

## はしがき

### 1. はじめに

この講座は『微分・積分』の基本事項が一応身につけている諸君を対象としたもので、標準以上の入試問題の〈考え方〉〈解き方〉を解説して、実践力をつけさせることをねらいにしています。

夏休みは集中学習で実力を大巾にアップさせる絶好のチャンスですから次の学習法をまもって効果を上げてもらいたい。

### 2. 内容と学習法

- (1) 最近の入試問題の中から標準的以上の内容のもので、やや難しいものも含めて編集してある。
- (2) 重要事項を教科書、公式集などで、まず再確認する。
- (3) 問題は一問一問を大切に、自分で考えてノートに解いてみる。解けなくても予習することで講義がよく理解でき身につくはずです。
- (4) 予習ができなければ復習を中心にして理解する。

以上であるが、夏休みは気がゆるみ、これらを完全に実行するのは難しいことであるが、できるだけ努力して学習すれば短期間の講習でもそれなりに効果をあげることができよう。

## 目 次

§ 1	数列の極限・無限級数	4
	第1回	5
§ 2	微分法とその応用	7
	第2回	9
	第3回	11
§ 3	積分法とその応用	12
	第4回	16
	第5回	18

## § 1 数列の極限・無限級数

### <要点整理>

#### ① 無限数列 $\{r^n\}$ の収束・発散

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \pm\infty \text{に発散} & (r > 1 \text{のとき}) \\ 1 & (r = 1 \text{のとき}) \\ 0 & (|x| < 1 \text{のとき}) \\ \text{発散(振動)} & (r \leq -1 \text{のとき}) \end{cases}$$

#### ② はさみ打ちの定理

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  において,  $a_n \leq c_n \leq b_n$  が成り立ち,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$  ならば,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  である。

#### ③ 有界数列の収束性

有界でかつ単調な数列は収束する。

#### ④ 無限級数の収束・発散

##### (1) 定義

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の収束・発散は部分和の数列  $\{S_n\}$  の収束・発散つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  の収束・発散に従う。

##### (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

したがって, 対偶:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散する。

#### ⑤ 無限等比級数

初項  $a$ , 公比  $r$  の無限等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$  は  $-1 < r < 1$  のとき収束し, その和は  $\frac{a}{1-r}$  である。

## 第1回

【1】(1) 自然数  $n$  について、不等式  $2^n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2}$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が

$$S_n = 4 - \left(1 + \frac{2}{n}\right) a_n \text{ で表されるとき、} a_n \text{ を} n \text{ の式で表せ。}$$

(3) (1)の結果を用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

【2】 $x, y$  平面上の点  $P_0(x_0, y_0)$  が与えられている。点列  $P_n(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

と定める。

(1)  $x_n + y_n, x_n - 2y_n$  をそれぞれ  $x_0, y_0$  で表せ。

(2)  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2}$  を求めよ。

【3】次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

ただし，対数は自然対数とする。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \right)^n, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)$$

【4】原点 $O$ を中心とする単位円周上に，次の条件を満たす点列 $P_0, P_1,$

$P_2, \dots$ がある。ただし， $P_0$ の座標は $(1, 0)$ とする。

[1]  $\angle P_0 O P_n$  は $n$ とともに単調に増大し， $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle P_0 O P_n = 2\pi$ である。

[2] 数列  $\{\angle P_{n-1} O P_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は初項 $\theta$  ( $\theta > 0$ )，公比 $r$  ( $r > 0$ ) の等比数列である。

(1)  $\theta$  と  $r$  との関係式を求めよ。

(2) 扇形  $P_{n-1} O P_n$  の面積を  $S_n$  とするとき

$$\frac{4}{7}\pi = S_1 + S_4 + S_7 + \dots + S_{3n-2} + \dots \text{を満たす } r \text{ を求めよ。}$$

## § 2 微分法とその応用

〈要点整理〉

### ① 重要な関数の極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

### ② 関数の連続

$f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が共に有限確定し,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成

り立つとき関数  $f(x)$  は  $x = a$  で連続であるという。

### ③ 微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### ④ 微分可能と連続

関数  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能ならば, その点で連続である。

(逆命題は不成立)

### ⑤ いろいろな微分法

$$(1) \{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(2) \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\text{特に} \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

### (3) 合成関数の微分

$$y = f(u), u = g(x) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

### (4) 媒介変数で表された関数の微分

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

⑥ 中間値の定理

関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で  $f(a) \neq f(b)$  のとき、  
 $f(a)$  と  $f(b)$  の間の任意の値  $k$  に対して、 $f(c) = k$   
( $a < c < b$ ) なる  $c$  が存在する。

⑦ ロルの定理

関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続、开区間  $(a, b)$  で微分可能で、  
 $f(a) = f(b)$  ならば、 $f'(c) = 0$ 、 $a < c < b$  となる  $c$  が存在する。

⑧ 平均値の定理

関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続、开区間  $(a, b)$  で微分可能な  
らば  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 、 $a < c < b$  となる  $c$  が存在する。

⑨ 接線・法線の方程式

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における

$$\text{接線の方程式は } y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\text{法線の方程式は } y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

(ただし  $f'(a) \neq 0$ )

⑩ 増減・極値

$$(1) \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ ならば } f(x) \text{ はその区間で増加する} \\ f'(x) < 0 \text{ ならば } f(x) \text{ はその区間で減少する} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f(x) \text{ が } x = a \text{ の前後で} \\ f'(x) \text{ の符号が正から負に変わるとき 極大} \\ f(x) \text{ が } x = a \text{ の前後で} \\ f'(x) \text{ の符号が負から正に変わるとき 極小} \end{cases}$$

⑪ 曲線の凹凸・変曲点

$$(1) \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ ならば } f(x) \text{ はその区間で下に凸} \\ f''(x) < 0 \text{ ならば } f(x) \text{ はその区間で上に凸} \end{cases}$$

(2)  $f''(x)$  が  $x = a$  の前後で符号が変わるとき曲線上の点  
 $(a, f(a))$  はこの曲線  $y = f(x)$  の変曲点という。

## 第2回

【5】A, Bは定点で, Pは $\angle PAB = \theta$ が一定となる動点とし, 3点P, A, Bは一直線上にないとする。線分PA上に $2PQ = 3QA$ となる点Qをとり,  $\angle QPB = \alpha$ ,  $\angle AQB = \beta$ ,  $AB = 2$ ,  $AP = x$ とおくとき

(1)  $\triangle PQB$ の面積を $S(x)$ とする。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{\sin x}$ を求めよ。

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+\beta} - \sqrt{x}}$ を求めよ。

【6】 $a$ を正の定数とし,  $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ とおく。

(1)  $x > 0$ のとき,  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(y)$ を満たす $y$ を $x$ の関数として表せ。

(2)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{y}{x}$ を求めよ。

【7】関数  $f(x) = \frac{1}{x} - e^{-ax}$  が  $x > 0$  において極値をもつとき、 $a$  のとり

うる値の範囲を求めよ。

【8】関数  $f(x) = \left| \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} \right|$  について

- (1) 極値を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  の漸近線を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  の概形をかけ。

### 第3回

【9】曲線Cを次の式で定める。 $C: x^2 + y^2 = 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1$

このとき、曲線Cの接線と2直線  $x = 1, y = 1$  で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。

【10】 $e = 2.718 \dots$  を自然対数の底とする。

(1)  $x \geq 2$  のとき、不等式  $x > \log(x^2 + x)$  が成り立つことを示せ。

(2)  $n$  を4以上の整数とする。 $x$ に関する方程式  $e^x - x - n = 0$ の正の解はただ1つ存在し、 $\log n$ と $\log(n + \sqrt{n})$ の間にあることを示せ。

また、この解を $a_n$ とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \log n)$ を求めよ。

### § 3 積分法とその応用

#### <要点整理>

#### ① 不定積分

$F'(x) = f(x)$  のとき,  $F(x)$  を  $f(x)$  の不定積分といい,

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ とかく。}$$

$$(1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (2) \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$$

$$(\alpha \neq -1)$$

$$(3) \int \sin x dx = -\cos x + c \quad (4) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + c \quad (6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

#### ② 置換積分法

$$x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$(1) \int f(x) dx = F(x) \text{ とすると}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

$$(2) \int \{f(x)\}^\alpha f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} \{f(x)\}^{\alpha+1} + c$$

$$(3) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

#### ③ 部分積分法

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

④ 定積分

$f(x)$  の不定積分の1つを  $F(x)$  とおくと

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

⑤ 偶関数, 奇関数の定積分

$$(1) f(-x) = -f(x) \text{ のとき } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$(2) f(-x) = f(x) \text{ のとき } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

⑥ 定積分と不等式

$$(1) a \leq x \leq b \text{ で } f(x) \geq 0 \text{ ならば } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(等号は  $f(x) \equiv 0$ )

$$(2) a \leq x \leq b \text{ で } f(x) \leq g(x) \text{ ならば}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{等号は } f(x) \equiv g(x))$$

$$(3) a \leq x \leq b \text{ における } f(x) \text{ の最大値を } M, \text{ 最小値を } m \text{ とすれば}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

⑦ 積分の平均値の定理

$f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c), \quad a < c < b \text{ となる } c \text{ が存在する。}$$

⑧ 定積分と級数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

⑨ 面積

$f(x)$ ,  $g(x)$  が区間  $a \leq x \leq b$  で連続で,  $f(x) \geq g(x)$  のとき, 曲線  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  と 2 直線  $x=a$ ,  $x=b$  とで囲まれる

部分の面積  $S$  は 
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

⑩ 体積

曲線  $y=f(x)$  と  $x$  軸および 2 直線  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) とで囲まれる部分を  $x$  軸のまわりに回転してできる立体の体積  $V$  は

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

⑪ 曲線の長さ

$$(1) S = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$(2) S = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

12 微分方程式

$$(1) \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \text{ より } \int \frac{1}{g(y)} \cdot dy = \int f(x) dx$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \text{ の解は } F(x) = \int f(x) dx \text{ とおくと}$$

$$y = Ae^{\bullet\bullet}$$

【11】  $I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x \, dx$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) とする。次の問い

に答えよ。

(1)  $I_0$  と  $I_1$  を求めよ。

(2)  $n \geq 1$  のとき、 $I_{n+1}$  を  $I_{n-1}$  で表せ。

【12】  $c_n$  は正の定数とし、 $n$  が正の奇数のとき、

$$f(x) = c_n \int_0^{\pi/2} f(y) \sin n(x+y) \, dy$$

を満足する恒等的に零ではない連続関数  $f(x)$  が存在するとする。このとき、

(1)  $c_n$  を求めよ。また、 $f(0)=1$  を満足する  $f(x)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  を求めよ。

第4回

【13】関数  $f(x) = \int_x^{x+\pi/2} |\sin t| dt$  について

- (1)  $f(x+\pi) = f(x)$  を示せ。
- (2)  $f(x)$  の最大値, 最小値を求めよ。

【14】関数  $f_n(x) = \frac{\log x}{(n+1)x^n}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) がある。

$f_n(x)$  が極値をとる  $x$  の値を  $a_n$  とする。曲線  $y=f_n(x)$  に原点から引いた接線の接点の  $x$  座標を  $b_n$  とする。このとき, 次の極限値を求めよ。ただし, 対数は自然対数を表す。

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_1(a_1) + f_2(a_2) + \dots + f_n(a_n)\}$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log b_n + \log b_{n+1} + \dots + \log b_{2n-1}\}$

【15】平面上の点Pから曲線  $y = \cos^2 x$   $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$  に引いた2つの法線

が直交している。

(1) 点Pの座標を求めよ。

(2) 上の2つの法線と曲線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

ここで、法線とは、曲線の接線と接点において直交する直線のことである。

【16】媒介変数表示された曲線  $x = 2 \cos^4 \theta$ ,  $y = \sin^4 \theta$   $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  をC

とおく。

(1) 曲線Cの概形をかけ。

(2) 曲線C上の動点  $P(\theta) = (2 \cos^4 \theta, \sin^4 \theta)$  において接線を引く。

この接線と曲線Cとx軸とy軸によって囲まれる部分の面積を最小にする  $\theta$  の値、およびそのときの面積を求めよ。

## 第 5 回

【17】半径 1 の円の弦 PQ と P を通る直径のなす角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。

弦 PQ によって分けられた 2 つの部分のうち中心を含む方の図形を、直線 PQ の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

【18】 $\theta$  を媒介変数とする点 P ( $x, y$ ) の軌跡の方程式を次式で定義する。

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 + \cos \theta) \quad \text{ただし, } a > 0 \text{ とする。}$$

- (1)  $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。
- (2)  $\theta$  が 0 から  $2\pi$  まで変化するとき、点 P の軌跡の概形をかけ。
- (3) (2) で求めた曲線の長さを求めよ。
- (4) (2) で求めた曲線と、 $x$  軸および  $\theta = 0, \theta = 2\pi$  における曲線の接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

【19】  $x > 0$  で定義された関数  $f(x)$  は 第2次導関数を持ち、等式

$$x^2 f(x) + \int_1^x (4x - 9t) f(t) dt = x - 1 \text{ を満たすとする。}$$

- (1)  $f(1)$ ,  $f'(1)$  の値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の満たす微分方程式を導け。
- (3)  $f(x) = x g(x)$  とおくと、 $g(x)$  の満たす微分方程式を導け。
- (4)  $f(x)$  を求めよ。

【20】  $f(x)$  は  $0 < x < 4$  で定義された微分可能な関数で  $f(1) = 1$ 、かつ  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) < 0$  を常に満たし、更に曲線  $C: y = f(x)$  は次の性質をもっているという。

$C$  上の点  $P$  における  $C$  の接線  $l$  が  $x$  軸、 $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $Q$ ,  $R$  とし、 $P$  を通って  $l$  に垂直な直線が  $x$  軸と交わる点を  $S$  とするとき、すべ

ての点  $P$  について  $\frac{PQ}{PR} = \frac{PS}{PQ}$  が成り立つ。

- (1)  $f(x)$  の満たす微分方程式を求めよ。
- (2)  $f(x)$  を求めよ。