

目 次

第1回	数列の極限 (I)	4
第2回	数列の極限 (II)	6
第3回	無限級数	8
第4回	行列と数列	10
第5回	場合の数・順列	12
第6回	組合せ・2項定理	14
第7回	確率の定義	16
第8回	確率の計算 (I)	18
第9回	確率の計算 (II)	20
第10回	期待値・分散	22
第11回	統計的推測	24
第12回	総合問題 (I)	26
第13回	総合問題 (II)	28

# 第1回 数列の極限 (1)

【1】(1)  $a > 0$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a^n + (1+a)^n\}^{\frac{1}{n}}$  を求めよ。

0

(2)  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) のとき, 数列  $\{a_n\}$  は極限值  $\sqrt{2}$  をもつことを示せ。

0

【2】(1)  $a$  を実数とすると, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2^n}(\sin^{2^n} a + 1)}{1 + a^{2^n}}$  を求めよ。

(2)  $x > 0$  に対して  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1} - x^k - x^{k+1} + x^{k+2}}{1 + x^{k-1} + x^k + x^{2k-1}}$  とするとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  を求めよ。

【3】(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)^3}{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)^2} = \boxed{\phantom{000}}$  が成立する。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{n^3} = \boxed{\phantom{000}}$

【4】 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  において, 次の命題の真偽を言え。

(1)  $\{a_n + b_n\}$  と  $\{a_n\}$  が収束するならば,  $\{b_n\}$  も収束する。

(2)  $\{a_n b_n\}$  と  $\{a_n\}$  が収束するならば,  $\{b_n\}$  も収束する。

(3)  $\{a_n^2\}$  が収束するならば,  $\{a_n\}$  も収束する。

## 第2回 数列の極限 (II)

- D 【5】 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1=1$ ,  $a_n=1+\frac{1}{n^2}a_{n-1}^2$  ( $n=2,3,4,\dots$ ) で定める。  
このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

- L 【6】  $a_1=1$ ,  $a_2=2$ ,  $a_{n+2}^3 = \frac{a_{n+1}^4}{a_n}$  ( $n \geq 1$ ) で定義される実数列  $\{a_n\}$  の極限を求めよ。

【7】 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1 + x^2$  ,  $a_2 = 1 + x^2 + x^4$  であり、 $n = 3, 4, 5, \dots$  であるときには  $a_n = (1 + x^2) a_{n-1} - x^2 a_{n-2}$  を満たす。

(1)  $n \geq 3$  のとき  $a_n - a_{n-1}$  を  $a_{n-1}$  と  $a_{n-2}$  を使って表せ。

(2)  $n \geq 2$  のとき  $a_n - a_{n-1}$  を  $x$  で表せ。

(3) 数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

(4)  $|x| < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

【8】 数列 $\{x_n\}$ が  $x_1 = 19$ ,  $x_{n+1} = \frac{5x_n + 8}{x_n + 3}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定義されている。

(1)  $y_n = \frac{x_n + a}{x_n + b}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が等比数列となるような定数  $a, b$

( $a < b$ ) を求めよ。

(2) 一般項  $x_n$  を求めよ。

(3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ。

### 第3回 無限級数

【9】(1)  $i^2 = -1$ とし、正の整数  $n$  に対して  $1 + \frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{i}{2}\right)^n = a_n + i b_n$

とおく。ただし、 $a_n, b_n$  は実数とする。このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。

(2) 数列  $\{\theta_n\}$  が  $\cos \theta_n = 1 - \frac{1}{2n^2}$  を満たすとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{\theta_n}{2}$  を求めよ。

○ 【10】 次のそれぞれの無限級数の和を求めよ。ただし定数  $a$  は  $a > 1$  とする。

(1)  $S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}$

(2)  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n}$

(3)  $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^{-n}$

【11】 ある無限数列  $\{a_n\}$  に対して  $S_n = \sum_{r=1}^n a_r$  ( $n=1, 2, \dots$ ) で作られる新しい数列  $\{S_n\}$  が  $(n+1)S_{n+1} - 2nS_n + (n-1)S_{n-1} = 0$  ( $n=2, 3, \dots$ ) なる漸化式を満足しているものとし  $a_1 = A$  で  $S_n \rightarrow B$  ( $n \rightarrow \infty$ ) とする。

(1)  $S_n$  の一般形を  $A, B, n$  を用いて表せ。

(2)  $a_n$  の一般形を  $A, B, n$  を用いて表せ。

【12】  $a_1 = 3, a_{n-1} - a_n = \frac{1}{3} n a_{n-1} a_n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) で与えられる数列がある。

(1)  $a_n \neq 0$  ( $n=2, 3, \dots$ ) であることを示せ。

(2)  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく。  $b_n$  を  $n$  の式で表せ。

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を求めよ。

## 第4回 行列と数列

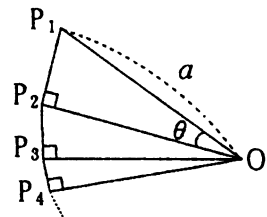
【13】 半径1の円 $C_1$ に内接する正12角形の内接円を $C_2$ とする。円 $C_2$ に内接する正12角形の内接円を $C_3$ とする。一般に円 $C_n$ に内接する正12角形の内接円を $C_{n+1}$ とし、円 $C_n$ の面積を $S_n$ とする。

- (1)  $S_2$  を求めよ。 (2)  $S_n$  を求めよ。  
 (3)  $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を求めよ。

【14】 図において、 $\triangle OP_nP_{n+1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は直角三角形で、 $\angle P_nP_{n+1}O = \text{直角}$ 、

$$\angle P_{n+1}OP_{n+2} = \frac{1}{2} \angle P_nOP_{n+1} \text{ である。}$$

$OP_1 = a$ 、 $\angle P_1OP_2 = \theta$ 、 $P_nP_{n+1} = b_n$  として  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  を求めよ。





【15】 座標平面上の点列  $P_n(x_n, y_n)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) を、次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (1) 線分  $P_1P_2$  の長さ、 $\triangle OP_1P_2$  の面積を求めよ。  
 (2)  $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$  の面積を  $S_n$  とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を求めよ。

【16】  $a, b$  が定数のとき、 $\begin{cases} x = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \\ y = (a - b) \sin \theta \cos \theta \end{cases}$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ) で表される図形を  $C$  とする。

(1)  $C$  はどんな図形であるか。

(2)  $S_n(m) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+m}$ ,  $a_n = \frac{1}{2} S_n(0) - S_n(1) + \frac{1}{2} S_n(2)$ ,

$b_n = \frac{1}{2} S_n(0) - 3S_n(1) + \frac{5}{2} S_n(2)$  とおく。  $C$  の方程式において、

$a, b$  をそれぞれ  $a_n, b_n$  で置きかえてできる図形を  $C_n$  とする。

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $C_n$  はどのような図形に近づくか。その図形をかけ。

## 第5回 場合の数・順列

【17】自然数 $1, 2, 3, \dots, n$  ( $n \geq 2$ )がある。

いまこれらの自然数から相異なる数 $a, b$ を取り出し、1より小さい分数 $\frac{b}{a}$ を作るものとする。

このとき、例えば分数 $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$ 等は異なるものとする。

- (1) これらの分数は全部で何個あるか。
- (2) これらの分数の総和を求めよ。

【18】数字 $1, 2, 3, 4$ を並べてできる順列 $pqrst$ に対し、 $x_1 = p - q,$

$$x_2 = q - r, x_3 = r - s, y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 - x_3,$$

$$z = y_1 - y_2 \text{ とおく。}$$

- (1)  $z$ が最大値  をとる順列は  である。
- (2)  $z=0$  となる順列はちょうど  通りある。

【19】  $1, 2, 3, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) の各数字を1つずつ記した  $n$ 枚のカードがある。これらを  $A, B, C$  の3つの箱に分け入れる。

- (1) 空の箱があってもよいとすると分け方は何通りあるか求めよ。
- (2) どれか1つの箱だけが空になる分け方は何通りあるか求めよ。
- (3) 空の箱があってはならないとすると、分け方は何通りあるか求めよ。

【20】  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  とする。

○  $M$  は  $A \times B$  の部分集合で少なくとも2個の元をもつものとする。 $M$  が次の

- (1), (2), (3) のおのおの場合に、そのような部分集合  $M$  の個数を求めよ。
- (1)  $(a, b) \in M$ ,  $(a, b') \in M$  ならば,  $b = b'$  が成り立つ。
- (2) (1) の条件に付け加えて, 更に  $(a, b) \in M$ ,  $(a', b) \in M$  ならば,  $a = a'$  が成り立つ。
- (3)  $M$  の相異なる任意の2元  $(a, b)$ ,  $(a', b')$  に対して,  $a < a'$  かつ  $b < b'$ , または  $a > a'$  かつ  $b > b'$  のいずれかが成り立つ。

## 第6回 組合せ・2項定理

【21】数直線上の整数点  $x=1, 2, 3, \dots, n$  に、合計  $n$  個の黒または白の石を1つずつ、黒石どうしは隣り合わないように置く。黒石を3個使う置き方は何通りあるか。ただし  $n \geq 5$  とする。



【22】  $n$  を正の整数とするとき、座標空間において原点から点  $(n, n, n)$  へ行く最短経路を考える。ただし、経路は整数座標の点のみを結ぶ座標軸のいずれかに平行な線分からなるものとする。

- (1) 原点から点  $(n, n, n)$  へ行く最短経路の総数を求めよ。
- (2) 原点から点  $(2, 2, 2)$  へ行く最短経路のうちで  $(1, 1, 1)$  を通らないものの総数を求めよ。
- (3) 原点から点  $(3, 3, 3)$  へ行く最短経路のうちで点  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$  のいずれも通らないものの総数を求めよ。

- 【23】 (1) 連比  ${}_nC_r : {}_nC_{r+1} : {}_nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$  をみたす整数の組  $(n, r)$  を求めよ。ただし、 $n \geq r+2$ ,  $r \geq 0$  とする。
- (2) 連比  ${}_nC_r : {}_nC_{r+1} : {}_nC_{r+2} = 1 : m : 2m$  をみたす整数の組  $(m, n, r)$  を求めよ。ただし、 $n \geq r+2$ ,  $r \geq 0$ ,  $m > 0$  とする。

【24】  $n$  を 2 以上の整数,  $r$  を正の実数とする。2 項展開

$$(1+r)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 r + \cdots + {}_nC_n r^n$$

の各項を

$$a_k = {}_nC_k r^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

で表し、あい続く項の比を

$$b_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

とする。

- (1)  $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $\frac{1}{n} \leq r < n$  のとき、ある番号  $m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) に対して不等式

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} \leq a_m, \quad a_m > a_{m+1} > \cdots > a_n$$

が成り立つことを示せ。

- (3)  $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^{99}$  の 2 項展開で、最大項  $a_m$  の番号  $m$  を求めよ。

## 第7回 確率の定義

【25】さいころを3回投げるとき、出る目の積が100より大きい確率を求めよ。

【26】  $n$ は3以上の自然数である。赤玉と白玉合わせて  $n$ 個ずつ入ったつぼが、  
 $\frac{n(n-1)}{2}$  個あり、その内訳は次のようになっている。

各  $m=1, 2, \dots, n-1$  について、 $m$ 個の赤玉と  $n-m$ 個の白玉の入っているつぼがちょうど  $m$ 個ある。

いま、これらのつぼの1つを無作為にとり、さらにそのつぼの中から1つの玉を無作為に取り出すとき、その玉が白玉である確率を求めよ。

【27】 1から $m$ までの番号が1つずつ書いてある $m$ 枚のカードが入っている箱がある。この箱から1枚取り出してはまたもとにもどす操作を $n$ 回繰り返し、第 $i$ 回目に取り出されたカードの番号を $a_i$ とする。

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  となる確率を  $p(m, n)$  で表すとき、次の値を求めよ。

- (1)  $p(2, n)$    (2)  $p(3, n)$    (3)  $p(4, 7)$    (4)  $p(4, n)$

【28】 4人でジャンケンをし、負けたものが順次去って、残りでジャンケンをして、勝者が1人になるまで続けるものとする。また、4人はそれぞれ独立に、グー（石）、チョキ（はさみ）、パー（紙）を確率  $\frac{1}{3}$  で出すものとする。

- (1) 1回でゲームが終了する確率  $p_1$  および2回目の勝負が $m$ 人 ( $m=2, 3, 4$ ) で行われる確率  $p_m$  を求めよ。  
(2) 2回でこのゲームが終了する確率  $q$  を求めよ。

## 第8回 確率の計算(I)

【29】正四面体  $ABCD$  の1つの頂点にある動点  $P$  は、等しい確率  $\frac{1}{3}$  で他の3つ

の頂点のいずれかに移動するものとする。

(1) 頂点  $A$  から出発した  $P$  が3回目に  $A$  に戻る確率を求めよ。

(2) 頂点  $A$  から出発した  $P$  が頂点  $B$  をちょうど1回通って4回目に  $A$  に戻っている確率を求めよ。



【30】サイコロを7回くり返し投げ、 $n$  回目に出た目の数が、3の倍数ならば  $X_n = 2$  とし、3の倍数でないならば  $X_n = -1$  とする。

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (1 \leq n \leq 7)$$

とするとき、 $S_2 = 1$  かつ  $S_7 = 2$  となる確率を求めよ。





【31】  $n$ 個の球が入っている袋がある。各球の色は白か赤のいずれかである。この袋から球を1個取り出し、色を見た後に、元に戻す試行を考える。2つの事象  $A, B$  をそれぞれ

$A$  : 2回の試行で、赤球が1回以上取り出される

$B$  : 4回の試行で、赤球が2回以上取り出される

とすると、確率  $P(A), P(B)$  の大小を比較せよ。

【32】 座標平面上に2つの動点  $A, B$  がある。時刻  $t=0$  のとき、 $A$  の位置は  $(0, 0)$ 、 $B$  の位置は  $(6, 6)$  である。以後、各時刻  $t=1, 2, \dots$  に硬貨を投げてその結果により  $A, B$  を次のように移動させる。表が出たら、 $A$  は  $(x, y)$  から  $(x+1, y)$  へ、 $B$  は  $(x, y)$  から  $(x-1, y)$  へ移動させ、裏が出たら、 $A$  は  $(x, y)$  から  $(x, y+1)$  へ、 $B$  は  $(x, y)$  から  $(x, y-1)$  へ移動させる。ただし、硬貨の表、裏の出る確率はともに  $\frac{1}{2}$  とする。

- (1) 1枚の硬貨を投げ、 $A, B$  ともにその結果に従って移動させていくとき、両者が出会う確率  $p$  を求めよ。
- (2) 2枚の硬貨  $a, b$  を投げ、 $A$  は  $a$  の結果に、 $B$  は  $b$  の結果に従って移動させていくとき、両者が出会う確率  $q$  を求めよ。

## 第9回 確率の計算(II)

【33】袋の中に白球が $n$ 個、赤球が $2n$ 個入っている。ただし、 $n \geq 1$ である。

この袋から次の(A), (B), (C)の3通りの方法で3個の球を取り出すとき、そのうちの1個が白球で2個が赤球である確率をそれぞれ  $p_1, p_2, p_3$  とする。

(A) 1個ずつ3回球を取り出す。ただし、取り出した球はそのつど袋の中に戻す。

(B) 1回目に1個の球を取り出し、それを袋の中に戻してから、2回目に2個の球を取り出す。

(C) 一度に3個の球を取り出す。

(1)  $p_1, p_2, p_3$  を求めよ。

(2)  $p_1, p_2, p_3$  の大小を比べよ。

○

【34】 $A, B, C$ の3つのランプがある。ランプは、①つねにどれかひとつが点灯しており、2つ以上が点灯していることはない。②どのランプも点灯して1秒後には必ず消え、その瞬間に残りの2つのうちのどちらか一方がいずれも  $\frac{1}{2}$  の確

率で点灯する。いまランプ  $A$  が点灯したものとして、これから  $n$  秒後にランプ  $A$  が点灯する確率を  $P(n)$ 、ランプ  $B$  が点灯する確率を  $q(n)$  とする。このとき

(1)  $p(n) = q(n-1)$  を示せ。

(2)  $2p(n) + p(n-1) = 1$  を示せ。

(3)  $p(n)$  を求めよ。

○

【35】硬貨を $n$ 回続けて投げるとき、表が連続して出ることはない確率を $p_n$ とする。

- (1)  $p_n$  を  $p_k$  ( $k < n$ ) を用いて表せ。ただし、 $n \geq 3$  とする。
- (2)  $p_{10}$  を求めよ。

【36】硬貨を $n$ 回投げる。このとき、1回以上表が出、かつ1回以上裏が出る事象を $A$ 、表が0回または1回出る事象を $B$ 、表が3回出る事象を $C$ とする。

- D
- (1)  $n=2$ のとき、事象 $A$ と $B$ は独立か従属かを調べよ。
  - (2)  $n=3$ のとき、事象 $A$ と $B$ は独立か従属かを調べよ。
  - (3) 事象 $C$ の確率が最大となる回数 $n$ と、そのときの確率を求めよ。

## 第10回 期待値・分散

【37】 1つのさいころを3回振って出る目を順に  $X_1, X_2, X_3$  とし、

$$X = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \text{ とおく。}$$

- (1)  $X$  の期待値  $E(X)$ , 分散  $V(X)$  を求めよ。  
(2) 期待値  $E\{(X_1 - X)^2 + (X_2 - X)^2 + (X_3 - X)^2\}$  を求めよ。

○

【38】 つぼの中に、4個の白いボールと6個の赤いボールが入っている。いま、つぼの中から4個のボールを取り出したとき、その中に含まれる赤いボールの個数を  $X$  とする。このとき確率変数  $X$  の期待値と分散を求めよ。

○

【39】 確率変数  $X$  のとり得る値は  $1, 2, \dots, n$  のいずれかで、 $X = k$  となる確率は  $p_k$  であるとする ( $1 \leq k \leq n$ )。  $X \leq k$  となる確率が  $ak^2$  であるとき、次の問いに答えよ。

(1)  $p_k$  を  $n$  と  $k$  とで表せ。

(2)  $X$  の平均値 (期待値) を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k}{n}} p_k$  を求めよ。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

○ 【40】  $n$  個の製品中に 2 個の不良品が含まれているものとする。この中から元に戻さないで 1 個ずつ無作為に選んで検査していくとき、第  $X$  回目に 2 個目の不良品が取り出されたとする。

(1) 与えられた自然数  $k$  ( $k \geq 2$ ) に対して  $X = k$  となる確率を求めよ。

(2)  $X$  の期待値を  $n$  の式で表せ。

(3)  $X$  の分散  $V(X)$  を  $n$  の式で表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{18}{n^2} V(X) \right)^n$  を求めよ。

## 第11回 統計的推測

【41】3つのかご  $A, B, C$  に卵がそれぞれ2個, 4個, 4個入っている。かご  $A$  の卵の重さの平均値は50g, 標準偏差は1gで, かご  $C$  の卵の重さの平均値は60g, 標準偏差は2gである。かご  $B$  の卵はどれも, かご  $A$  の卵よりも重く, かご  $C$  の卵よりも軽い。そしてその重さは

$$55 \quad 56 \quad 54 \quad 55 \quad (\text{単位はg})$$

である。また, 3つのかごの重さをそれぞれ  $a, b, c$  (単位はg) とするとき

$$a + b + c = 270, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 24306$$

である。このとき, 次の値を求めよ。

- (1) 10個の卵の重さの平均値。
- (2) 10個の卵の重さの中央値 (メジアン)。
- (3) 3つのかごの重さの標準偏差。
- (4) 10個の卵の重さの標準偏差。

【42】確率変数  $X$  は二項分布  $B(n, p)$  に従い, その分散は  $\frac{8}{9}$  で,  $X$  が  $n-1$  を

とる確率は  $X$  が  $n$  をとる確率の8倍である。このとき

- (1) この二項分布の式を求めよ。
- (2) この二項分布の平均値を  $m$ , 標準偏差を  $\sigma$  とするとき, 確率  $P(|X - m| > \sigma)$  を求めよ。
- (3)  $X^2 - 3X + 2$  の期待値を求めよ。

- 【43】ある大学において、昨年度の男子学生全体の身長の平均値は170.0cm、標準偏差は7.5cmであった。今年度の男子学生の中から無作為に100人選んで身長を調べたところ、平均値が168.0cmであった。このことから、今年度の男子学生の身長平均値は、昨年度に比べて変わったといえるか。5%の有意水準（危険率）で検定せよ。ただし、

$$\int_0^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.475 \text{ である。}$$

○

- 【44】次の標本は正規母集団  $N(a, 10^2)$  が抽出されたものである。

28 13 16 28 29 12 14 12 10

次の問いに答えよ。

- (1)  $a = 25$ といえるか。有意水準（危険率）5%で検定せよ。

ただし、
$$\int_0^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.475 \text{ とする。}$$

- (2)  $a$  の信頼度95%の信頼区間を求めよ。

○

## 第12回 総合問題 (1)

【45】 次のような塗り分け方は何通りあるか。

- (1) 正六面体の1つの面を赤, 2つの面を白, 3つの面を青とする。
- (2) 正八面体の1つの面を赤, 1つの面を白, 6つの面を青とする。
- (3) 正八面体の1つの面を赤, 2つの面を白, 5つの面を青とする。

ただし, (1), (2), (3) のいずれの場合も, 回転して同一にできる塗り分け方は, 同じものとみなす。

△

【46】  $n$  が正の整数のとき,  $\sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k$  の値を計算せよ。

○



【47】正六角形の頂点を反時計まわりの順に、 $A_0, A_1, \dots, A_5$  とし、次のルール (i), (ii), (iii) に従ってゲームを行う。

(i)  $A_0$  を出発点とする。

(ii) コインを投げ、表が出たら反時計まわりに隣の頂点に移動し、裏が出たら、時計まわりに隣の頂点に移動する。

(iii)  $A_0$  の反対側の頂点  $A_3$  に到達したらゲームは終了する。

整数  $n$  ( $n \geq 0$ ) に対して、

$p_n$  :  $(2n+1)$  回コインを投げ移動を行ってもゲームの終了しない確率

$q_n$  : ちょうど  $(2n+1)$  回目の移動によってゲームの終了する確率とする。コインを投げたとき、表裏の出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  ずつである。

$p_n$  および  $q_n$  を求めよ。

【48】数直線上の動点  $P$  は、原点  $O$  を出発して、サイコロを振るたびに、次の規則に従って動くものとする。

偶数の目が出たとき 正の向きに2進み、奇数の目が出たとき 正の向きに1進む。

動点  $P$  が、点  $n$  に到達する確率を  $p_n$  で表す。 $n$  は自然数とする。

(1)  $p_1, p_2$  を求めよ。

(2)  $p_{n+2}, p_{n-1}, p_{n-2}$  の間に成り立つ関係式を求めよ。(ただし、 $n \geq 3$ )

(3)  $p_n$  を  $n$  の式で表せ。(ただし、 $n \geq 3$ )

## 第13回 総合問題 (II)

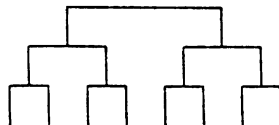
【49】一辺の長さが1の正方形と、一辺の長さが2の正方形でできたタイルが多数大きな袋に入っている。でたらめにタイルを一枚取り出すとき、小さいタイルが取り出される確率を $p$ 、大きいタイルが取り出される確率を $q=1-p$ とする。

縦の長さが3、横の長さが6の長方形に、取り出されたタイルを敷きつめていくとき、ちょうど $n$ 回でこの長方形が過不足なく敷きつめられる確率を求めよ。

○

【50】2<sup>n</sup>人の選手がトーナメント（図のような組合せの試合方法）で優勝を争う。選手Aは他のどの選手にも確率 $p$ で勝つものとし、A以外の選手の力は互角であるとする。トーナメントの組合せはくじで決める。このときつぎを求めよ。

- (1) Aが優勝する確率
- (2) Aが行う試合の数の期待値
- (3) A以外の特定の選手Bが優勝する確率



○

【51】正 $N$ 角形 ( $N \geq 3$ ) の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計回りに番号がつけてある。頂点 $0$ を出発点とし、サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計回りに移動し、着いた頂点の番号を $X$ とする。次にもう1度サイコロを投げて出た目の数だけ、頂点 $X$ から時計回りに移動し、着いた頂点の番号を $Y$ とする。このようにして定めた確率変数 $X, Y$ について

(1)  $N=5$  のとき、 $X, Y$  は互いに独立か。

(2)  $N=6$  のとき、 $X, Y$  は互いに独立か。

ただし、確率変数 $X, Y$  が互いに独立であるとは、 $X=i$  となる確率

$P(X=i)$ と $X=i$ かつ $Y=j$ となる確率 $P(X=i, Y=j)$ との間に等式

$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$ が任意の $i, j (0 \leq i, j \leq N-1)$ について成り立つことである。



【52】袋の中に、はじめ $(n-1)$ 個の白球と1個の黒球が入れてある。この袋の中から無作為に1球を取り出し、白球であればかわりに1個の黒球を入れる。この操作をくりかえして、 $X$ 回目に初めて黒球を取り出したとする。

(1)  $k$ を正の整数とするとき、 $X=k$ である確率を求めよ。

(2)  $X=k$ のとき、 $\frac{n^k (n!)}{k!}$ 円を受けとることとする。受けとる金額の期待値を求めよ。