

はしがき

1. はじめに

この講座は『代数・幾何』の基本を整理しながら、入試の標準程度までの問題を解く力をつけることをねらいにしたものである。

夏休みは実力をアップさせる絶好のチャンスであるから、次の学習法をまもって効果をあげてもらいたい。

2. 内容と学習法

- (1) テキストは各回4問ずつで、教科書程度のものから大学入試の標準的なものまで段階的に編集してある。
- (2) 各節毎に重要事項をまとめてあるから、教科書を併用して、それらを再確認する。
- (3) 一応自分で考えてノートに解いてみる。解けなくても予習することで講義がよく理解でき身につくはずである。
- (4) 予習ができなければ復習を中心にする。

以上であるが、夏休みは気がゆるみ、これらを完全に実行するのは難しいことであるが、できるだけ努力して学習すれば短期間の講習でもそれなりに効果をあげることができよう。

目 次

§ 1 ベクトル 4

第 1 回 6

§ 2 空間座標 8

第 2 回 10

§ 3 行 列 12

第 3 回 14

第 4 回 16

§ 4 1 次変換 17

第 5 回 19

補 充 問 題 21

§ 1 ベクトル

<基本事項>

① ベクトルの和・差

$$(1) \vec{AB} = -\vec{BA} \quad (2) \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \quad (3) \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

② 成分による計算

(1) 平面ベクトル: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ならば

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2) \text{ (複号同順)}$$

$$m\vec{a} = (ma_1, ma_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

(2) 空間ベクトル: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ならば,

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \text{ (複号同順)}$$

$$m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

③ ベクトルの内積

(1) 定義: \vec{a} , \vec{b} のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(2) 大きさと内積: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(3) 内積と成分: (ア) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ において

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(イ) $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

において

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

④ 平面図形への応用

A, B, C, Dの位置ベクトルを

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{AB}=(x_1, y_1), \vec{CD}=(x_2, y_2) \text{ とすると}$$

(1) 線分の長さ: $|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

(2) 分点ベクトル: $AC : CB = m : n$ のとき

$$\vec{c} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad (mn > 0 \text{ で内分, } mn < 0 \text{ で外分})$$

(3) $AB \parallel CD$: $\vec{AB} = k\vec{CD}$ (k は実数), $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

(4) $AB \perp CD$: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

(5) 3点A, B, Cが一直線上にある:

(ア) $\vec{AB} = k\vec{AC}$ (k は実数)

(イ) $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, m+n=1$

(ウ) $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = 0, l+m+n=0$

⑤ 直線のベクトル方程式

(1) 2点A, Bを通る直線 $\vec{x} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ (t は実変数)

(2) 定点Aを通り \vec{b} に平行な直線 $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ (t は実変数)

(3) 中心A, 半径 r の円 $|\vec{x} - \vec{a}| = r$ から
 $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = r^2$

⑥ 1次独立

(1) \vec{a}, \vec{b} は0でなく, α, β は実数で $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ が $\alpha = \beta = 0$ のときのみ成り立つとき, \vec{a}, \vec{b} は1次独立であるという。

(2) $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \times \vec{b}$ のとき
 $m\vec{a} + n\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b} \Leftrightarrow m=p, n=q$

第1回

【1】□の中に適当な数値をいれよ。

正六角形 $ABCDEF$ において、 DE の中点を M 、 AM の中点を N 、 BC の中点を P とする。そのとき、

$$\vec{AM} = \frac{\square}{\square} \vec{AB} + \frac{\square}{\square} \vec{AF}$$

$$\vec{NP} = \frac{\square}{\square} \vec{AB} - \frac{\square}{\square} \vec{AF}$$

となる。分数は既約分数で示せ。

【2】三角形 ABC の辺 AB の中点を M とし、ベクトル \vec{MB} を b 、 \vec{MC} を c とおく。

(1) $5\vec{AP} = 4\vec{AC}$ によって定まる点 P をとるとき、 \vec{MP} を b 、 c で表せ。

(2) 直線 BC と直線 MP の交点を Q とすると、 \vec{MQ} を b 、 c で表せ。

【3】四面体 $ABCD$ において、ベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} をそれぞれ \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} で表す。辺 AB , DC を $1:2$ の比に内分する点をそれぞれ M , N とし、辺 AD , BC を $2:3$ の比に内分する点をそれぞれ P , Q とする。

(1) 線分 MN を $u:v$ の比に内分する点を E としたとき、ベクトル \overrightarrow{AE} を \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} および u , v を用いて表せ。ただし、 $u > 0$, $v > 0$ とする。

(2) 線分 PQ を $x:y$ の比に内分する点を F としたとき、2点 E , F が一致するような、比 $u:v$ および $x:y$ を求めよ。

ただし、 $x > 0$, $y > 0$ とする。

【4】平面上に三角形 ABC がある。実数 k に対して、点 P が

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = k\overrightarrow{AB}$$

をみたすものとする。

(1) $k = 0$ のとき、点 P の位置を求めよ。

(2) k が実数全体を動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(3) 点 P が三角形 ABC の内部にあるような k の範囲を求めよ。

§ 2 空間座標

〈基本事項〉

① 分点の座標と2点間の距離

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ とすると,

(1) 線分 AB を $m:n$ に分ける点の座標は

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right) \begin{cases} mn > 0 \text{ で内分} \\ mn < 0 \text{ で外分} \end{cases}$$

(2) 2点 AB の距離:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

② 直線の方程式

(1) $\vec{a} = \vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ なる点 A を通り, $\vec{u} = (l, m, n)$ に

平行な直線

$$\textcircled{1} \vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad (t \text{ は実数})$$

$$\textcircled{2} x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$$

$$\textcircled{3} \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

(2) $\vec{a} = \vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = \vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ なる2

点 A, B を通る直線

$$\textcircled{1} \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad (t \text{ は実数})$$

$$\textcircled{2} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

$$\textcircled{3} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

③ 平面の方程式

(1) $\vec{a} = \vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ なる点Aを通り, $\vec{u} = (l, m, n)$ に

垂直な平面

① $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{u} = 0$

② $l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$

(2) 一般形 $ax + by + cz + d = 0$

(3) 点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

④ 球の方程式

(1) $\vec{a} = \vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ なる点Aを中心に, 半径 r の球は,

① $|\vec{p} - \vec{a}| = r$ したがって, $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$

② $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上の点 (a, b, c) における接平面

$$ax + by + cz = r^2$$

第 2 回

- 【5】(1) 点 $A(1, 2, 3)$ を通り、ベクトル $\vec{h} = (2, 1, -1)$ に垂直な平面 α の式を求めよ。
- (2) 原点から平面 α へ下した垂線の長さを求めよ。
- (3) 平面 α と平面 $\beta: x + y + z = 1$ とのなす角を θ とすれば $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (4) 2 平面 α, β の交線の方程式を求めよ。
- (5) (4) の直線と点 A との最短距離を求めよ。

【6】空間に 4 点 $A(0, 0, 0), B(1, 1, 2), C(1, 1, 0), D(1, 2, 1)$ がある。

- (1) 直線 CD を含み、直線 AB に平行な平面 α の方程式を求めよ。
- (2) 直線 AB 上の点から平面 α へ下ろした垂線の長さを求めよ。
- (3) 直線 AB 上の点 P から平面 α へ下ろした垂線の足 Q (垂線と平面 α との交点) が直線 CD 上にあるような点 P, Q の座標を求めよ。

【7】直線 g と球面 S とを次式で与える：

$$g : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1},$$

$$S : x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 + 4z + 4 = 0$$

このとき、

- (1) 直線 g と球面 S とは交わらないことを証明せよ。
- (2) 直線 g を含み、かつ球面 S に接する平面の方程式を求めよ。

【8】 (x, y, z) を座標とする空間の点 $A(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球 S と点 $B(3, 0, 3)$ がある。 B から S に接線を引いたときの接点の全体は一定の平面上にあって、円になっている。

- (1) この平面の方程式を求めよ。
- (2) この円の半径を求めよ。

§ 3 行 列

<基本事項>

① 行列の演算

(1) 加法・減法・実数倍

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

$$\textcircled{2} k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ 交換法則 $A+B=B+A$

結合法則 $(A+B)+C=A+(B+C)$

$m(nA)=(mn)A, (m+n)A=mA+nA,$

$m(A+B)=mA+mB$

$A+O=O+A=A, A+(-A)=O$ (O は零行列)

(2) 乗 法

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

② $(AB)C=A(BC)$ (結合法則)

$A(B+C)=AB+AC$ (分配法則)

任意の行列 A に対して, $AE=EA=A$ をみたす E を単位行列という。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(注意) 乗法についての交換法則は一般に成り立たない。

② ケーリー・ハミルトンの定理

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り

立つ。

③ 逆行列

(1) $AX=XA=E$ (E は単位行列) のとき, X を A の逆行列といい,
 A^{-1} で表す。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において, $\Delta = |A| = ad - bc \neq 0$ のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

(4) A^{-1}, B^{-1} が存在すれば, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(5) AB が逆行列をもつための必要十分条件は A, B ともに逆行列をもつことである。

(注意) $AB=0$ のとき $A=0$ または $B=0$ とは限らない。

$A \neq 0, B \neq 0$ で $AB=0$ となる A, B (零因子) が存在する。

④ 逆行列と連立方程式の解

$$\text{連立方程式} \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$ad - bc \neq 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ の解をもつ。}$$

第3回

【9】行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ について, 等式 $AX = XA$ が成り

立つとする。ただし, p, q, r, s は実数を表す。

(1) p および q を r, s で表せ。

(2) E を単位行列とすると, $X = kE + lA$ を満たす実数 k および l を

r, s で表せ。

【10】(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が

成り立つことを示せ。

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, (1)の結果を利用して,

$A^5 - 3A^4 - 6A^3 + 2A^2 - 16A + 8E$ を求めよ。

【11】(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $AXA=B$ を

満たす行列 X を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき, $A^2=A$ であるこ

とを証明せよ。

【12】実数 k と単位ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} 5-k & 1 \\ 2 & 6-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \text{ が成り立っている。}$$

(1) k の値をすべて求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をすべて求めよ。

第4回

【13】 $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $P^{-1}AP$ を求めよ。
- (2) A^n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

【14】 $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ とし、2行2列の単位行列と

零行列をそれぞれ、 I , O とおく。ここに、 a , b は実数とする。

- (1) $B^2 - (a-4)B$ を求めよ。
- (2) A^6 , A^7 を A の1次式または I で表せ。
- (3) n を偶数の自然数として A^n を求めよ。

S 4 1 次変換

<基本事項>

① xy 平面の $(x, y) \rightarrow (x', y')$ の変換 f の表す式が,

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のようにかけるとき、 f を1次変換という。

② 1次変換の図形的性質

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とすると,

(1) $ad - bc \neq 0$ ならば

- ① 平面全体は平面全体に
- ② 直線(線分)は直線(線分)に
- ③ 平行線は平行線に
- ④ 内分点は同じ比の内分点に

(2) $ad - bc = 0$ ならば

- ① $A \neq 0$ ならば平面全体は原点を通る1直線
- ② $A = 0$ ならば平面全体は原点に

【15】 2直線 $\begin{cases} l: 2x - y - 2 = 0 \\ m: x - y - 1 = 0 \end{cases}$ および、1次変換 f を表す行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \text{が与えられている。}$$

(1) $a = 2$ のとき、

直線 l は変換 f によって直線 $\square x + y + \square = 0$ に写る。

また、変換 f で l に写る直線は $\square x + 2y + \square = 0$ である。

(2) $a = -2$ のとき、直線 m は変換 f によって定点 $P(\square, \square)$

に写る。また、直線 m を点 P に関して対称移動すると、

直線 $\square x + y + \square = 0$ になる。

【16】 ある直線 l 上の任意の点 (x, y) が1次変換、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{によって、同じ直線 } l \text{ 上の点に移される。}$$

このとき、 l の方程式を求めよ。

第5回

【17】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表せる1次変換は平面上の点 $(1, 2)$,

$(2, 1)$ をそれぞれ点 $(5, 0)$, $(4, 3)$ にうつすとする。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) この1次変換によって、原点を中心とする半径1の円はどのような図形にうつされるか。

【18】 直線 $x + y = 2$ を直線 $x - y = -1$ に、直線 $x - y = 2$ を直線 $x + y = 1$ に移す1次変換 f を表す行列は、 である。1次変換 f により、中心が $(1, 0)$ 、半径が1の円は、

$$\text{方程式} (\text{} x + \text{})^2 + (\text{} y + \text{})^2 = 1$$

によって表される図形に移される。

- 【19】(1) 直線 $x + 2y = 1$ 上のすべての点を1点 $(3, 5)$ に移す1次変換 f を表す行列を求めよ。
- (2) この1次変換 f により平面全体はどのような図形に移されるか。

【20】方程式 $x = 1$ で表される直線 l_1 と行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & 2 \end{pmatrix}$ がある。

A によって表される1次変換によって直線 l_1 が直線 l_2 に移されるとき

- (1) l_2 の方程式を求めよ。
- (2) l_2 を原点の周りに角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) だけ回転して得られる直線を l_3 とする。 l_2 と l_3 の交点 P の x 座標が $\frac{1 + \sqrt{2}}{5}$ であるとき、 θ の

値を求めよ。

- (3) θ が(2)で求めた値をとるとき、 l_1 , l_2 , l_3 で囲まれた三角形の面積 S を求めよ。

補充問題

【21】1辺の長さが1であるような正四面体の頂点を A, B, C, D とする。

辺 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を E , 辺 AC を $(1-t) : t$ に内分する点を F とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{e} = \vec{DE}$, $\vec{f} = \vec{DF}$ の長さとお積 $\vec{e} \cdot \vec{f}$ を t で表せ。
- (2) $\theta = \angle EDF$ とする。 $0 < t < 1$ のとき、 $\cos \theta$ の動く範囲を求めよ。

【22】平面 $\alpha : 4x - y - z = 6$,

直線 $l : 1 - x = y + 1 = \frac{z - 2}{4}$ があるとき

- (1) 平面 α と直線 l の交点の座標を求めよ。
- (2) 直線 l を含み、平面 α とのなす角が 45° となる平面の方程式を求めよ。

【23】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^2 - (b+1)A$ を計算せよ。 (2) $A^5 B^4$ を計算せよ。

(3) $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、 a と b の値を求めよ。

【24】 1次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって、正方形

$F = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ が図形 G に移るとする。

(1) G はどのような図形か。

(2) G の面積が F の面積の 5 倍になるときの k の値を求めよ。