

は し が き

この講座は1学期に続いて『数 学 I』の内容を最近の入試問題を用いて、実戦力をつけることを目標にしている。

ハイクラス(H)は 入試問題の“標準”から“やや難”の問題
(国立理系, 難関私立理系)

スタンダード(S)は 入試問題の“基本”から“標準”の問題
(国立文系, 中堅私立理系)

ベーシック(B)は 入試問題の“基本”の問題
(私立文系)

のように選んであります。

2学期の学習は“考え方”“解き方”を完全に身につけることで、これによって実力をアップしてもらいたい。そのためには1学期と同様に、次の点に留意して下さい。

1. 週1回の授業で時間的に少ないから、教科書、参考書などで、基本事項の確認をしておくこと。
2. 毎回4個ずつ解説するから、前もって自分で考え、ノートに解いてみること(解けない場合は途中まででよい)。
3. 90分の講義では問題の要点をつかむことを心掛けること。
4. 必ず復習して重要事項を完全に覚え込むこと。
5. 理解できないところがあれば遠慮なく質問して身につけること。

以上であるが、数学は簡単に実力がつくものではない。時間をかけてコツコツ努力することが大切であるから途中でくじけないように頑張ってもらいたい。

目

次

1. 数と式	4
2. 方程式・不等式	8
3. 関数のグラフ	14
4. 三角比	16
5. 幾何図形	18
6. 図形と方程式	20
総合演習 1	26
総合演習 2	28
総合演習 3	30
総合演習 4	32
総合演習 5	34
総合演習 6	36
総合演習 7	38

1. 数と式

【1】 m, n を自然数とする。次の問に答えなさい。

(1) $n^5 - 1$ を因数分解しなさい。

(2) $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ は奇数であることを証明しなさい。

(3) n^5 を 2^m で割った余りが1のとき、 n を 2^m で割った余りも1であることを証明しなさい。

【2】 次の をうめよ。

a, b, c は0でない実数で、

$$\frac{ca + ab}{bc} = \frac{ab + bc}{ca} = \frac{bc + ca}{ab} = k$$

であるとする。このとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ならば、 k の値は $k = \text{$ となり、

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$ ならば、 $k = \text{$ となる。

【3】

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a, \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = b, \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = c$ の3つの式から x, y, z を消去して、

a, b, c の関係式を作れ。

【4】2次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ において、 $f(x^2)$ が $f(x)$ で割り切れる場合のすべての $f(x)$ を示せ。

【5】 a, b を自然数とする。つぎの問に答えよ。

- (1) a^2 を7で割った余りは, 0, 1, 2, 4のいずれかに等しいことを示せ。
- (2) $a^2 + b^2$ が7の倍数ならば, a, b は共に7の倍数であることを示せ。

【6】 次の問いに答えよ。

- (1) n は正の整数, $n+3$ は7の倍数, $n+7$ は3の倍数であるとする。 $n+10$ を21で割ると余りは幾らか。また, そのような n のうちで100に最も近いものは幾らか。
- (2) a の多項式 $a^n - 1$ が $a - 1$ で割り切れることを用いて, $7^n - 1$ を48で割ったときの余りを次の(7), (1)の場合に分けて求めよ。ただし, n は自然数とする。
 - (7) n が偶数のとき
 - (1) n が奇数のとき

- 【7】 k, l, m, n を $k > l > m > n$ および $k^2 + n^2 = m^2 + l^2$ を満たす自然数とする。ここで $a_1 = k + l$, $a_2 = k - l$, $a_3 = m + n$, $a_4 = m - n$ とおいて2組の積を作ると、それらの間には $a_1 a_{\square} = a_{\square} a_{\square}$ の関係がある。また a_1, a_2, a_3, a_4 の大小関係は $a_{\square} > a_{\square} > a_{\square} > a_{\square}$ である。 a_1 が奇数のとき $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ を最小にする a_1 を求めると $a_1 = \square$ である。したがって、 $k + l$ が奇数のとき $2(k + m)$ を最小にする k, l, m, n は $k = \square$, $l = \square$, $m = \square$, $n = \square$ である。

- 【8】(1) p, q を互いに素な正の整数とする。平面上の点 $(p, 0)$ と点 $(0, q)$ を結ぶ線分上にはこの2点以外の格子点が存在しないことを示せ。ただし、格子点とは、その x 座標, y 座標がともに整数であるような点をいう。
- (2) 不等式 $0 < x < p$, $0 < y < q$, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} < 1$ を満たす格子点 (x, y) の個数を p, q を使って表せ。

2. 方程式・不等式

【9】次の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ が、正の解を少なくとも1個もつような実数 m の範囲を求めよ。
- (2) x の2次方程式 $x^2 + 4kx + 5k - 1 = 0$ の2つの解がともに -2 より大きいように、実数の定数 k の値の範囲を求めよ。

【10】次の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 - 4x + a = 0$ が、絶対値の和が8であるような2つの実数解をもつとき、 $a = \square$ である。
- (2) 2次方程式 $x^2 + (p - 3)x + 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $(1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$ の値を求めよ。

- 【11】(1) a, b, c を実数とするとき、 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ を証明せよ。
- (2) a, b, c はたがいに異なる0でない実数とする。このとき x の2次方程式
 $ax^2 - 2bx + c = 0 \dots \textcircled{1}$, $bx^2 - 2cx + a = 0 \dots \textcircled{2}$,
 $cx^2 - 2ax + b = 0 \dots \textcircled{3}$
の少なくとも1つは異なる実数解をもつことを証明せよ。
- (3) (2)の条件のもとで、(2)の①, ②, ③を同時に満たす解は存在しないことを背理法で証明せよ。

- 【12】 実数 p, q, r が $p + q + r = 1$ と $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ を満足しているとき、
- (1) q, r を2つの解とする2次方程式 $x^2 + Ax + B = 0$ の係数 A, B は、それぞれ p のどんな式か。
- (2) p の最小値を求めよ。
- (3) $p \geq q, p \geq r$ としたときの p の最小値を求めよ。

【13】係数が実数である方程式

$$x^4 + kx^2 + ax + b = 0$$

が実数解と虚数解をもち、虚数解の一つは $1+2i$ である。

- (1) $1-2i$ も解であることを示せ。
- (2) k の満たす条件を求めよ。

【14】(1) x についての方程式 $x + \frac{1}{x} = t$ が相異なる2つの正の解をもつための実数

t の条件を求めよ。

- (2) x についての4次方程式 $x^4 - ax^3 + (a+6)x^2 - ax + 1 = 0$ が相異なる4つの正の解をもつための実数 a の条件を求めよ。

【15】 方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が1のみを実根にもつような整数 a, b, c のすべての組を求めよ。ただし, $c \geq -1$ とする。

【16】 n は2以上の自然数であり, a, b は実数である。2つの方程式

$$x^3 - ax - 2nb = 0, \quad x^3 - bx - 2na = 0$$

はそれぞれ, 共通である1つの実数解と共通でない2つの虚数解とをもつ。

- (1) 共通な実数解を n で表せ。
- (2) a は何個の整数値をとりうるか。その個数を n で表せ。

【17】(1) すべての実数 x に対して、不等式

$$ax^2 - 2ax + 3 > 0$$

が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(2) 実数 a, b, c および p, q, r が

$$a > b > c, \quad p < q < r, \quad p + q + r = 0$$

となっているとき、つぎの式①, ②, ③の正負を調べよ。

$$\textcircled{1} \quad p \qquad \textcircled{2} \quad r \qquad \textcircled{3} \quad ap + bq + cr$$

【18】(1) 任意の正数 x に対して不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ が成り立つことを示せ。

(2) n を自然数とする。任意の正数 x に対して不等式

$$x + \frac{1}{x^n} \geq \frac{2n}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つような x の値を求めよ。

【19】(1) 任意の実数 x, y, z について, $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 実数 x, y, z, t が $\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12 \end{cases}$ を満たすとき, t の最大値と最小値を求めよ。また, $xy + yz + zx$ の最大値と最小値を求めよ。

【20】 5つの実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 があり, どの a_i も他の4つの相加平均より大きくはないという。このような a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 をすべて求めよ。

3. 関数のグラフ

【21】 x の2次関数 $x^2 - 2ax + b$ の $x \leq 1$ における最小値を m とする。 $a \geq 1$ が $a - 2b \geq 3$ のとき, m の最大値を求めよ。

【22】 実数係数の2次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ が x の実数値 b に対して $f(b) < 0$ ならば, $f\left(\frac{1}{a+b}\right) > 0$ であることを証明せよ。

- 【23】 関数 $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_N|$ の最小値を与える実数 x をすべて求めよ。ただし、 a_1, a_2, \dots, a_N は $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ を満たす定数である。

- 【24】 f はすべての自然数に対して定義された関数で次の性質をみたすものとする。

$$f(2n) = f(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$f(2n+1) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- (1) $f(48), f(1000)$ を求めよ。
- (2) 自然数 m, n が奇数のとき
$$f(mn) = f(m)f(n)$$

が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 m, n に対して
$$f(mn) = f(m)f(n)$$

が成り立つことを示せ。

4. 3 角 比

【25】 $\triangle ABC$ において $\frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} = \cos A + \cos B$ であるとき、 $\triangle ABC$ はどんな形の三角形か。

【26】(1) $\triangle ABC$ において $AB=4$, $AC=3$, $\angle A=60^\circ$ のとき、頂点Aと辺BCの中点Mを結ぶ線分AMの長さは である。
(2) (1) で $\angle A$ の2等分線と辺BCの交点をDとすると、線分ADの長さは である。

【27】 3角形ABCにおいて $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおく。

$a : b : c = 2 : 3 : 4$ であり, 3角形ABCが半径 $\frac{16}{\sqrt{15}}$ の円に内接しているという。この3角形に関し次の値を求めよ。

- (1) $\sin A$
- (2) a, b, c
- (3) 3角形の面積 S と内接円の半径 r

【28】 一辺の長さ a の正三角形ABCとその外接円がある。外接円上で弧BAC上
にない点Pをとり, $\angle BAP = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{3}$) とする。

- (1) $AP = BP + CP$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $AP^2 + BP^2 + CP^2$ を求めよ。
- (3) $AP^4 + BP^4 + CP^4$ を求めよ。

5. 幾何図形

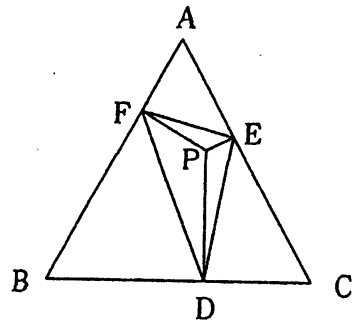
- 【29】 直角三角形の内接円の半径は、いずれの辺の長さの半分より小さく、特に斜辺の長さの $\frac{1}{4}$ より小さいことを証明せよ。

- 【30】 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB , BC , CD , DA をそれぞれ $2:1$ に内分する点をそれぞれ P , Q , R , S とする。線分 AQ と線分 DP , BR との交点をそれぞれ X , Y とし、線分 CS と線分 BR , DP との交点をそれぞれ Z , W とする。

このとき $\frac{YQ}{AX} = \boxed{}$, $\frac{\text{平行四辺形 } XYZW \text{ の面積}}{\text{平行四辺形 } ABCD \text{ の面積}} = \boxed{}$ である。

【31】 点Pを正三角形ABCの内部の点とする。点Pから辺BC, CA, ABに引いた垂線とそれら3辺の交点をそれぞれ, D, E, Fとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $PE < PD$ ならば, $FE < FD$ であることを示せ。
- (2) 三角形DEFが正三角形ならば, 点Pは正三角形ABCの重心であることを示せ。



【32】 1辺の長さが1の正三角形ABCの辺BC, CA, AB上に, それぞれ点P, Q, Rを $BP = CQ = AR < \frac{1}{2}$ となるようにとり, 線分APと線分CRの交点をA', 線分BQと線分APの交点をB', 線分CRと線分BQの交点をC'とする。BP = xとして, 次の問いに答えよ。

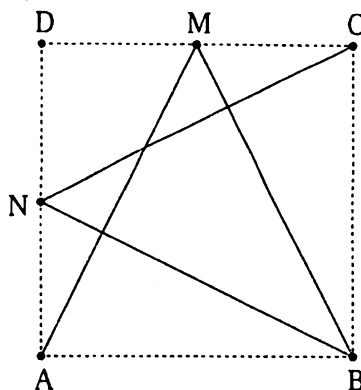
- (1) BB' , PB' をxを用いて表せ。
- (2) 三角形A'B'C'の面積が三角形ABCの面積の $\frac{1}{2}$ になるようなxの値を求めよ。

6. 図形と方程式

- 【33】 図において、 $ABCD$ は一辺の長さ 1 km の正方形で、 M 、 N はそれぞれ辺 CD 、 DA の中点である。

いま、甲、乙は同時刻にそれぞれ A 、 B を出発し、同じ一定の速さで歩くものとする。甲は図の実線で示した道 AMB 上を進み、乙は実線で示した道 BNC 上を進み、30分後に甲は B に、乙は C に到着した。

甲、乙が最も近づいたのは出発後何分後か。また、そのときの両者の距離はいくらか。



- 【34】 円 $x^2 + y^2 + 2ax - ay - 5 + 5a = 0$ は実数 a がどんな値をとっても定点 を通る。また、この円が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するときの a の値は2つあって であり、この求めた2つの a に対する円の中心間の距離は となる。ここに2つの円が接するとは、共有点において同一の接線をもつときをいう。

【35】(1) 円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ ($b > 0$) と放物線 $y = x^2$ の共通部分の点の個数を

N とする。 $a > \frac{1}{2}$, $D = 4b^2 - 4a + 1$ とすると、

$D < 0$ のとき $N = \boxed{\text{ア}}$,

$D = 0$ のとき $N = \boxed{\text{イ}}$,

$D > 0$ のときは

$a > b$ なら $N = \boxed{\text{ウ}}$,

$a = b$ なら $N = \boxed{\text{エ}}$,

$a < b$ なら $N = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) (1)の円と放物線が接しているとし、第一象限の接点を P とする。(ただし

$a > \frac{1}{2}$ とする。) 点 $(0, a)$ を C , 原点を O とするとき $\angle PCO = \frac{\pi}{3}$ となる

のは $a = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$, $b = \boxed{\text{ク}}$ のときであり、このとき P を通る円と放物線に共通の

接線と y 軸との交点は $(0, \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{コ}}})$ である。

【36】 方程式

$$x^2 + ay^2 - ax + 4y + 3 = 0$$

について、次の問いに答えよ。

(1) これが円を表すとき、中心と半径を求めよ。

(2) これが2直線を表すような実数 a を求めよ。

(3) これをみたす実数 x, y がただ1組定まるような実数 a を求めよ。

【37】 次の問いに答えなさい。

- (1) 点 $A(-1, 0)$ を通り、傾きが t の直線と、円 $x^2 + y^2 = 1$ との交点を $P(P \neq A)$ とします。原点と P を結ぶ直線が x 軸となす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を t で表しなさい。
- (2) (1)を用いて、 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす整数の組 (x, y, z) を3組求めなさい。ただし、 x, y, z は1以外の公約数をもたず、 $x \leq y$ を満たすものとします。

【38】 xy 平面上に2つの円 $C_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

$C_2 : (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$ がある。

- (1) 円 C_1 と円 C_2 の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。
- (2) 円 C_1 と円 C_2 の2つの交点および点 $(3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

【39】 曲線 $y = x^2$ に相異なる2点で接する円の半径のとりうる範囲を求めよ。

【40】 x, y と X, Y の間に

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

の関係がある。点 $P(x, y)$ が

円 弧 $x^2 + y^2 = 1$ $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$ ①

線 分 $y = 1$ $0 \leq x \leq 1$ ②

線 分 $x = 1$ $0 \leq y \leq 1$ ③

で囲まれる図形の周上を動くとき、点 $Q(X, Y)$ はどんな図形をえがくか、図示せよ。

- 【41】(1) 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2実根 α, β が, $-2 \leq \alpha \leq -1$, $1 \leq \beta \leq 2$ を満たすとき, 点 (a, b) の存在範囲 G を図示せよ。
- (2) 点 (a, b) が (1) の存在範囲 G の中にあるとき, $a^2 + 2a + b^2$ の最大値と最小値を求めよ。

- 【42】(1) 0でないどんな実数 m に対しても, 放物線
$$my = m^2 x^2 + 2 m^2 x + (m+1)^2$$
のグラフが通らない点 (x, y) の範囲を式で表し, これを図示せよ。
- (2) 直線 $y = ax + b$ のグラフが, (1) で求めた範囲に含まれるような整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【43】 点 (x, y) が領域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を動くとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 $(x + y, xy)$ はどのような範囲を動くか。図示せよ。

(2) $x + y + xy$ のとり値の範囲を求めよ。

【44】 実数 x, y が、不等式 $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ を満たすとき、

$$\frac{x + y + 2}{x - y + 2}$$

の最大値と最小値を求めよ。

総合演習 1

【45】 不等式

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{8}{5}$$

をみたす相異なる正の整数 l, m, n の組は何組あるか。

【46】 次の に適当な言葉を補って、命題を完成せよ。文字はすべて実数を表している。

- (1) $x + y + z \geq 3$ であることは x, y, z の少なくとも一つが1以上であるための である。
- (2) x, y, z のすべてが正であることは $xy + yz + zx > 0$ かつ $xyz > 0$ であるための である。
- (3) $(x + y)^3 > x^3 + y^3$ であることは、 x, y がともに正の数であるための である。

- 【47】 関数 $f(x) = \frac{2x+a}{x+b}$ に対して、 $f(x) = x$ を満たす x があるとき、この x を f の不動点という。 f が絶対値が等しく符号が反対な、2個の不動点をもつためには、 a, b がどのような条件を満たすことが必要十分であるか。また、このとき $y = f(x)$ 、 $y = x$ のグラフを図示せよ。

- 【48】 xy 平面上の2点を $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ とする。線分 AB を直径とする円周上 (点 A 、 B を除く) を動く点 P がある。線分 PA を $3:4$ に内分する点を N とし、線分 PB を $1:4$ に内分する点を M とする。 AM と BN の交点 Q が描く図形の方程式を求めよ。

総合演習 2

【49】(1) n を整数とする。 n を 5 で割った余りが 3 であるとき、 n^2 を 5 で割った余りを求めよ。

(2) p を整数とする。方程式 $x^2 + 4x - 5p + 2 = 0$ を満足する整数 x は存在しないことを証明せよ。

【50】 鋭角三角形 ABC が与えられている。点 A を 1 つの頂点とする長方形 $ADEF$ が、次の条件 (イ)、(ロ) を満たしながら変化するものとする。

(イ) 辺 DE 上に点 B がある。

(ロ) 辺 EF 上に点 C がある。

このとき、長方形 $ADEF$ の面積の最大値を θ , b , c を用いて表せ。

ただし $\theta = \angle BAC$, $b = CA$, $c = AB$ である。

【51】 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1$ のとき, $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ の最大値と最小値を求めよ。

【52】 座標平面において, 原点を中心とする半径1の円を A とし, 点 $(4, 0)$ を中心とする半径2の円を B とする。

- (1) 点 $T(s, t)$ を円 A の外部の定点とする。点 P が円 A の周上を動くとき, 線分 PT の中点 L のえがく軌跡を求めよ。
- (2) 点 P が円 A の周上を動き, 点 Q が円 B の周上を動く。このとき, 線分 PQ の中点 M の動きうる範囲を式で表し, 図示せよ。また, その面積を求めよ。

総合演習 3

【53】 次の各問に答えよ。

(1) 有理数の定義を述べよ。

(2) 命題「 x が 3 と異なる有理数ならば、 $\frac{5x-2}{x-3}$ は有理数である」

を証明せよ。

(3) 上の(2)の命題の対偶を述べよ。

(4) 上の(2)の命題の逆を述べよ。

【54】 a, b, c は実数とする。□にあてはまるものを下の①～④から選べ。

(1) $a+b+c=0$ は、 $a^2+b^2+c^2=0$ の□条件である。

(2) $a+b+c=0$ は、 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$ の□条件である。

(3) $a^2+b^2+c^2=0$ は、 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$ の□条件である。

(4) $a^2+b^2+c^2=0$ は、 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ の□条件である。

① 必要十分

② 必要であるが十分ではない

③ 十分であるが必要ではない

④ 必要でも十分でもない

【55】 100から200までの整数で、4の倍数の集合をA、8の倍数の集合をBとする。
このとき、集合 $A \cap B$ と集合 $\overline{A} \cup B$ の要素の個数を求めよ。

【56】 a, b を実数の定数とし、実数の集合A, Bを $A = \{ x \mid x^2 + ax + b = 0 \}$,
 $B = \{ x \mid x^2 + bx + c = 0 \}$ とする。集合 $A \cap B$ が、ただ1つの要素より
なるときの a と b の関係を求め、それを図示せよ。

総合演習 4

【57】(1) 13で割ると4余り, 15で割ると7余る最も小さい正の整数は である。

(2) $125!$ は10の 乗で割りきれれるが + 1 乗では割り切れない。

【58】 a^2+2a が77の倍数となるような自然数 a の中で最小のものを求めよ。

【59】 2つの素数は、それらの差が2であるとき、双子素数と呼ばれる。
5より大きい整数で、双子素数の間にはさまれる整数は6の倍数であることを証明せよ。

【60】 以下の(i), (ii)の性質をもつ自然数 a, b がある。

(i) ab は3で割り切れない。

(ii) $a+b$ は6で割り切れるが、9では割り切れない。

このとき a^3+b^3 は18で割り切れるが、54では割り切れないことを示せ。

総合演習 5

- 【61】 係数が実数である方程式 $x^4 + kx^2 + ax + b = 0$ が実数解と虚数解をもち、虚数解の1つは $1+2i$ である。
- (1) $1-2i$ も解であることを示せ。
 - (2) k のみたす条件を求めよ。

- 【62】 3次方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の1つの解を a とする。
- (1) $(2a^2 + 5a - 1)^2$ を $aa^2 + ba + c$ の形で表せ。ただし、 a, b, c は有理数とする。
 - (2) 上の3次方程式の a 以外の2つの解を(1)と同じ形の式で表せ。

【63】 定数 a, b を実数とし、2次方程式

$$F(x) = x^2 + 2(a+b)x + 2a - b^2 + 6b - 4 = 0$$

を考える。このとき次の問に答えよ。

- (1) a がどのような値をとっても、方程式 $F(x) = 0$ が相異なる2つの実数解をもつように b の値の範囲を定めよ。
- (2) $b = 1$ のとき、方程式 $F(x) = 0$ の解の1つが $0 < x < 1$ の範囲にあるように a の値の範囲を定めよ。
- (3) $b = 3$ のとき、方程式 $F(x) = 0$ が $-2 < x < 0$ の範囲に相異なる2つの解をもつように a の値の範囲を定めよ。

【64】(1) 方程式

$$x^4 + 2ax^2 - a + 2 = 0$$

が実数解をもたないような実数 a の範囲を求めよ。

- (2) $x^4 + 2ax^2 - a + 2 = 0$ の最小値を $m(a)$ とする。 a が(1)の範囲内にあるとき、 $m(a)$ の最大値を求めよ。

総合演習 6

【65】 2つの放物線 $y = x^2 - 2$ …①, $x = y^2 - 2$ …②がある。このとき、①, ②の交点を求め、次にこれらの交点は同一円周上にあることを示し、この円の中心の座標および半径を求めよ。

【66】(1) $y = 2x^2 - ax - 1$ と $y = x^2 + x - 2$ の2曲線が2点で交わるとき、 a の値の範囲を求めよ。
(2) (1)の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

- 【67】(1) a, b を実数とする。 $|y - b| < \sqrt{3}|x - a|$ をみたす点 $P(x, y)$ の集合を xy 平面に図示せよ。
- (2) 実数 a, b に対して、命題「実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ をみたすならば不等式 $|y - b| < \sqrt{3}|x - a|$ が成り立つ。」を考える。この命題が真であるような点 $P(a, b)$ の集合を ab 平面に図示せよ。

- 【68】 点 P から 2 つの円 $x^2 + y^2 = 1$ と $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$ とに引いた接線の長さを、それぞれ l, m としたとき、 $l : m = 1 : 2$ であるような点 P の集合はどのような図形か。

総合演習 7

【69】 $a = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とするとき

(1) $a + \frac{1}{a}$ を求めよ。

(2) a が方程式 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ の解であるとき、 $\cos \theta$, $\sin \theta$ の値を求めよ。

【70】 四角形 $ABCD$ は $AB = 3$, $BC = 3$, $CD = 4$, $DA = 7$ であり、 $\angle C$ は鈍角である。この四角形に内接する円 O があり、かつ1つの円 O に内接している。

(1) 対角線 BD の長さを求めよ。

(2) 円 O の半径の長さを求めよ。

- 【71】 半径1の円に内接する三角形ABCにおいて、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $BC = \frac{1}{2}$ であるときCAを求めよ。

- 【72】 一辺の長さが a cmの正三角形ABCが円Oに内接している。このとき、
- (1) (点Aを含まないほうの) 弧BCの上に $AP = x$ cmとなるように点Pをとるとき、 $BP + CP$ は何cmか。
 - (2) $\frac{AP^2 + BP^2 + CP^2}{OA^2}$ を求めよ。