

## は し が き

この講座は1学期に続いて『基礎解析』の内容を最近の入試問題を用いて、実戦力をつけることを目標にしている。

ハイクラス(H)は入試問題の“標準”から“やや難”の問題  
(国立理系, 難関私立理系)

スタンダード(S)は入試問題の“基本”から“標準”の問題  
(国立文系, 中堅私立理系)

ベーシック(B)は入試問題の“基本”の問題  
(私立文系)

のように選んであります。

2学期の学習は“考え方”“解き方”を完全に身につけることで、これによって実力をアップしてもらいたい。そのためには1学期と同様に、次の点に留意して下さい。

1. 週1回の授業で時間的に少ないから、教科書、参考書などで、基本事項の確認をしておくこと。
2. 毎回4個ずつ解説するから、前もって自分で考え、ノートに解いてみること(解けない場合は途中まででよい)。
3. 90分の講義では問題の要点をつかむことを心掛けること。
4. 必ず復習して重要事項を完全に覚え込むこと。
5. 理解できないところがあれば遠慮なく質問して身につけること。

以上であるが、数学は簡単に実力がつくものではない。時間をかけてコツコツ努力することが大切であるから途中でくじけないように頑張ってもらいたい。

目

次

§ 1. 三角関数 . . . . . 4

§ 2. 指数関数・対数関数 . . . . . 8

§ 3. 数列 . . . . . 10

§ 4. 微分法 . . . . . 16

§ 5. 積分法 . . . . . 20

総合演習 (1) . . . . . 26

総合演習 (2) . . . . . 28

## § 1. 三角関数

【1】 次の各問いに答えよ。

- (1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  と  $\sin 1$  の大小を比較せよ (理由を述べよ)。
- (2)  $\sin 2$  と  $\sin 3$  の大小を比較せよ (理由を述べよ)。
- (3)  $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$  を小さいものから順にならべよ。

【2】  $\sin z = \sin x + \sin y, \cos z = \cos x + \cos y$  のとき,

- (1)  $2 \cos(x - y) + 1 = 0$  を証明せよ。
- (2)  $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$  を証明せよ。

【3】 (1)  $\sin 3\theta$  を  $\sin\theta$  の式で表せ。

(2)  $\cos 2\theta = x$  とおくとき、 $\frac{\sin(3\theta + 2\theta) + \sin(3\theta - 2\theta)}{\sin\theta}$  を  $x$  の式で表せ。

(3)  $\cos 72^\circ$  の値を求めよ。

【4】 関数  $f(x) = |2\sin^2 x + 4\sin x - \cos 2x - 2|$  の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

【5】 三角形ABCにおいて、 $\angle A = 60^\circ$  であるとする。

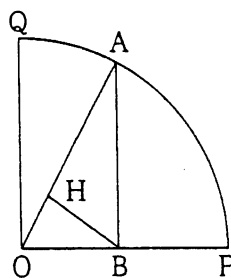
- (1)  $\sin B + \sin C$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2)  $\sin B \sin C$  のとりうる値の範囲を求めよ。

【6】 半径 $R$ の円に内接する二等辺三角形ABCの底角を $\beta$ とするとき

- (1)  $\triangle ABC$ の面積 $S$ および周囲の長さ $l$ を $R$ と $\beta$ とを用いて表せ。
- (2)  $x = \frac{S}{Rl}$  とし、 $x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

【7】 半径1, 中心角が  $\frac{\pi}{2}$  の右図のような扇形

がある。弧PQ上の点AからOPに垂線ABを  
おろし, つぎに点BからOAに垂線BHをおろ  
す。  $\angle AOP = \theta$  とおく。



(1)  $AH + BH$  を  $\theta$  を用いた式で表せ。

(2)  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $AH + BH$  の最大値およびそのとき  
の  $\theta$  を求めよ。

【8】 円  $C_1: (x + \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$  上の動点Pと, 円  $C_2: (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$

上の動点Qがある。Pは  $P_0(-\sqrt{2}, 1)$  から, Qは  $Q_0(\sqrt{2} + 1, 0)$  から  
同時に出発してともに秒速1で反時計回りにそれぞれの円周上を1周する。

(1) 原点Oからの距離OP, OQが等しくなるのは, 出発何秒後か。また, そ  
のときの距離OPを求めよ。

(2) 3点O, P, Qが出発後初めて同一直線上になるときのP, Qの座標を求め  
よ。

## § 2. 指数関数・対数関数

【9】 次の問いに答えよ。

(1)  $a, b, c, x, y, z$  は正の数で,  $a \neq 1$  とする。  $a^x = b^y = c^z$  と

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$  が成り立つとき,  $c$  を  $a, b$  を用いて表せ。

(2) 実数  $x, y, z$  の間に  $2^{x+1} + 3^y - 5^z = 10$ ,  $2^{x+3} + 3^y + 5^{z+1} = 58$  なる関係があるとき,

①  $2^x$  のとりうる値の範囲を求めよ。

②  $4^x + 3^{y+1} + 5^z$  のとりうる値の範囲を求めよ。

【10】 次の問いに答えよ。

(1)  $x > 1$  で,  $\log_2 x = \log_3 y = \log_4 z = \log_5 w$  のとき,  $x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{3}}, z^{\frac{1}{4}}, w^{\frac{1}{5}}$  の大小を比較せよ。

(2)  $a^2 < b < a < 1$  であるとき,

$$\log_a b, \log_b a, \log_a \frac{a}{b}, \log_b \frac{b}{a}, \frac{1}{2}$$

を大小の順に並べよ。

【11】  $1 < a < b < a^2 < 100$  を満たす整数  $a, b$  の組で  $\log_a b$  が有理数となるものをすべて求めよ。

【12】  $0 < x < 1$  として、不等式

$$\log_x(3x^2 - 10x + 7) \geq 2$$

を考える。この不等式をみたすすべての  $x$  ( $0 < x < 1$ ) に対して、

$$x^2 - 2ax \geq 1$$

が成り立つような  $a$  の範囲を求めよ。



### § 3. 数 列

【13】  $0 < a < b$  とする。 $a, x, y, b$ はこの順に等差数列であり、 $a, u, v, b$ はこの順に等比数列である。

- (1)  $x, y, u, v$ を $a$ と $b$ で表せ。
- (2) 不等式  $x + y > u + v$  を証明せよ。

【14】  $k$ が正整数で $2^k - 1$ が素数であるとする。 $a = 2^{k-1}(2^k - 1)$ のすべての約数(1と $a$ を含む)を $a_1, a_2, \dots, a_n$ とすると、

- (1)  $\sum_{i=1}^n a_i$  を求めよ。
- (2)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$  を求めよ。

【15】 分数を次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

- (1)  $\frac{18}{25}$  は初めから数えて第何項目にあるか。
- (2) 初めから数えて第666項目にある分数は何か。
- (3) 初項から第666項目までの和を求めよ。

【16】 自然数  $n$  に対して  $3^n - \frac{1}{3^n}$  と  $3^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$  の間にある整数の個数を  $a_n$

とすると、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (2)  $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n}$  を求めよ。

【17】  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で定まる数列  $\{a_n\}$  がある。

$b_n = \log_2 a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とするとき

(ア)  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ。また  $b_4$  を求めよ。

(イ) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。

(ウ)  $a_n > 2^{1.98}$  となる最小の  $n$  を求めよ。  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とせよ。

【18】  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} + 3 = 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) で定義される数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

【19】 数列  $\{a_n\}$  が漸化式  $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $a_1 = 0$  で与えられて

いる。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $x = \frac{3x + 2}{x + 2}$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とする。いま、 $b_n = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$

とするとき、数列  $\{b_n\}$  は等比数列となることを示せ。

(2)  $a_n$  を求めて、 $a_n < \alpha$  であることを示せ。

【20】 2つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が次の関係式

$$a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7, b_{n+1} = 3a_n + 5b_n$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

で定められているとき、一般項  $a_n, b_n$  を求めよ。

【21】 数列  $\{a_n\}$  を,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n + 3}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) によって定める。

(1)  $a_{n+1} < a_n$ ,  $0 < a_n \leq 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を示せ。

(2) 数学的帰納法によって  $a_n \leq \frac{1}{5^{n-1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を証明せよ。

【22】  $a_1 = 3$ ,  $a_n^2 = (n+1)a_{n+1} + 1$  ( $n \geq 1$ )

で定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

【23】  $n$  を自然数とする。すべての正の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対して、不等式

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

の成立することを数学的帰納法により証明せよ。また、等号が成立するのはどのようなときか。

【24】  $n$  が自然数のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sqrt{2n+1} - 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \sqrt{2n}$$

## § 4. 微分法

- 【25】 (1)  $x$ に関する整式  $f(x)$  が  $(x-a)^2$  で割り切れるための必要十分条件は、 $f(a)=0$ 、 $f'(a)=0$  であることを示せ。
- (2)  $n$ を自然数とすると、整式  $f_n(x)=a_n x^{n+1}+b_n x^n+1$  が  $(x-1)^2$  で割り切れるように  $a_n$ 、 $b_n$  を定めよ。
- (3) (2)の  $f_n(x)$ を  $(x-1)^2$  で割ったときの商を求めよ。

- 【26】  $y=x^3$  上の異なる2点を  $P(a, a^3)$ 、 $Q(b, b^3)$  とし、 $P$ における接線と  $Q$ における接線が  $\frac{\pi}{3}$  の角をなすとする。
- (1)  $a$  と  $b$  の間の関係式を求めよ。
- (2) このような2点が存在する  $a$  の範囲を求めよ。

【27】 関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$  が極大値をもたないための  $a, b$  の条件を求め、その条件を満たす点  $(a, b)$  の範囲を図示せよ。

【28】 関数  $f(x) = x^4 + bx^3 + 6ax^2 - 4a^2x$  が極大値をもち、さらに、 $x = a$  で極小値をもつとする。

- (1)  $a \neq 0$  であることを示せ。
- (2)  $b$  を  $a$  で表せ。
- (3)  $a$  のとりうる値の範囲を求めよ。



【29】 放物線  $y = x^2$  の法線で点  $(a, b)$  を通るものが少なくとも2本存在するために、 $a, b$  が満たすべき条件を求めよ。ただし、曲線の法線とは、その曲線上の1点でその点における接線と直交する直線のことである。

【30】 関数  $f(x) = |x^3 - 3a^2x|$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最大値  $M(a)$  を求めよ。ただし、 $a \geq 0$  とする。さらに、 $M(a)$  を最小にする  $a$  の値を求めよ。

【31】 方程式  $2x^3 - 3x^2 - 12x - p = 0$  が異なる3つの実数解  $\alpha, \beta, \gamma$  をもつとき、次の問に答えよ。

(1) 実数  $p$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $\alpha < \beta < \gamma$  であるとき、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値の範囲を不等式で表せ。

【32】 点  $(a, 2)$  を通って、曲線  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  に接線を引く。接線が1本引けるような  $a$  の値の範囲は  である。また、接線が2本引けるような  $a$  の値は  である。

## § 5. 積 分 法

【33】  $x$ が実数のとき3数  $5x$ ,  $-3x^2+6x$ ,  $x^3-2x^2-3x$  の最大値を

$M(x)$ とする。 $\int_{-2}^3 M(x) dx$  を求めよ。

【34】 三次またはそれ以下の任意の整式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  に対して

つねに

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = u f(s) + v f(t)$$

が成り立つような定数  $u$ ,  $v$ ,  $s$ ,  $t$  を求めよ。ただし,  $s < t$  とする。

【35】  $t$  の関数  $f(t) = \begin{cases} 2 - |t| & (|t| \leq 2) \\ 0 & (|t| > 2) \end{cases}$  について,

$x$  の関数  $y = \int_0^2 f(t+x) dt$  のグラフをかけ。

【36】  $x$  の整式  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が,  $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ ,

$x^2 f_{n+1}(x) - x^3 + x^2 = \int_0^x t f_n(t) dt$  を満たすものとする。

- (1)  $f_2(x)$  を求めよ。
- (2)  $f_n(x)$  は  $x$  の 2 次式であることを示せ。
- (3)  $f_n(x)$  を求めよ。

【37】 放物線  $C_1: y = a^2 x^2 + b x + c$  の上の点  $P$  から

放物線  $C_2: y = a^2 x^2 + b x + d$  (ただし,  $c < d$ )

にひいた2接線の接点を  $Q, R$  とし, 線分  $PQ, PR$ , および放物線  $C_2$  で囲まれる部分の面積を  $S$  で表す。

このとき,  $S$  は点  $P$  の位置に関係なく一定であることを示せ。

【38】 2つの曲線  $y = x^3 - x$  と  $y = x^2 - a$  ( $a > 0$ ) が1点  $P$  を通り,  $P$  に

おいて共通の接線をもっている。

(1)  $a$  の値を求めよ。

(2) 2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

【39】  $f(x) = x^3 - x^2$  とする。曲線  $y = f(x)$  上の点  $A(1, 0)$  における接線が再びこの曲線と交わる点を  $B$  とする。曲線  $y = ax^2 + bx + c$  と曲線  $y = f(x)$  が点  $A, B$  を共有し、更に  $A$  と  $B$  のあいだにもう1つの共有点をもつとき、この2曲線の囲む部分の面積を求めよ。また、その面積が最小となるように  $a, b, c$  を定めよ。

【40】  $x, y$  平面上に、海を隔てて2国  $A, B$  がある。 $A$  の領土は不等式  $x^2 + (y - 7)^2 \leq 4$  で表される領域であり、 $B$  の領土は不等式  $y \leq 0$  で表される領域であるという。

いま  $A$  の領海を次の3条件(1), (2), (3)を満たす点  $P$  全体の集合と定める：

- (1)  $P$  は  $A, B$  いずれの領土にも含まれない。
- (2)  $P$  と  $A$  の領土との間の最短距離は4より小さい。
- (3)  $P$  と  $A$  の領土との間の最短距離は、 $P$  と  $B$  の領土との間の最短距離より小さい。

$A$  の領海の面積を求めよ。

【41】  $x y z$  空間における底面の半径1, 高さ2の直円柱

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

を考える。

いま  $T$  の上底  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2\}$  の直径  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2, y = 0\}$  を通り,  $z$  軸と45度の角をなす2つの平面を  $\alpha, \beta$  とするとき,  $T$  の  $\alpha$  および  $\beta$  の下側にある部分の体積  $V$  を求めよ。

【42】 曲線  $C : y = x^2 - 4$  に点  $P(2, -9)$  から2本の接線をひき, 接点をそれぞれ  $Q(a, b), R(c, d)$  (ただし,  $a < c$ ) とする。このとき, 次の問に答えよ。

(1)  $a, b, c, d$  を求めると

$$a = -\boxed{\text{ア}}, b = -\boxed{\text{イ}}, c = \boxed{\text{ウ}}, d = \boxed{\text{エ}}$$

となる。また, 接線  $PQ$  の方程式は

$$y = -\boxed{\text{オ}}x - \boxed{\text{カ}}$$

であり, 接線  $PR$  の方程式は

$$y = \boxed{\text{キ}}x - \boxed{\text{ク}}$$

である。

(2) 2本の接線  $PQ, PR$  および曲線  $C$  とで囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに回

転してできる立体の体積は  $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$  である。

【43】 2点  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 2, 1)$  を通る直線を  $l$  とする。

- (1) 線分  $AB$  を  $t : (1 - t)$  に内分する点  $P$  の座標を求めよ。ただし,  $0 < t < 1$  とする。
- (2)  $P$  から  $z$  軸に下した垂線の足を  $Q$  とするとき, 線分  $PQ$  の長さを  $t$  を用いて表せ。
- (3) 直線  $l$  を  $z$  軸を軸として1回転した曲面と, 2平面  $z = 0$ ,  $z = 1$  とで囲まれた立体の体積を求めよ。

【44】 直線  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} = z+1$  に接し, 中心が  $(0, 0, c)$ , 半径が1の球

$S$  がある。平面  $-2x + 6y - 3z - 2 = 0$  により分けられる球  $S$  の2つの部分のうち, 大きい方の体積を求めよ。ただし,  $c > 0$  とする。



## 総合演習(1)

【45】 方程式  $(\log_{10}(ax) - 1)(\log_{10}(ax^2) - 1) = 16$  の解がすべて1より大きいとする。このとき、定数  $a$  のとりうる値の範囲は

$< a < 10^{\text{$  である。

【46】 次の関係式で定義される2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) がある。

$$a_1 = b_1 = 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

このとき、次の問に答えよ。

(1)  $a_n^2 - 2b_n^2$  を求めよ。

(2) 不等式  $\left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| > \left| \sqrt{2} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right|$  が成り立つことを証明せよ。

- 【47】 曲線  $y = x^3 - 3x^2$  を  $C$  とし、 $x$  座標が  $-1$  および  $p$  である  $C$  上の点を、それぞれ  $A, P$  とする。直線  $AP$  に平行な  $C$  の接線が  $-1 < x < p$  で、ただ1つになるような、 $p$  の範囲を求めよ。

【48】  $f(x) = 12 \int_x^{x+1} |t^3 - 5t^2 + 6t| dt$  とする。ただし、 $0 \leq x \leq 2$  である。

$$(1) f(x) = \begin{cases} \begin{matrix} \text{ア} \square x^3 - \text{イ} \square x^2 + \text{ウ} \square x + \text{エ} \square & (0 \leq x \leq \text{オ} \square) \\ -\text{カ} \square x^4 + \text{キ} \square x^3 - \text{ク} \square x^2 - \text{ケ} \square x + \text{コ} \square & (\text{オ} \square \leq x \leq 2) \end{matrix} \end{cases}$$

(2)  $f(x)$  は  $x = \frac{\text{サ} \square}{\text{シ} \square}$  で最大となり、 $x = \frac{1}{4} (\text{ス} \square + \sqrt{\text{セ} \square})$  で最小となる。

(3)  $x$  の方程式  $f(x) - k = 0$  の実数解(重解を除く)が、閉区間  $0 \leq x \leq 2$  においてただ1つ存在するための  $k$  の範囲は、 $\frac{\text{ソ} \square}{\text{タ} \square} < k < \frac{\text{チ} \square}{\text{ツ} \square}$  である。

## 総合演習 (2)

【49】  $\theta = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  とするとき、 $\theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 = \frac{\theta^m}{1-\theta^m} + \frac{\theta^n}{1-\theta^n}$

を満足する自然数の組  $(m, n)$  のすべてを求めよ。ただし、 $1 \leq m \leq n \leq 4$  とし、

$i = \sqrt{-1}$  とする。

【50】 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) を  $0 < a_1 < b_1$ ,  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2b_n}$ ,  
 $2b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n$  で与える。このとき、次の各式が成り立つことを証明せよ。

- (1)  $a_2 < b_2 < b_1$
- (2) 任意の正の整数  $n$  に対して  $b_n > a_{n+1}$
- (3) 2以上の任意の整数  $n$  に対して  $b_n < b_1$

【51】 曲線  $y = x^3 + ax + b$  は相異なる2点P, Qを通り, 点Pにおける接線は直線  $y = -x$  で, 点Qにおける接線は点Qにおいて直線  $y = -x$  に直交する。

- (1) 点Pの $x$ 座標を $p$ , 点Qの $x$ 座標を $q$ とすると,  $q = -2p$  を証明せよ。
- (2)  $a, b$  の値を求めよ。

【52】 関数  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(2a-1)x - a + 2$  の区間  $-1 \leq x \leq 1$  における最大値は実数 $a$ の関数と考えられるので, それを  $g(a)$  とおくと

- (1)  $g(a)$  を求めよ。
- (2)  $\int_0^2 |g(t) - 4| dt$  を求めよ。