

はしがき

1. はじめに

この講座は『数学Ⅰ』の重要事項を整理しながら、問題についての〈考え方〉〈解き方〉を身につけることを目標にしている講座である。数学Ⅰは高校数学の基礎でセンターテストでも必修である。この夏休みに実力をアップさせることが最も大切である。次の学習法をまもって効果をあげてもらいたい。

2. 内容と学習法

- (1) 最近の入試問題の中から基本から標準的な内容のもので、必ず身につけてもらいたい問題を集めて編集してある。
- (2) 各節毎に重要事項をまとめてあるから、教科書を併用してそれらを再確認する。
- (3) 一応自分で考えてノートに解いてみる。解けなくても予習することで講義がよく理解でき身につくはずである。
- (4) 予習ができなければ復習を中心にする。

以上であるが、夏休みは気がゆるみ、これらを完全に実行するのは難しいことであるが、できるだけ努力して学習すれば短期間の講習でもそれなりに効果をあげることができよう。

目 次

第1回	数と式	4
第2回	方程式・不等式	6
第3回	関数とグラフ	8
第4回	図形と方程式	10
第5回	三角比	12

第1回 数と式

- 【1】(1) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$ の整数部分を α 、小数部分を β とするとき、
 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。
- (2) $x^2 - x - 1 = 0$ のとき、 $x^3 - \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

- 【2】(1) x, y が実数のとき
 $(2+i)x + (3-2i)y = -9+20i$ を満たす x, y を求めよ。
- (2) $(a+2\sqrt{3})^3 = b+30\sqrt{3}$ を満たす自然数 a, b を求めよ。

【3】(1) $a > 0$ で $x^3 + 2x^2 + ax + b$ が $x^2 + ax + 6$ で割り切れるとき、 a 、 b の値を求めよ。

(2) x についての整式 $f(x)$ を $x^2 + 1$ 、 $x + 2$ で割ったときの余りが、それぞれ $x + 1$ 、 2 であった。 $f(x)$ を $(x^2 + 1)(x + 2)$ で割ったときの余りを求めよ。

【4】 a 、 b を正の整数とするととき $a + b$ と ab を7で割ると余りがそれぞれ4と2であった。このとき、 $a^3 + b^3$ を7で割った余りを求めよ。

第2回 方程式・不等式

【5】2次方程式 $x^2 - ax - 2a = 0$ の1つの解 α が正で $\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ とする。

- (1) a を求めよ。 (2) a の値を定めよ。
- (3) 他の解を β とするとき、 $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$ の値を求めよ。

【6】不等式 $x^2 + x - 6 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x^2 + x - 30 < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$,

$(x - 3a + 10)(x - a^2 + 7) < 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ について

- (1) $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を同時に満たす x の範囲を求めよ。
- (2) $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ のすべてを同時に満たす x が存在しないための定数 a の条件を求めよ。

【7】 $x^2 - 2x + a = 0 \dots\dots$ ①, $x^2 - 4x + b = 0 \dots\dots$ ②, $x^2 - 8x + c = 0 \dots\dots$ ③において, ①と②, ②と③, ①と③はそれぞれ共通解をもち, ①と②と③のすべてに共通な解はないとする。このとき, a, b, c を求めよ。

【8】 $0 < a < b, a + b = 1$ であるとき, 次の大小を比較せよ。

(1) $ab, \frac{1}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2}$

(2) $1, \sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{b} - \sqrt{a}, \sqrt{b - a}$

第3回 関数とグラフ

【9】点 $(-3, -5)$ を通る放物線 $y = x^2 + ax + b$ ……① と点 $(2, -2)$ を通る放物線 $y = x^2 + cx + d$ ……② とが直線 $x = 1$ に関して対称なとき、定数 a, b, c, d の値は $a = \square$, $b = \square$, $c = \square$, $d = \square$ である。このとき、点 $(1, \frac{1}{2})$ に関して①の放物線と対称な放物線は $y = \square$ ……③ であり、③は点 $(3, \square)$ を通る。

【10】関数 $y = |x^2 - 4|$ のグラフと直線 $x - 2y + 2a = 0$ との共通点の数は実数 a の値によって異なり、 \square のときは0個、 \square のときは1個、 \square のときは2個、 \square のときは3個、 \square のときは4個である。

【11】実数 x, y が $2x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$ を満たすとき

(1) x がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $x^2 + 2y^2$ の最大値および最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

【12】曲線 $y = \sqrt{x-1}$ と接している直線がある。この直線は x 軸と 45° で交わっている。

(1) 接点 P の座標、およびこの接線が y 軸と交わる点 Q の座標を求めよ。

(2) P において接線と直交する直線が x 軸と交わる点 R の座標を求めよ。

第4回 図形と方程式

【13】方程式 $l_1: x + y + (3 - k) = 0$, $l_2: x - (2 + k)y - 1 = 0$,

$l_3: (2 - k)x - y + 2 = 0$ で表される相異なる直線がある。

- (1) 2直線 l_1 , l_2 が交わらないとき $k = \square$ である。
- (2) 3直線 l_1 , l_2 , l_3 が1点で交わる時 $k = \square$ である。

【14】原点から直線 $y = x - a^2 + 4a - 7$ へ下ろした垂線の長さは、 a の関数 \square で表されるから、実数 a の値がいろいろと変わるならば、 $a = \square$ のとき、垂線の長さは最短になり、その長さは \square となる。

【15】円 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ について

- (1) 点 $(0, 1)$ からこの円にひいた接線の方程式を求めよ。
- (2) 原点を通る直線がこの円と2点で交わるとき、この円によって切り取られる線分の midpoint の軌跡の方程式を求めよ。
- (3) この円と $x^2 + y^2 - 3 = 0$ で表される円の共通部分の面積を求めよ。

【16】 xy 平面上で、不等式 $2x - 5y + 9 \geq 0$, $4x - y - 9 \leq 0$, $x + 2y \geq 0$ を同時に満たす点 (x, y) の存在する領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき、 $2x + y$ の最大値および最小値を求めよ。
- (3) xy 平面上で、不等式 $y \geq mx - 2$ を満たす点 (x, y) の存在する領域を D' とする。領域 D の点がすべて領域 D' に含まれるような m の範囲を求めよ。

第5回 三角比

【17】(1) 次の各式の値を求めよ。

(ア) $(\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 + (\sin 80^\circ + \cos 80^\circ)^2$

(イ) $\tan(45^\circ + \theta) \times \tan(45^\circ - \theta) \times \tan 30^\circ$

(2) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

【18】(1) $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) 方程式 $5 - 4 \cos^2 x - 4 \sin x = 0$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) を解け。

(3) 不等式 $2 \cos x - 3 \tan x \geq 0$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) を解け。

【19】 $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 7$, $AC = 5$ である $\triangle ABC$ において

- (1) $\angle ABC$ の角度を求めよ。
- (2) $\angle ACB = \theta$ とする。このとき $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径をそれぞれ求めよ。

【20】 3 辺の長さが $x - 1$, $\frac{3}{2}$, $4 - x$ である三角形がある。

- (1) x の値の範囲を求めよ。
- (2) $4 - x$ の長さの辺が最大辺となる x の値の範囲を求めよ。
- (3) $x - 1$ の長さの辺の対角の大きさが 60° のとき, x の値はいくらか。