

はしがき

このテキストは、すべての受講生が使えるように、標準問題を中心に、基本問題から、ややハイレベルの問題まで含まれている。

「基礎解析」のすべての単元が学習できるように、三角関数からスタートして、指数・対数関数、数列、微分、積分の問題が網羅されているが、どの単元についても実力が養成できるように、それぞれの項目についての典型問題ばかりである。

このテキストを編集するのに際し、もっとも苦心したのは各単元のバランスについてである。数列、微分、積分の問題を多くしたのは、この単元からの入試の出題率が高いことを考慮したからである。また、指数・対数関数の問題を少なくしたのはハイレベルの問題の出題が極めて少ないことからである。

数学の実力をつけるには予習することがベストである。よく予習をして講義に臨んでもらいたい。解ける問題は少ないかも知れないが、問題にアタックする態度が、キミの学力アップにもっとも役立つことを理解することが大切である。

大学入試では、“夏を制する者が受験を制する”と、よくいわれているが、この5日間の講義が、明春の勝利の栄冠の礎になれば、わたくしにとっての上もない喜びである。受講生の成功を祈ってペンをおくとしよう。

目 次

第1章	3角関数・指数関数・対数関数	4
第2章	数 列	11
第3章	微分法	18
第4章	積分法	23

第1章 3角関数・指数・対数関数

重要事項のまとめ

1. 3角比の相互関係

$$(1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (3) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

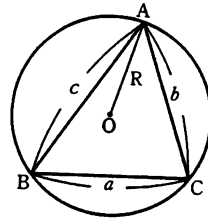
2. 正弦定理・余弦定理

正弦定理

三角形ABCの外接円の半径

をRとすると $\Rightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{第1余弦定理 } a = b \cos C + c \cos B)$$

3. 3角形の面積

(1) 2辺とその間の角が与えられたときの面積Sは

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

(2) 3辺が与えられたときの面積Sは

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

これをヘロンの公式という。

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順})$$

2直線の交点を通る傾きの直線の式

5. 2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

6. 半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

7. 3倍角の公式

αの2の展開公式

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

8. 積を和・差に変形する公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

9. 和・差を積に変形する公式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

10. $a \sin \theta + b \cos \theta$ の変形 (3 角関数の合成)

$$\begin{aligned} & a \sin \theta + b \cos \theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

ただし, α は $\frac{\pi}{2}$ 未満の値

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

をみたす角である。

極座標表示 \leftarrow 複素数

$$a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$$

(a, b は実数, i は虚数)

1. 指数法則

a, b が正の数で, m, n が有理数のとき

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

2. 指数関数のグラフと指数の大小・相等関係

指数関数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) は

$0 < a < 1$ のとき 減少関数

$a > 1$ のとき 増加関数

であり, $a^x > 0$ 。

また, $y = a^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。

(1) $a > 0, a \neq 1$ のとき

$$s = t \iff a^s = a^t$$

(2) $0 < a < 1$ のとき

$$s < t \iff a^s > a^t$$

$a > 1$ のとき

$$s < t \iff a^s < a^t$$

3. 指数方程式の解法

(1) 底をそろえて $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) の形に導いて, 方程式

$f(x) = g(x)$ を解く。

(2) $a^x = X$ ($X > 0$) とおいて, X の方程式を解く。

4. 指数不等式の解法

(1) $a^x = X$ ($X > 0$) とおいて, X の不等式を解く。

(2) $a^x > b$ の形なら, 両辺の対数をとる。

5. 対数の性質

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ のとき

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

である。また

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a N^m = m \log_a N$$

(6) 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{ただし, } a, c \text{ は } 1 \text{ でない正数, } b \text{ は正数})$$

7. 対数関数のグラフと対数の大小・相等関係

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $y = a^x$ の逆関数であり

$0 < a < 1$ のとき 減少関数

$a > 1$ のとき 増加関数

(1) $a > 0, a \neq 1$ のとき

$$M = N > 0 \iff \log_a M = \log_a N$$

(2) $0 < a < 1$ のとき

$$0 < M < N \iff \log_a M > \log_a N$$

(3) $a > 1$ のとき

$$0 < M < N \iff \log_a M < \log_a N$$

8. 対数方程式の解法

(1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ の形を導いて、方程式 $f(x) = g(x)$ を解く。

(2) $\log_a x = b$ の形を導いて、これから $x = a^b$ を解く。

(3) $\log_a x = X$ とおいて、 X の方程式を解く。

(4) (1), (2), (3) で求めた x の値のうち、真数を正とするものを解とする。

9. 対数不等式の解法

底をそろえて

(1) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ の形を導いて

$$0 < a < 1 \text{ のとき } f(x) < g(x)$$

$$a > 1 \text{ のとき } f(x) > g(x)$$

を解く。

(2) $\log_a x = X$ とおいて、 X の方程式を解く。

(3) 真数が正だから、 $f(x) > 0, g(x) > 0$ をみたすことの検討が必要。

【1】次の問いに答えよ。

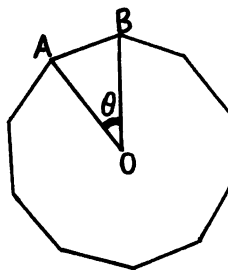
- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $6 \sin \theta + 2 \cos 2 \theta$ の最大値は であり、そのとき $\tan \theta =$ である。また、最小値は である。
- (2) 関数 $f(\theta) = a \cos^2 \theta + (a - b) \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta$ の最大値が $3 + \sqrt{7}$ 、最小値が $3 - \sqrt{7}$ となるように a, b の値を定めよ。

【2】関数 $f(\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{5}{2} \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$ ($0 < \theta < \pi$) について次の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ を $\cos \theta$ の多項式で表せ。
- (2) 曲線 $y = a \cos \theta + a$ が曲線 $y = f(\theta)$ と少なくとも1点で交わるような実数 a の範囲を求めよ。

【3】図は1辺の長さが a の正十角形である。図のように $\angle AOB = \theta$ として

- (1) $\sin 2\theta$ と $\sin 3\theta$ の関係を式で表せ。
- (2) $\sin 3\theta$ を $\sin \theta$ で表せ。
- (3) $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ。



【4】 $a \neq 1$, $b \neq 1$ をそれぞれ正の定数とし、

$$f(x) = x^2 \log_a b + x \log_b a + 2$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) すべての実数 x に対して、 $f(x) > 0$ が成り立つための a , b の関係式を求めよ。
- (2) a を横座標, b をたて座標にとった平面上に, (1)の関係式をみたす (a, b) の範囲を図示せよ。

第2章 数 列

重要事項のまとめ

1. 等差数列

初項が a 、公差が d である等差数列の第 n 項を a_n 、初項から第 n 項までの和を S_n とすれば

$$(1) a_n = a + (n-1)d$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}\{(2a + (n-1)d)\}$$

2. 等比数列

初項が a 、公比が r である等比数列の第 n 項を a_n 、初項から第 n 項までの和を S_n とすれば

$$(1) a_n = ar^{n-1}$$

$$(2) r \neq 1 \text{ のとき } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ のとき } S_n = na$$

3. 基本的な数列の和

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

4. 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2), \quad b_k = a_{k+1} - a_k$$

5. 漸化式

(1) $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) のタイプ

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

(2) $a_{n+1} = f(n)a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) のタイプ

$n = 1, 2, 3, \dots, n-1$ とにおいて得られる式を辺々かける。

(3) $a_{n+1} = p a_n + q$ ($n = 1, 2, \dots, p \neq 0, 1, q \neq 0$)のタイプ

$\alpha = p \alpha + q$ をみたす α によって

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と変形すれば、数列 $\{a_n - \alpha\}$ は公比が p の等比数列をなす。

(4) $a_{n+1} = \frac{p a_n + q}{r a_n + s}$ ($n = 1, 2, \dots$)のタイプ

$$\text{分数方程式 } x = \frac{p x + q}{r x + s} \text{ が}$$

(ア) 異なる2つの実数解 α, β をもつとき

$$b_n = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \text{ とおくと、数列 } \{b_n\} \text{ は等比数列をなし、これから、}$$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は求められる。

(イ) 重解 α をもつとき

$$c_n = \frac{1}{a_n - \alpha} \text{ とおくと、数列 } \{c_n\} \text{ は等差数列をなし、これから、}$$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は求められる。

(5) $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ ($n = 1, 2, \dots, p, q \neq 0$)のタイプ

(ア) $p + q = 1$ のとき

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -q(a_{n+1} - a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

から、数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比が $-q$ の等比数列で、(1)の型を導く。

(イ) $p + q \neq 1$ のとき

2次方程式 $x^2 - p x - q = 0$ の2つの実数解を α, β とする。

$\alpha \neq \beta$ ならば

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n),$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

と変形して等比数列の問題として扱う。

また、 $\alpha = \beta$ ならば

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \alpha^{n+1}$$

となり、両辺を α^{n+1} で割る。

6. 数学的帰納法

自然数 n についてのある命題 A について

(I) $n = 1$ のとき A が成り立つ。

(II) $n = k$ (≥ 1) のときその命題が成り立つと仮定すると, $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(I), (II) が示されたとき, 命題 A はすべての自然数 n について成り立つ。

※ 3. の追加.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\textcircled{c} \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$7. \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

【5】次の問いに答えよ。

(1) $a_1=132$, $a_7=33$ である等差数列 $\{a_n\}$ に対し、数列 $\{b_n\}$ を $b_n=(a_{2n}-a_n)^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定める。このとき、 $b_1+b_2+\dots+b_n$ を n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1+(-3)+1$, $a_2=1+(-3)+3^2+(-3)+1$, $a_3=1+(-3)+3^2+(-3)^3+3^2+(-3)+1, \dots$ と定める。

a_n を n を用いて表せ。また、初めて 10^3 より大きい値となるのは第何項目か。

【6】次の問いに答えよ。

(1) 初項から第 n 項までの和が $n(n^2-1)$ となる数列の第 n 項は

$$a_n = \square \times (n^2 - n), \quad a_{n+1} - a_n = \square \times n$$

(2) 正の整数 n に対し $f(n) = \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}$ とする。 n が 1 から $3m$ まで変

わるとき、 $f(n)$ が整数となるような $f(n)$ の総和を求めよ。ただし、 m は正の整数とする。

【7】相異なる数からなる数列 $a, b, a^2, ab, b^2, a^3, a^2b, ab^2, b^3, \dots$ について

(1) $a^{20}b^5$ は第何項か。

(2) $a \neq 1, b \neq 1$ のとき初項から第135項までの和を求めよ。

【8】すべての自然数 n についての次の不等式を証明せよ。

(1) $3^n > n^2$

(2) $n(n+1) \frac{\log_{10} 3}{4} > \log_{10}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

【9】 $a_1 = a$, $a_{k+1} + b a_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$ によって決められる数列
について次の問いに答えよ。

(1) 第 k 項を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

【10】 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 9 - \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{3^{n-2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で表されている。

(1) a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

【11】 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} + 3 = 0 (n = 2, 3, \dots)$ で定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

【12】 3文字 a, b, c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語とよぶことにする。ただし, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

たとえば, $abba, bacca, caabb$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

- (1) 長さ 1, 2 および 3 の単語をそれぞれ列挙せよ。
- (2) 長さ n の単語のうち, a を奇数個含むものの数を x_n で, 残りのものの数を y_n で表す。このとき, 次の等式が成り立つことを説明せよ。

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n$$

- (3) x_n を求めよ。

第3章 微分法

重要事項のまとめ

1. 関数の極限

$\lim f(x) = \alpha, \lim g(x) = \beta$ (α, β は有限な値) ならば

(1) $\lim \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ (複号同順)

(2) $\lim c f(x) = c \alpha$ (c は定数)

(3) $\lim f(x) g(x) = \alpha \beta$ (4) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$)

が成り立つ。また

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \text{ (有限な値), } \lim g(x) = 0 \text{ ならば } \lim f(x) = 0$$

2. 微分係数・導関数

関数 $y = f(x)$ の $x = x_1$ における微分係数 $f'(x_1)$ は

$$f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

で得られたが、これは x_1 の関数である。この x_1 を x とおいた $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という。したがって

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y = c \text{ (定数)} \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x^n \text{ (} n \text{ は正の整数)} \Rightarrow y' = n x^{n-1}$$

3. 曲線の接線

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(x_1, f(x_1))$ で

(1) 接線の傾き $\tan \alpha = f'(x)$

(2) 接線の方程式

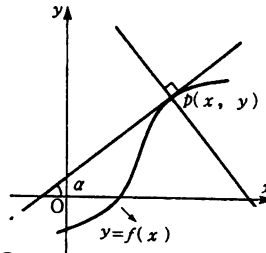
$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

4. 曲線の法線

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(x_1, f(x_1))$ における接線に P で直交する直線を点 P におけるこの曲線の法線という。

点 P における法線の方程式は

$$x - x_1 + f'(x_1) \{y - f(x_1)\} = 0$$



5. 導関数と関数の増減

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が x のある区間で

$f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調に増加する。

$f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は単調に減少する。

6. 整関数の極大値・極小値とその判定

関数 $f(x)$ において、 x が増加しながら a を通り過ぎるとき、 $f'(x)$ の符号が正から負に変われば、 $f(x)$ は $x = a$ で極大になるといい、 $f(a)$ を極大値という。

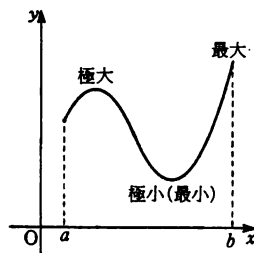
$f'(x)$ の符号が負から正にかわれば、 $f(x)$ は $x = a$ で極小になるといい、 $f(a)$ を極小値という。

7. 最大値・最小値

整関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で与えられているとき、この区間において

(1) 極大値があるときは、極大値と $f(a)$, $f(b)$ の値のうち、いちばん大きい値が最大値であり、極大値がないときは、 $f(a)$, $f(b)$ の値のうち大きい値が最大値である。

(2) 極小値があるときは、極小値と $f(a)$, $f(b)$ の値のうち、いちばん小さい値が最小値であり、極小値がないときは、 $f(a)$, $f(b)$ の値のうち小さい値が最小値である。



8. 方程式の応用

高次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数や、実数解をもつための条件を求めるときは $y = f(x)$ のグラフを利用する。

$f(x) = 0$ の実数解の個数

$\Rightarrow y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数

とくに、3次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつための条件について

(ア) 異なる3つの実数解をもつとき、 $f(x)$ は異符号の極値をもつ。

(イ) 1つだけ実数解をもつとき、 $f(x)$ は極値をもたないか、または、同符号の極値をもつ。

9. 不等式への応用

ある区間で、不等式 $f(x) \geq g(x)$ がつねに成り立つことを証明するには、この区間で、 $F(x) = f(x) - g(x)$ が負にならないことを示す。

とくに、区間 $x \geq a$ でこのことを示すには、 $F(x)$ がこの区間で

(ア) 極小値をもつときは、 $F(a) \geq 0$ および (極小値) ≥ 0 を示す。

(イ) 極小値をもたないで、単調増加のときは、 $F(a) \geq 0$ を示す。

【13】 2つの関数 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 3x + 8$, $g(x) = |3x|$ について、各 x で $f(x)$ と $g(x)$ の大きな方の値を $h(x)$ とおく。このとき、関数 $h(x)$ の極大、極小を与える x の値を求めよ。

【14】 曲線 $y = \frac{1}{3}x^3 - kx$ (k は実数) を C とする。 x 座標が α ($\alpha \neq 0$)

である C 上の点 P における C の接線を l , l と C の共有点で P でないものを Q とする。

- (1) Q の座標を α と k で表せ。
- (2) Q における C の接線が l と直交するように α を選ぶことができるためには、 k の値はどのような範囲になければならないか。

【15】 x, y, z が実数で $x + y = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をみたすとき,

- (1) z のとりうる範囲を求めよ。
- (2) $x^3 + y^3 + z^3$ の最大値と最小値を求めよ。

【16】 任意の x に対して, 不等式 $\cos^3 x - \sin^3 x + \cos x - \sin x + \sin x \cos x$
 ≤ 2 がなりたつことを証明せよ。

第4章 積分法

重要事項のまとめ

1. 不定積分

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x) dx$$

2. 不定積分の公式

$$(1) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$(2) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$(3) \int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (\text{複号同順})$$

3. 定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4. 定積分の公式

$$(1) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(4) f(x) \text{ が偶関数のとき} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$f(x) \text{ が奇関数のとき} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

5. よく用いられる定積分

$$(1) \int_a^{\beta} (x-a)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-a)^3$$

$$(2) \int_a^{\beta} (x-a)^2(x-\beta) dx = -\frac{1}{12}(\beta-a)^4$$

$$(3) \int_a^{\beta} (x-a)^2(x-\beta)^2 dx = \frac{1}{30}(\beta-a)^5$$

6. 定積分で表された関数

$$(1) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

$$\frac{d}{dx} \int_{x+a}^{x+b} f(t) dt = f(x+b) - f(x+a)$$

$$(2) \text{定積分を含む関係式} \rightarrow \int_a^b f(t) dt = k \text{ とおく。}$$

$$(3) \int_a^b |f(t)| dt \rightarrow y = |f(x)| \text{ のグラフを利用する。}$$

7. 面積

(1) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ のとき, この区間における曲線 $y = f(x)$ と x 軸との間の部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

(2) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x)$ のとき, この区間における2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の間の部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

8. 立体の体積

数直線上の座標が x である点で, この直線に垂直な平面による立体の切り口の面積が $S(x)$ のとき, 区間 $[a, b]$ における立体の体積 V は

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

9. 回転体の体積

曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) および x 軸で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

10. 位置と道のり

数直線上を運動する動点 P の時刻 t における速度 v が, t の関数 $v = f(t)$ で表されているとき

(1) 動点の位置 時刻 $t = t_1$, t_2 ($t_1 < t_2$) における動点 P の位置を

それぞれ x_1 , x_2 とすれば $x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$

(2) 道のり 時刻 $t = t_1$ から $t = t_2$ ($t_1 < t_2$) までの間に動点 P の

実際に運動した距離 s は $s = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt$

【17】すべての3次式 $f(x)$ に対して $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(p) + f(q))$ を

みたすような、 $f(x)$ によらない定数 p, q があることを示し、 p, q を求めよ。

【18】2つの整式 $f(x), g(x)$ の間に

$$f(x) + \int_0^x g(t) dt = f'(x)g(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

が成立している。この $f(x), g(x)$ を求めよ。

【19】関数 $y = x^3 + 2ax^2 + bx$ (a, b は 0 でない定数) のグラフは x 軸に接しているという。次の問(1), (2)に答えよ。

(1) b を a で表せ。

(2) このグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が $\frac{4}{3}$ となるように a, b の値を定めよ。

【20】(1) 曲線 $C : 3|y - 2x| + 2x^2 = 8$ の概形を書け。

(2) 曲線 C が囲む領域の $y \geq 0$ の部分を D とする。 D の面積を求めよ。

(3) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。