 $a^2 - b^2 > 0$ を満たすものの全体を M とする。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ が M に属するならば、行列 AB も M に属することを証明せよ。

(2) M に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して M に属する行列 X で $X^2 = A$ となるものを求めよ。

第 6 回

【21】 行列 $A = \begin{pmatrix} x+1 & 4 \\ -2 & y-3 \end{pmatrix}$ について

- (1) 逆行列 A^{-1} が存在し、 $A = A^{-1}$ となるような x, y の組 (x, y) を求めよ。
- (2) A に逆行列が存在しないような自然数 x, y の組 (x, y) を求めよ。

【22】 行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & x \end{pmatrix}$ がある。

- (1) X^r を求めよ。ただし、 $r \geq 1$ とする。
- (2) $X + X^2 + \dots + X^n$ を求めよ。

【23】 A, B は 2 次の正方行列で, n は自然数であるとき, $A - B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$ から $A^n - B^n$ を求めよ。

【24】 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

ただし, $A^1 = A$, $A^{n+1} = A^n A$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。

- (1) a_{n+1} と b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_n - b_n = 1$ が成り立つことを示せ。
- (3) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (4) a_n を n を用いて表せ。
- (5) A^n を求めよ。

第 7 回

【25】 座標平面上に 3 点 $A(0, 4)$, $B(7, 8)$, $C(x, y)$ があり 1 次変換 f が $f(A)=B$, $f(B)=C$, $f(C)=A$ を満たしている。

- (1) 3 点 A , B , C は同一直線上にないことを示せ。
- (2) 三角形 ABC の重心の座標を求めよ。

【26】 O を原点とする x y 平面の 1 次変換 f により, 点 $A(3, 3)$ が点 $C(1, 1)$ に, 点 $B(2, 1)$ が点 $D(1, 0)$ に移される。

- (1) f を表す行列を求めよ。
- (2) f により動かない点の集合 S を求めよ。
- (3) f により自分自身に移される直線 l をすべて求めよ。

【27】 平面上の4点 $P(5, 3)$, $Q(1, 2)$, $R(4, 4)$, $S(a, b)$ が行列

$$\begin{pmatrix} c & c+1 \\ d & d+1 \end{pmatrix}$$

で表される1次変換によって移された点を、それぞれ P' , Q' ,

R' , S' とする。四角形 $P'Q'R'S'$ が正方形となる a, b, c, d の値を求めよ。

【28】 行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ によって表される1次変換 f により、

直線 $l: px + qy = r$ ($r \neq 0$, かつ $p \neq 0$ または $q \neq 0$) が

直線 $m: y = kx$ ($k \neq 0$) に移るものとする。

(1) $a - bc = 7$ でなければならない。

(2) $k = \frac{1}{4}$ とする。このとき、 $b = 4$ となる。さらに、 f により、

点 $P(5, 4)$ が点 $Q(76, y)$ に移るとすると、 $a = 7$, $c = 1$,

$y = 4$ となる。

(3) f により、点 $R(1, 3)$ が点 $S(56, 8)$ に移るとき、 $a = 7$,

$b = 4$, $c = 1$ となる。

第 8 回

【29】 行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって、点 $(3, 1)$ を通る直線 l が同一の点 $(3, 1)$ を通り l に直交する直線に変換された。このとき、 a の値と直線 l の方程式を求めよ。

【30】 1 次変換 f の表す行列を $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ とする。

- (1) f が原点以外の不動点をもつとき、 a の値を求めよ。
- (2) f の不動点 $P(x, y)$ 全体の集合を求めよ。
- (3) f の不動点でない点 $Q(x, y)$ に対して、 Q と $f(Q)$ を通る直線の傾きが一定であることを示せ。

【31】 直線 $x + y = 0$ に関する対称移動を f とし、行列 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される

1次変換を g とする。直線 $l : ax - 2y + 3 = 0$ が f と g によって移される直線をそれぞれ m, n とするとき、

- (1) 2直線 m, n の方程式を求めよ。
- (2) m と n のなす角を θ とするとき、 $\sin \theta$ の値を求めよ。

【32】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換によって、直線 $2x - y + 2 = 0$ は

直線 $x - y - 1 = 0$ に移る。

- (1) c, d を a, b で表せ。
- (2) $ad - bc = 1$ であり、行列 A の表す1次変換によって点 $(1, -1)$ が原点との距離が $\frac{\sqrt{5}}{2}$ であるような点に移るとき、 a, b, c, d を求めよ。

第9回

【33】 直線 $y = x$ と $y = mx$ に関する対称移動をそれぞれ f , g とする。

- (1) 1次変換 f , g を表す行列を求めよ。
- (2) 合成変換 $g \circ f$ は原点を中心とする回転移動であることを示せ。
- (3) $g \circ f$ が原点を中心とする正の向きに 150° の回転移動となるとき, m の値を求めよ。

【34】 点 $P(1, 1)$ を動かさず, 点 $Q(1, 0)$ を原点からの距離が2の点に移すような1次変換をすべて考える。これらの1次変換で点 $R(1, -1)$ を移したときにできる図形の方程式を求めよ。

【35】 円 $x^2 + y^2 = 1$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換で移して得られ

る曲線を C とする。ただし、 a, b は $a^2 + b^2 \neq 0$ を満たす実数とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) a, b が $a + b = 2$ を満たして動くとき、 C に囲まれる領域の面積 S の最小値を求めよ。

【36】 次の2つの条件をみたす1次変換 f を表す行列を求めよ。

(i) f は点 $(1, 0)$ を点 $(1, 1)$ に移す。

(ii) f は原点を中心とする半径1の円をある円に移す。

第10回

【37】 放物線 $x^2 = 4py$ の準線上の点Pよりこの曲線に2本の接線を引く。

- (1) 2本の接線のなす角は一定であることを示し、その角を求めよ。
- (2) 2つの接点の中点の軌跡を求めよ。

【38】 xy 平面上に放物線 $C: y^2 = 4x$ がある。C上に異なる2点P, Qをとり、Pの x 座標を t とする。いま、点Pは第1象限にあり、点 $H(a, 0)$ が線分PQを $t:2$ の比に内分しているものとする。

- (1) 定数 a の値を求めよ。
- (2) 放物線Cの焦点をFとし、 $\angle PFQ = \theta$ とおく。 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ のとき、 t の値を求めよ。

【39】 xy 平面において、点 $P(a, b)$ が直線 $l: x + y + 1 = 0$ 上を動くとき、
 P を通り l に垂直な直線 m と直線 $ax + by + 1 = 0$ との交点 Q が描く図形を C
 とする。

- (1) C の方程式を求めよ。
- (2) C を原点の周りに正の方向へ 45° 回転させて得られる図形の方程式を求めよ。
- (3) C の概形を図示せよ。

【40】 曲線 $C_1: 11x^2 + 9y^2 - 2\sqrt{3}xy = 24$ を原点の周りに θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

だけ回転して、だ円 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が得られたとする。このとき、

$\theta = \sqrt{\quad} \pi$ で、 $a^2 = \sqrt{\quad}$ 、 $b^2 = \sqrt{\quad}$ である。

上で求めた a^2 、 b^2 の値によって定まるだ円 C_2 を 1 次変換

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって移した曲線を C_3 とする。この C_3 の方程

式は $\sqrt{\quad}$ である。

また曲線 C_3 が直線 $y = m(x - 2)$ と接するとき k^2 を m で表すと

$k^2 = \sqrt{\quad}$ である。

第11回

【41】 2点 $F(a, b)$, $F'(-a, -b)$ を焦点とし, 2つの頂点を結ぶ線分の長さが $2a$ である双曲線およびその漸近線の方程式を求めよ。ただし, a, b は正の定数とする。

【42】 xy 平面上で, 方程式 $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1$ の表す図形を C とする。

(1) C 上の点 (x, y) を原点のまわりに角 θ だけ回転した点を (x', y') とするとき, x', y' が $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 = 1$ の形の方程式をみたすことを示せ。

(2) 上の h が 0 となるときの θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ。

(3) C がだ円であることを説明し, 長軸と短軸の長さを求めよ。

【43】 l を正の定数とし、 $A(l, 0)$ とする。点 $P(x, y)$ (ただし、 $x < l$) から直線 $x = l$ に垂線 PQ を下す。 P が、 $AP + PQ = 2l$ をみたすように動くとき

(1) P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$ のとき、線分 AQ の長さを計算せよ。ただし、 O は原点とする。

【44】 xy 平面において、 x 軸上に中心をもつ半径 2 の円が、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と $x > 0$ なる 2 点で接する。このとき、その円の方程式およびその接点の座標を求めよ。ただし、双曲線と円とが点 P で接するとは、それら 2 曲線がともに P を通り、それらの P における接線が一致することをいう。

第12回

【45】 図のような平行四辺形 $OACB$ がある。

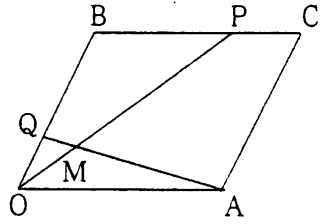
線分 BC を $2:1$ に内分する点を P ，線分

OB を $1:2$ に内分する点を Q とする。

また直線 OP と直線 AQ の交点を M とする。

このとき $\frac{MP}{OM}$ の値を求めよ。また、

$\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{b} = \vec{OB}$ とするとき、 \vec{QM} を \vec{a} ， \vec{b} で表せ。



【46】 点 $(0, 0, 3a)$ を通り、 $(1, 2, 1)$ を方向ベクトルとする直線を l_1 とし、点 $(-1, 2, 0)$ を通り、 $(1, -1, 1)$ を方向ベクトルとする直線を l_2 とする。更に、 l_1 および l_2 に直交する直線を l_3 とし、 l_1 と l_3 、 l_2 と l_3 の交点をそれぞれ P 、 Q とする。

(1) 点 P 、 Q の座標を求めよ。

(2) l_1 と l_2 が交わるときの a の値を求めよ。

【47】 逆行列をもつ任意の行列 P に対して、 $P + A$ が常に逆行列をもつとする。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ とするとき } a, b, c \text{ を求めよ。}$$

【48】 座標平面上の3つのベクトルを $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (3, 8)$, $\vec{w} = (1, -1)$

とし、行列 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ が表す1次変換を f とする。

(1) ベクトル $(1-t)\vec{u} + t\vec{v}$ の大きさの最小値、およびそのときの実数 t の値を求めよ。

(2) $f((1-t)\vec{u} + t\vec{v})$ と \vec{w} が直交するときの実数 t の値を求めよ。

第13回

【49】 2つの平面 $\pi_1: ax - y - z = 1$, $\pi_2: x - 2y + z = 2$ がある。

- (1) π_1 と π_2 のなす角を θ とすると、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ となる正数 a の値を求めよ。
- (2) (1)の a の値に対して、2つの平面 π_1 , π_2 の交線 l の方程式を求めよ。
- (3) l と原点を通る平面 π の方程式を求めよ。

【50】 O を原点とし、放物線 $C: y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 上に2点 P と Q を $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ となるようにとる。

- (1) P と Q が C 上を動くとき、線分 PQ の中点 R はどのような曲線上を動くか。
- (2) 直角三角形 OPQ の面積がとりうる範囲を求めよ。

【51】 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 $AX = XB$ を満たす零行列でない

2×2 行列 X が存在するような実数 a の値を求めよ。

【52】 a, b, c を正の数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \sqrt{3}a & c \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を

f とする。だ円 $4x^2 + 8y^2 = 1$ の f による像が原点を中心とする半径 1 の円であるとき、 a, b, c の値を求めよ。