

冬期直前講習 微分・積分ゼミ

【1】(埼玉大一理・工 84)

(1)
$$x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n}$$

$n=1$ のとき $0 < x_1 < 1$ で明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき $0 < x_k < 1$ と仮定する

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2}{2+(1-x_k)}$$

$0 < 1-x_k < 1$ かつ $0 < x_{k+1} < 1$ が成り立つ

以上より、数学的帰納法で $0 < x_n < 1$ が成り立つ。

(証明終わり)

別解1. $n=k$ のとき成り立つとする。

$$0 < x_k < 1 \Rightarrow -1 < -x_k < 0$$

$$\therefore 2 < 3-x_k < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3-x_k} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3} < \frac{2}{3-x_k} < 1$$

$$\therefore 0 < \frac{2}{3} < x_{k+1} < 1$$

よって $0 < x_{k+1} < 1$ でも成り立つ。

以上より数学的帰納法で $0 < x_n < 1$ が成り立つ

(証明終わり)

別解2
$$x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad \text{--- ① かつ}$$

$$1-x_{n+1} = 1 - \frac{2}{3-x_n} = \frac{1-x_n}{3-x_n} \quad \text{--- ②}$$

よって、 $0 < x_n < 1$ ならば ① かつ $x_{n+1} > 0$

また ② から $x_{n+1} < 1 \quad \therefore 0 < x_{n+1} < 1$

$0 < x_1 < 1$ であるから、数学的帰納法によ、 n 対して $0 < x_n < 1$ (証明終わり)

$$(2) \quad 1 - x_{n+1} = 1 - \frac{2}{3 - x_n} = \frac{1 - x_n}{2 + (1 - x_n)} \quad \triangleright \text{特性方程式}$$

$$\frac{1}{1 - x_n} = y_n \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{y_n}}$$

$$\therefore y_{n+1} = 2y_n + 1$$

$$y_{n+1} + 1 = 2(y_n + 1)$$

数列 $\{y_n + 1\}$ は公比 2, 初項 $y_1 = \frac{1}{1 - x_1}$ の等比数列

$$\therefore y_n = y_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1 \cdot 2^{n-1} = +\infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y_n}\right) = 1 \quad (\text{答})$$

別解 1. $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{3 - x_n} - x_n = \frac{(x_n - 1)(x_n - 2)}{3 - x_n} > 0$

$$0 < x_n < 1 \text{ より } x_n < x_{n+1}$$

数列 $\{x_n\}$ は単調増加数列である。 $0 < x_n < 1$ より有界
よえに $\{x_n\}$ は収束する。

$$\alpha = \frac{2}{3 - \alpha}$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = 1 \quad (\text{答})$$

別解2 $1 - x_{n+1} = 1 - \frac{2}{3 - x_n} = \frac{1 - x_n}{2 + (1 - x_n)} < \frac{1}{2} (1 - x_n)$

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2} (1 - x_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - x_{n-1}) < \dots$$

$$0 < 1 - x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - x_1)$$

$$\therefore 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - x_1)$$

はさみ打ちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \text{--- (答)}$$

別解3.

$$1 - x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{3 - x_n}$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{x_n - 3}{-x_n + 1} = \frac{2}{x_n - 1} - 1$$

$$y_n = \frac{1}{x_n - 1} \quad \text{よって} \quad y_{n+1} = 2y_n - 1$$

$$\therefore y_{n+1} - 1 = 2(y_n - 1)$$

$$y_n = 1 + (y_1 - 1) \cdot 2^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x_n - 1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

よって $\{x_n\}$ は収束。極限值 1 --- (答)

【2】(宮城教育大-B類 88)

考え方 変則的な漸化式だから、設問に従って解くことになるが、設問の意図をよく考えてみる。まず、(1)は、背理法がよい。(2) $\{b_n\}$ についてみると、 $b_{n+1}-b_n=f(n)$ なる形になる。

(3) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ を利用する。

解答 (1) $a_{n-1} - a_n = \frac{1}{3} n a_{n-1} a_n \quad (n=2, 3, \dots)$ ①

いま、ある k ($k \geq 2$) で、 $a_k = 0$ となると仮定すると、①より

$$a_{k-1} - a_k = \frac{1}{3} k a_{k-1} a_k \quad \therefore a_{k-1} = 0$$

よって、この手続きをくり返せば、

$$a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_1 = 0$$

ところが、 $a_1 = 3$ だから不合理。よって、 $a_k = 0$ となるような k は存在しない。ゆえに、すべての自然数 n に対して、 $a_n \neq 0$

(2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ より、 $a_n = \frac{1}{b_n} \quad (b_n \neq 0)$

よって、①より

$$\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{b_{n-1}} \cdot \frac{1}{b_n}$$

$$\therefore b_n - b_{n-1} = \frac{1}{3} n \quad (n \geq 2), \quad b_1 = \frac{1}{3}$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} (k+1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6} n(n+1) \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

これは $n=1$ でも成り立つ。

(3) (2)より $a_n = \frac{6}{n(n+1)} = 6 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = 6 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 6 \quad \dots\dots(\text{答})$$

考え方 本問は行列から漸化式を導く典型的な問題。

数列 $\{r^n\}$ の収束条件は, $-1 < r \leq 1$

解答 (1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} a+b=1 & \dots\dots① \\ c+d=1 & \dots\dots② \end{cases}$

①, ②より $a-c=d-b$ が成り立つ。

$$A^n = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} a_n = aa_{n-1} + bc_{n-1} \dots\dots③ \\ c_n = ca_{n-1} + dc_{n-1} \dots\dots④ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n - c_n &= (a-c)a_{n-1} + (b-d)c_{n-1} && (\Leftarrow ③-④) \\ &= (a-c)(a_{n-1} - c_{n-1}) \\ &= (a-c)^{n-1}(a_1 - c_1) = (a-c)^n && \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)の結果より $c_n = a_n - (a-c)^n$ を, ③の c_{n-1} に代入すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= aa_n + b\{a_n - (a-c)^n\} = a_n - b(a-c)^n \\ \therefore a_{n+1} - a_n &= -b(a-c)^n \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a + \sum_{k=1}^{n-1} (a-1)(a-c)^k$$

(イ) $a-c=1$ のとき $a_n = a + (n-1)(a-1) = (a-1)n + 1 \dots\dots(\text{答})$

(ロ) $a-c \neq 1$ のとき $a_n = a + (a-1)(a-c) \frac{1-(a-c)^{n-1}}{1-(a-c)}$
 $= \frac{(1-a)(a-c)^n + c}{1-a+c} \dots\dots(\text{答})$

(3) (2)の結果から, $\{a_n\}$ の収束条件は $a=1$ または $|a-c| < 1$

$a=1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$

$a \neq 1$ で $|a-c| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)(a-c)^n + c}{1-a+c} = \frac{c}{1-a+c} \dots\dots(\text{答})$$

【4】(鹿児島大 87)

考え方 (1) $c > 0$ を $c > 1$, $c = 1$, $0 < c < 1$ の場合に分ける。(2) 微分係数の定義式を書いて, $2 - \cos x = t$ とおく。

どれも, きちんと理解しておきたい手法である。

解答 (1) $c > 1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c^n \left(1 + \frac{1}{c^{2n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log c + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{c^{2n}}\right) \right\} = \log c\end{aligned}$$

$0 < c < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{c^n} (c^{2n} + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{1}{c} + \frac{1}{n} \log (c^{2n} + 1) \right\} = -\log c\end{aligned}$$

$c = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2 = 0 = \log c$$

以上をまとめて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = |\log c|$ (答)

(2) $2 - \cos x = t$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}\therefore \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(1)}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow 1)}} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \cdot \frac{t - 1}{x^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left(\leftarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(1) \right) \\ &= f'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f'(1) \quad \text{.....(答)}\end{aligned}$$

Point: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

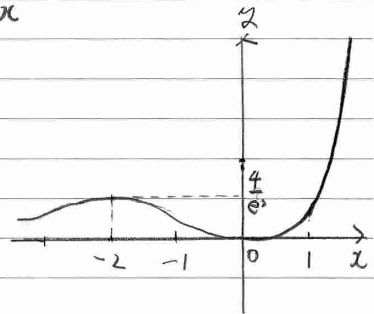
【5】(福岡教育大 88)

$$f(x) = x^2 e^x \dots \textcircled{1}$$

(1) ①より $f(x) = x^2 e^x + 2x e^x = x(x+2)e^x$

よて、①の増減は下表で

x		-2		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$\frac{4}{e^2}$	\searrow	0	\nearrow



$$\left. \begin{array}{l} \text{極大値は } f(-2) = \frac{4}{e^2} \\ \text{極小値は } f(0) = 0 \end{array} \right\} \dots \left(\frac{1}{2}\right)$$

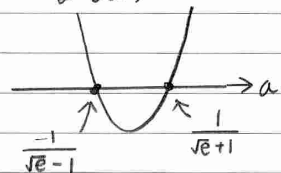
(2) ①から

$$\begin{aligned} f(a) - f(a-1) &= a^2 e^a - (a-1)^2 e^{a-1} & \Delta g(a) &= (e-1)a^2 + 2a - 1 \\ &= e^{a+1} \{e a^2 - (a-1)^2\} & \text{のグラフは下図} \\ &= e^{a-1} \{(e-1)a^2 + 2a - 1\} & y=g(a) \end{aligned}$$

よて、 $e^{a+1} > 0, e-1 > 0$

であるから、 $f(a) > f(a-1)$ を満たす a の範囲は

$$a < \frac{-1}{\sqrt{e-1}}, \frac{1}{\sqrt{e+1}} < a \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

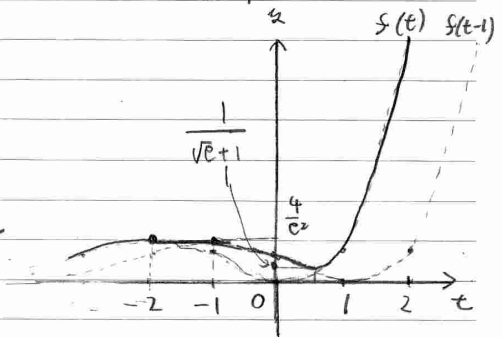


(3) $y = F(t) = \max_{t-1 \leq x \leq t} f(x)$

のグラフは右図太実線部分

よて

$$\left(\frac{1}{2} \right) \begin{cases} t < -2, \frac{1}{\sqrt{e+1}} < t \text{ のとき } F(t) = t^2 e^t \\ -2 \leq t < -1 \text{ のとき } F(t) = 4e^{-2} \\ -1 \leq t < \frac{1}{\sqrt{e+1}} \text{ のとき } F(t) = (t-1)^2 e^{t-1} \end{cases}$$



【6】(芝浦工大-電気工・建築 88)

考え方 (1) $f'(x)$ を計算して、増減表をつくります。

(2) e の極限値の問題です。公式として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

を用います。

解答 (1) $f_n(x) = \sqrt{n(n+1)} - \frac{n^2-1}{nx} - n \log x$ ($n=2, 3, 4, \dots$)

$$f_n'(x) = \frac{n^2-1}{nx^2} - \frac{n}{x} = \frac{n^2-1-n^2x}{nx^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \text{ より } x = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

よって、 $f_n(x)$ の増減表は右ようになるから、 $f_n(x)$ は

$x = 1 - \frac{1}{n^2}$ で極大かつ最大となる。

x		$1 - \frac{1}{n^2}$	
$f_n'(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	↗	極大	↘

$$\therefore a_n = \sqrt{n(n+1)} - n - n \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) (1)より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n(n+1)} - n - n \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{\sqrt{n(n+1)} + n} - n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = e^{-1}$$

であるから、求める極限値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1+1} - \log e \cdot e^{-1} = \frac{1}{2} - \log 1 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

Point: 最大値・最小値は $f'(x)$ の符号を調べる

【7】(東京農工大 87)

考え方 基本的な微分の計算をさせ、グラフをかかせ、さらに、そのグラフを読みとることで、 $f(x)$ の極値を求めさせる良問。

解答 (1) $f(x) = \frac{x}{e^2} + \frac{1 + \log x}{x}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + (1 + \log x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{e^2} - \frac{\log x}{x^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{2}{x^3} \log x = \frac{2 \log x - 1}{x^3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $f''(x) = 0$ より $\log x = \frac{1}{2}$

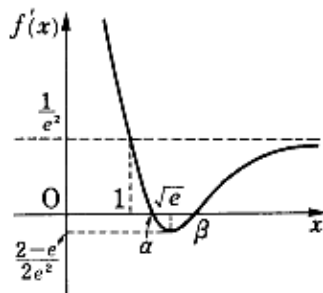
$$\therefore x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$f'(x)$ の増減表より、 $f'(x)$ は $x = \sqrt{e}$ で
最小値

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e} = \frac{2-e}{2e^2} < 0$$

をとり、 $f'(1) = e^{-2} > 0$ をみます。

よって、 $y = f'(x)$ のグラフは右のようになるから、 $f'(x) = 0$ は相異なる2つの実数解をもつ。



(3) (2)で調べた $f'(x)$ の符号から、 $f(x)$ の増減表は右のようになる。よって、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大となり、 $x = \beta$ で極小となる。

$f'(x)$ の右辺の形から、 $x = e$ のとき $f'(e) = 0$ となり、 $\sqrt{e} < e$ だから、 $\beta = e$ である。よって極小値は $f(e) = e^{-1} + 2e^{-1} = 3e^{-1}$

x		α		β	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

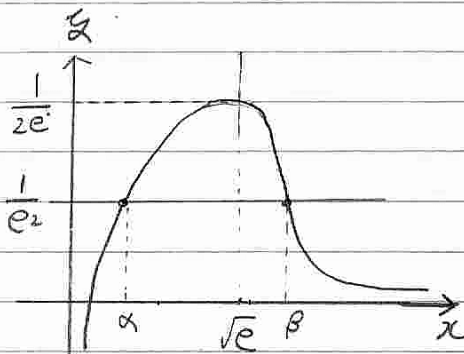
.....(答)

別解 (2) $\frac{\log x}{x^2} = \frac{1}{e^2}$

$g(x) = \frac{\log x}{x^2}$ と置いて $g'(x) = \frac{1-2\log x}{x^3}$ より

x	0		\sqrt{e}	
$g(x)$		\nearrow	0	\searrow
$g'(x)$		+	$\frac{1}{e^2}$	-

よって $y = \frac{1}{e^2}$ と2点で交わり



いるから $f'(x) = 0$ は異なる
2実数解を持つ。

【8】(東北大 87)

考え方 曲線 $y=e^x$ の接線の個数は、接点 (t, e^t) の個数によってきまるから、これが、曲線 $y=ax^2$ の接線になる場合を調べればよい。それは、 a の値によって分類する。すなわち

$f(t)=a$ の定数解の個数を調べるには

$y=f(t)$ のグラフと $y=a$ との共有点の個数を調べる

のである。

解答 $y=e^x$ 上の点 (t, e^t) における接線は

$$y=e^t(x-t)+e^t \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

であるが、題意より、接線①が $y=ax^2$ に接するためには

$$ax^2=e^x(x-t)+e^t \iff ax^2-e^tx+(t-1)e^t=0$$

の判別式=0 となればよい。すなわち

$$e^{2t}-4a(t-1)e^t=0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

が成り立つことである。ここで、 $t=1$ ならば $e^t=0$ となり不合理。

よって $t \neq 1$ かつ $\frac{1}{a} = \frac{4(t-1)}{e^t}$

をみたす実数 t が存在すれば、題意をみたす接線が存在する。

$$\text{いま、} f(t) = \frac{4(t-1)}{e^t} = 4(t-1)e^{-t}$$

とおくと、

$$f'(t) = 4\{e^{-t} + (t-1)(-e^{-t})\} = 4(2-t)e^{-t}$$

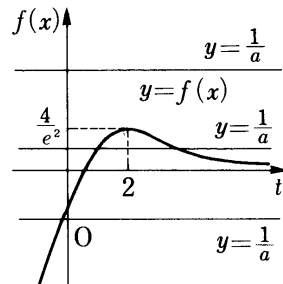
となるから、 $y=f(t)$ のグラフは右のよう

になる。曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=\frac{1}{a}$ の共

有点の個数が接線の本数である。よって

$$\text{(答)} \begin{cases} a > \frac{e^2}{4} \text{ のとき } 2 \text{ 本,} \\ a = \frac{e^2}{4} \text{ のとき } 1 \text{ 本,} \\ 0 < a < \frac{e^2}{4} \text{ のとき } 0 \text{ 本,} \\ a < 0 \text{ のとき } 1 \text{ 本.} \end{cases}$$

t	$-\infty$		2		∞
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	$-\infty$	\nearrow	$\frac{4}{e^2}$	\searrow	0



【8】別解

$y=e^x$ から $y'=e^x$ 点 (t, e^t) における接線は

$$y=e^t(x-t)+e^t \quad \dots\dots ①$$

①が $y=ax^2$ に接することから $ax^2=e^tx-te^t+e^t$

よって

$$ax^2-e^tx+te^t-e^t=0 \quad \text{の判別式 } D=0$$

$$\therefore e^{2t}-4a(t-1)e^t=0$$

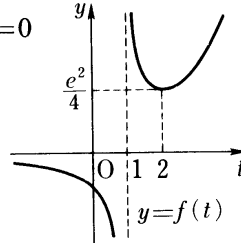
$$t \neq 1 \quad \text{で} \quad a=\frac{1}{4} \cdot \frac{e^t}{t-1}$$

$$f(t)=\frac{1}{4} \cdot \frac{e^t}{t-1} \quad \text{とおくと}$$

$$f'(t)=\frac{(t-2)e^t}{4(t-1)^2}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)=0, \quad \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} f(t)=\pm \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)=\infty$$

$y=f(t)$ のグラフと $y=a$ の共有点の個数が接線の本数であるから

$$\left. \begin{array}{l} a > \frac{e^2}{4} \text{ のとき } 2 \text{ 本, } a = \frac{e^2}{4}, a < 0 \text{ のとき } 1 \text{ 本} \\ 0 < a < \frac{e^2}{4} \text{ のとき } 0 \text{ 本} \end{array} \right\} \dots\dots (\text{答})$$



$$\blacktriangleleft \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

◆ 漸近線

【9】(大阪女大-学芸<基礎理> 88)

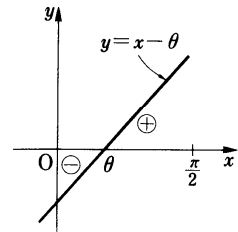
考え方 (1) $f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|x-\theta| d\theta$ の絶対値をはずすために、

$y=x-\theta$ のグラフを書いて、その正負を調べます。

$0 \leq x \leq \theta$ では $x-\theta \leq 0$; $\theta \leq x \leq \pi$ では $x-\theta \geq 0$

となります。

(2) $x-\theta=t$ とおいて、部分積分法を用います。



解答 (1)
$$f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|x-\theta| dx$$

$$= \int_0^{\theta} \sin(-(x-\theta)) dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta) dx$$

$$= -\int_0^{\theta} \sin(x-\theta) dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta) dx$$

$$= -\left[-\cos(x-\theta)\right]_0^{\theta} + \left[-\cos(x-\theta)\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \cos\theta - (\sin\theta - 1) = 2 - (\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= 2 - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の 最大値は $2 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - 1 = 1$ (答)

最小値は $2 - \sqrt{2}$ (答)

(2) $x-\theta=t$ とおくと、 $dx=dt$ かつ
$$\begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow \theta \\ \hline t & -\theta \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\therefore g(\theta) = \int_{-\theta}^0 t \cos t dt = \left[t \sin t + \cos t \right]_{-\theta}^0$$

$$= 1 - (-\theta \sin(-\theta) + \cos(-\theta))$$

$$= 1 - \theta \sin\theta - \cos\theta$$

⇐ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

よって、 $f(\theta) - g(\theta) = (1 - \sin\theta) + \theta \sin\theta > 0$ ($\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$\therefore f(\theta) > g(\theta)$

Point: 絶対値の積分 → 正負の符号で区間を分ける

【10】(大阪大-理・医・薬・工 88)

考え方 (1) 三角方程式 $\sin ax = \sin x$ の一般解は $x = n\pi + (-1)^n \alpha$ です。

(2) (1)の結果をヒントにして、2曲線のグラフを書きます。

(3) $a \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 0$ となります。 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ は常識です。

解答 (1) 方程式 $\sin ax = \sin x$ の一般解は、 n を整数として

$$ax = n\pi + (-1)^n x \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と表せる。よって、求める正の最小解 θ は

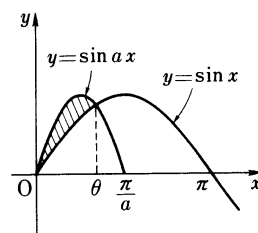
①で、 $n=0$ なら $ax = x \quad \therefore a=1$

となり不適。

$n=1$ なら $ax = \pi - x \quad \therefore (a+1)x = \pi$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{a+1} \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

(2) 2曲線 $y = \sin ax$, $y = \sin x$ のグラフは右図のようになるから、求める図形の面積 $S(a)$ は



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^\theta (\sin ax - \sin x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{a} \cos ax + \cos x \right]_0^\theta \\ &= \frac{1 - \cos a\theta}{a} + \cos \theta - 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで、 $\theta = \frac{\pi}{a+1}$ のとき、 $\cos a\theta = -\cos \theta$ であるから、これらを用いると、②は

$$S(a) = \frac{1}{a} \left\{ (a+1) \cos \frac{\pi}{a+1} - a + 1 \right\} \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

(3) ②より

$$\begin{aligned} (a+1)S(a) &= \frac{\pi}{\theta} \left\{ \frac{1 - \cos a\theta}{a} - (1 - \cos \theta) \right\} \quad \left(\Leftarrow a+1 = \frac{\pi}{\theta} \right) \\ &= \frac{1 - \cos a\theta}{a\theta} \cdot \pi - \pi \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \theta \end{aligned}$$

ここで、 $a \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 0$ だから、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a\theta = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\pi}{a+1} = \pi, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$$

だから

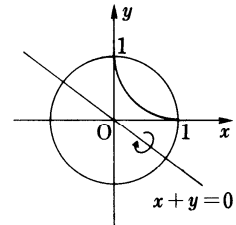
$$\lim_{a \rightarrow \infty} (a+1)S(a) = \frac{1 - \cos \pi}{\pi} \cdot \pi - \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

【11】(千葉大一理系 88)

考え方 直線 $x+y=0$ のまわりに図形を1回転してえられる回転体をそのまま考えるよりは、直線や円を原点のまわりに回転して、考えやすい状態にして求めたほうが自然な考え方ですね。しかも、この種の問題は、直線が回転しやすいように問題がつけられていることに注意して下さい。

解答 点 (x, y) を 45° 回転して点 (X, Y) に移す変換を考えると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y = \sqrt{2}Y \\ xy = \frac{1}{2}(Y^2-X^2) \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



だから、円 $x^2+y^2=1$ は $X^2+Y^2=1$ にうつる。また、
曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=1 &\iff x+y+2\sqrt{xy}=1 \\ &\iff 2\sqrt{xy}=1-(x+y) \\ &\iff 4xy=1-2(x+y)+(x+y)^2 \end{aligned}$$

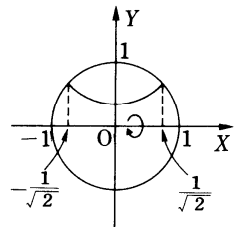
と変形できるから、 $\textcircled{1}$ を代入すると

$$2(Y^2-X^2)=1-2\sqrt{2}Y+2Y^2 \iff 2\sqrt{2}Y=2X^2+1$$

また、直線 $x+y=0$ は $Y=0$ にうつり、2点 $(1, 0), (0, 1)$ はそれぞれ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ に移る。

よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ (1-X^2) - \left(\frac{2X^2+1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right\} dX \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{7}{4} - 3X^2 - X^4 \right) dX \\ &= \pi \left[\frac{7}{4}X - X^3 - \frac{1}{5}X^5 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{3}{5}\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$



$\dots\dots\dots$ (答)

Point: 回転体の回転軸は、 x 軸か y 軸が基準

【12】(中央大ー理工 88)

考え方 (1) 公式にのせて計算すれば求めることができます。1+y'² がxの関数の平方形になるかどうかをまず考えます。

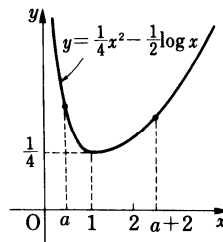
(2) aの関数とみて微分し、増減表をかきます。最小値は慎重に計算する必要があります。

解答 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ より $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$\therefore 1+y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

よって、求める部分の長さ l(a) は

$$\begin{aligned} l(a) &= \int_a^{a+2} \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= \int_a^{a+2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + \log x \right]_a^{a+2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}((a+2)^2 - a^2) + \log(a+2) - \log a \right\} \\ &= a+1 + \frac{1}{2} \log \frac{a+2}{a} \quad \dots\dots\dots \text{(答)} \end{aligned}$$



(2) $l'(a) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2} - \frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a(a+2)}$
 $= \frac{a^2+2a-1}{a(a+2)}$

$l'(a) = 0$ より $a^2+2a-1=0$ を解いて

$$a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$a > 0$ より $a = -1 + \sqrt{2}$

右の増減表から、l(a) は $a = \sqrt{2} - 1$ のとき最小となる。

その最小値は

$$\begin{aligned} l(\sqrt{2}-1) &= \sqrt{2}-1+1 + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}^2-1^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log (\sqrt{2}+1)^2 \\ &= \sqrt{2} + \log (\sqrt{2}+1) \quad \dots\dots\dots \text{(答)} \end{aligned}$$

a	0		$\sqrt{2}-1$	
l'(a)		-	0	+
l(a)			極小	↗

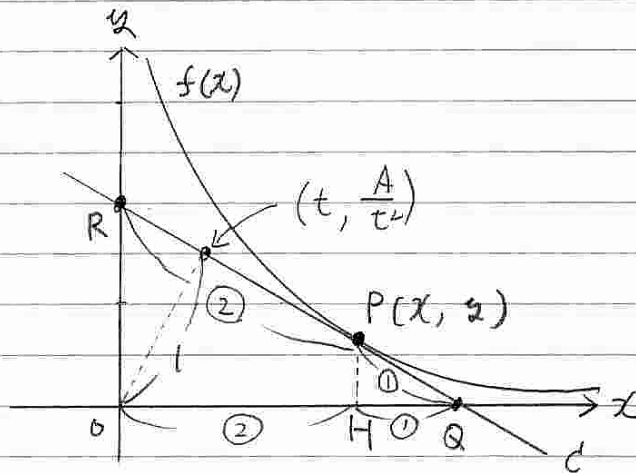
Point: $l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$

【13】(福島県医大 88)

$$\begin{aligned}(1) \quad I_k &= \int_0^{2n\pi} e^{-x} \sin \frac{k}{n} x \, dx \\ &= \left[-e^{-x} \sin \frac{k}{n} x \right]_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} e^{-x} \frac{k}{n} \cos \frac{k}{n} x \, dx \\ &= \frac{k}{n} \int_0^{2n\pi} e^{-x} \cos \frac{k}{n} x \, dx \\ &= \frac{k}{n} \left\{ \left[-e^{-x} \cos \frac{k}{n} x \right]_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} e^{-x} \left(-\frac{k}{n} \right) \sin \frac{k}{n} x \, dx \right\} \\ &= \frac{k}{n} (-e^{-2n\pi} + 1) - \frac{k^2}{n^2} I_k \\ \therefore \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right) I_k &= \frac{k}{n} (1 - e^{-2n\pi}) \\ \left(\frac{n^2 + k^2}{n^2} \right) I_k &= \frac{k}{n} (1 - e^{-2n\pi}) \\ \therefore I_k &= \frac{nk}{n^2 + k^2} (1 - e^{-2n\pi}) \quad \left(\frac{nk}{n^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{nk}{n^2 + k^2} (1 - e^{-2n\pi}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-2n\pi}) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{nk}{n^2 + k^2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-2n\pi}) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2} \\ = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 \quad \left(\frac{nk}{n^2} \right)\end{aligned}$$

【14】(北大一理、工、医進、歯進系<前> 90)



$P(x, y)$ における接線 c

$$Y - y = y'(X - x)$$

$Y = 0$ とおいて

$$-y = y'(X - x)$$

$$X = x - \frac{y}{y'}$$

$$\therefore Q \left(x - \frac{y}{y'}, 0 \right)$$

$X = 0$ とおいて

$$Y - y = -x y'$$

$$Y = y - x y'$$

$$\therefore R(0, y - x y')$$

図において, $QH : HO = 1 : 2$

$$HO = 2QH$$

第1象限内の曲線より $x > 0, y > 0$

$$x = 2 \left(x - \frac{y}{y'} - x \right)$$

$$x = 2 \left(-\frac{y}{y'} \right)$$

$$x y' = -2y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{2}{x} dx$$

$$\log y + \log x^2 = C_1$$

$$\log y x^2 = C_1$$

$$y x^2 = e^{C_1} = A$$

$$\therefore y = \frac{A}{x^2}$$

(B)より, この曲線上の点 $(t, \frac{A}{t^2})$ と原点の距離を d とすると

$$d^2 = t^2 + \frac{A^2}{t^4} = g(t)$$

よって

$$g'(t) = 2t - \frac{4A^2}{t^5} = \frac{2(t^6 - 2A^2)}{t^5}$$

$g'(t) = 0$ より $t^6 = 2A^2$, $t = \sqrt[6]{2A^2}$ のとき最小

t	0		$\sqrt[6]{2A^2}$	
$g'(t)$		-		+
$g(t)$		\searrow		\nearrow

最小値は $d^2 = 1$ より

$$(\sqrt[6]{2A^2})^2 + \frac{A^2}{(\sqrt[6]{2A^2})^4} = 1$$

$$\sqrt[3]{2A^2} + \frac{A^2}{(\sqrt[3]{2A^2})^2} = 1$$

$$\frac{(\sqrt[3]{2A^2})^3 + A^2}{(\sqrt[3]{2A^2})^2} = 1$$

$$\frac{2A^2 + A^2}{2^{\frac{2}{3}} A^{\frac{4}{3}}} = 1$$

$$\frac{3A^2}{2^{\frac{2}{3}} A^{\frac{4}{3}}} = 1$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{A^2} = 1$$

$$y \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{A^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad \text{よ) } A^2 = \frac{4}{27}$$

$$\therefore A = \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9x^2} \quad \text{(答)}$$

[別解] $f(x) = yx^2 = A$ 上の点 (x, y) と原点の距離 d は

$$d^2 = x^2 + y^2 = \frac{A}{y} + y^2 = h(y) = \frac{A + y^3}{y}$$

と置く

$$h'(y) = -\frac{A}{y^2} + 2y = \frac{2y^3 - A}{y^2}$$

$$h'(y) = 0 \text{ よ) }$$

$$2y^3 - A = 0$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{\frac{A}{2}}$$

最小値

$$h_{\min}(y) = \frac{A + y^3}{y} = \frac{A + \frac{A}{2}}{y} = \frac{3A}{2y} = 1$$

$$\therefore y = \frac{3}{2} A \text{ よ) } \sqrt[3]{\frac{A}{2}} = \frac{3}{2} A$$

$$\frac{A}{2} = \frac{27}{8} A^3$$

$$A^2 = \frac{4}{27}$$

$$\therefore A = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9x^2} \quad \text{(答)}$$

【14】別解

傾向と対策

♥前問では、接点の座標を (x, y) の代わりに、 $(\alpha, f(\alpha))$ とえらんだのですが、本問のように、“分点の問題”や“ x 軸、 y 軸との交点”の問題のときは、 $(\alpha, f(\alpha))$ をとるよりは、点 (x, y) をそのまま生かした方が何かと便利です。そのためには、

臨時に X 軸、 Y 軸を新しく導入した“流通座標”を用いることです。これによれば、点 (x, y) における接線は

$$Y - y = y'(X - x) \quad \text{または} \quad Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

と表すことができます。そして、直ぐに、 X, Y はその姿を消していきます。

♥この練習のために、次の基本問題で腕ならしをしてみましょう。

基本例題

曲線 $y = f(x)$ ($x > 1$) は正で、かつ増加である。この曲線上の任意の点 $P(x, y)$ における接線と直線 $y = -1$ との交点を Q とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) 2直線 OP, OQ が直交するとき、 $y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。ただし、 O は原点である。
- (3) $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) が(2)で得られた微分方程式の解となるように a, b, c の値を決定せよ。

(’90 日本工大-機械工, 電気電子工)

《方針》 (1)は、流通座標を用いて、 $y = -1$ は $Y = -1$ とみます。

(2) $OP \perp OQ$ は、内積 = 0 と同値です。

(3) 解はすべての x に対して成立しますので、 $y = ax^2 + bx + c$ を代入して得られる等式は、“ x の恒等式”となります。

解 (1) $y = f(x)$ 上の点 $P(x, f(x))$ における接線の方程式は

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

であり、直線 $y = -1$ との交点は $Y = -1$ として

$$X = x - \frac{1 + f(x)}{f'(x)} \quad \therefore \quad Q\left(x - \frac{1 + f(x)}{f'(x)}, -1\right)$$

(2) $OP \perp OQ \iff \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$ から

$$x\left(x - \frac{1 + f(x)}{f'(x)}\right) + (-1)f(x) = 0$$

よって、求める微分方程式は $\{x^2 - f(x)\}f'(x) = x\{1 + f(x)\}$

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと

$$f'(x) = 2ax + b$$

(2)の微分方程式に代入して

$$\begin{aligned} & \{x^2 - (ax^2 + bx + c)\}(2ax + b) \\ &= x\{1 + (ax^2 + bx + c)\} \\ \therefore & 2a(1-a)x^3 + b(1-3a)x^2 - (2ac + b^2)x - bc \\ &= ax^3 + bx^2 + (c+1)x \end{aligned}$$

これがすべての x に対して成立するためには

$$\begin{cases} 2a(1-a) = a, & b(1-3a) = b \\ -(2ac + b^2) = c+1, & -bc = 0 \end{cases}$$

これらを連立させると

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{2}$$

♥本問の点 $P(x, y)$ は線分 QR を $1:2$ に内分しますが、ベクトルを使う必要はなく、 x 軸上か y 軸上のどちらかで、線分を $1:2$ に内分する点を考えるだけで十分です。次の解答は、 x 軸上で考えています。

解答 点 $P(x, y)$ での C の接線は

$$Y - y = y'(X - x)$$

$$Y = 0 \text{ のとき} \quad X = x - \frac{y}{y'} \quad \therefore Q\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$$

曲線は第1象限にあるから $x > 0, y > 0$

P から x 軸に下ろした垂線の足を $P'(x, 0)$ 、原点を O とすれば、 P' は QO を $1:2$ に内分する。

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\left(x - \frac{y}{y'}\right), \quad x \frac{dy}{dx} = -2y \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int \frac{2}{x} dx, \quad \log y = \log x^{-2} + c = \log e^c x^{-2} \\ \therefore y &= f(x) = \frac{C}{x^2} \quad (e^c = C) \end{aligned}$$

次に曲線上の任意の点を $T(x, y)$ とする。

$$\begin{aligned} OT^2 &= x^2 + y^2 = \frac{C}{y} + y^2 = \frac{C + y^3}{y} \\ (OT^2)' &= 2y - \frac{C}{y^2} = \frac{2y^3 - C}{y^2} \end{aligned}$$

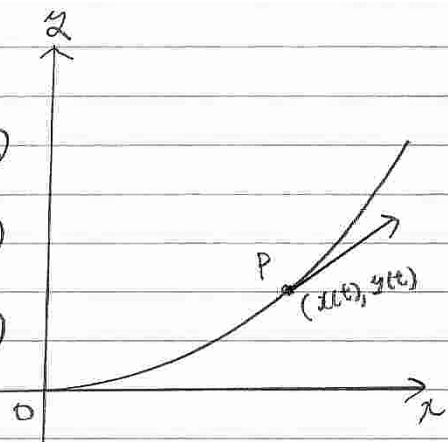
$y = \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極小かつ最小となる。最小値は

$$\begin{aligned} OT^2 &= \left(C + \frac{C}{2}\right) \div \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \therefore C &= \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ \therefore y &= f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

【15】(筑波大 90)

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ (速度ベクトル)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2-y} \quad \text{--- ①} \\ \frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{--- ②} \\ \frac{dy}{dt} < 0 \quad \text{--- ③} \end{array} \right.$$



①, ②より

$$1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2 - y, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - y$$

③より $\frac{dy}{dt} = -\sqrt{1-y}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \int dt$$

$$\therefore 2\sqrt{1-y} = t + C_1$$

$t=0$ のとき $y=0$ より $C_1 = 2 \therefore 2\sqrt{1-y} = t + 2$

両辺は正だから平方しても同値

$$4(1-y) = (t+2)^2$$

$$y = 1 - \frac{1}{4}(t+2)^2$$

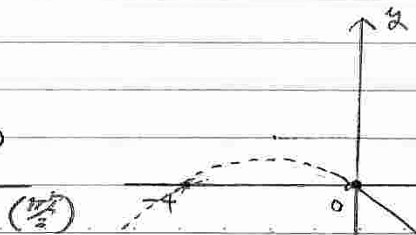
$$\therefore y = -\frac{t^2}{4} - t$$

②より $x = t + C_2$, $t=0$ のとき $x=0$ より $C_2 = 0$

$$\therefore x = t$$

$t \geq 0$ の P の軌跡は

$$y = -\frac{x^2}{4} - x, \quad x \geq 0$$



【16】（東京農工大一工）

考え方 (1) 両辺を x で微分して $x=0$ とおき, $f'(0)$ を求める。

(2) さらに両辺を x で微分して, $\int \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \log |f'(x)| + C$ を用いる。

ASSIST

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \implies y = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

解答 (1) ①式で $x=0$ とおくと

$$f(0) - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore f(0) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

①式は

$$(x+1)^2 f(x) - 2x \int_0^x f(t) dt + 2 \int_0^x t f(t) dt - \frac{1}{2} = 0$$

であるから, 両辺を x で微分して

$$2(x+1)f(x) + (x+1)^2 f'(x) - 2 \int_0^x f(t) dt = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$x=0$ とおくと $2f(0) + f'(0) = 0$

$$\therefore f'(0) = -2f(0) = -1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) ②をさらに x で微分すると

$$4(x+1)f'(x) + (x+1)^2 f''(x) = 0$$

よって $\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{4}{x+1} \quad \dots\dots(3)$

$$\int \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \int \left(-\frac{4}{x+1}\right) dx \quad \therefore \log |f'(x)| = -4 \log |x+1| + C_1$$

$$f'(x) = C_2(x+1)^{-4} \quad f'(0) = -1 \quad \text{から} \quad C_2 = -1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^4} \quad \text{を積分して,} \quad f(x) = \frac{1}{3(x+1)^3} + C_3$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{から} \quad C_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{6} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\leftarrow \int_0^0 f(t) dt = 0$$

$$\leftarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

(1) $x_n < a$ の証明

$n=0$ のとき $0 < x_0 < a$ より成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。 $0 < x_k < a$

$$\begin{aligned} a - x_{k+1} &= a - \frac{1}{1-a} (1-x_k)x_k \\ &= \frac{a(1-a) - (1-x_k)x_k}{1-a} \\ &= \frac{a-x_k}{1-a} (1-a-x_k) \end{aligned}$$

仮定より $a - x_k > 0$, $1-a > 0$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$ より, $1-a \geq \frac{1}{2} \therefore 1-a \geq a$

$$1-a-x_k > 0$$

$$\therefore a > x_{k+1}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(証明終わり)

(2) $x_n > 0$ の証明

$n=1$ のとき成り立つ。

$n=k$ のとき $x_k > 0$ と仮定する。

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-a} (1-x_k) > 0$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ。 $\therefore x_n > 0$ が成り立つ

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{1-a} (1-x_n)x_n - x_n \\ &= \frac{x_n - x_n^2 - x_n + ax_n}{1-a} \\ &= \frac{x_n \{ (a-x_n) - x_n \}}{1-a} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore x_n < x_{n+1}$ が成り立つ

(証明終わり)

$$(3) \quad a - x_n = a - \frac{1}{1-a} (1 - x_{n-1}) x_{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{x_{n-1}}{1-a}\right) (a - x_{n-1})$$

(2) より

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < a \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ より}, \quad \frac{1}{2} \leq 1-a < 1$$

$$0 < \frac{x_0}{1-a} < \frac{x_1}{1-a} < \dots < \frac{x_n}{1-a} < 1$$

$$1 - \frac{x_{n-1}}{1-a} < 1 - \frac{x_0}{1-a}$$

$$\therefore a - x_n < \left(1 - \frac{x_0}{1-a}\right) (a - x_{n-1})$$

$$< \left(1 - \frac{x_0}{1-a}\right)^2 (a - x_{n-2})$$

$$< \left(1 - \frac{x_0}{1-a}\right)^3 (a - x_{n-3}) \dots$$

これを繰り返して用いると

$$a - x_n < \left(1 - \frac{x_0}{1-a}\right)^n (a - x_0)$$

$$\therefore 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a - x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{x_0}{1-a}\right)^n (a - x_0) \right\} = 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a - x_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (\text{証明終り})$$

【18】(室蘭工大 88)

考え方 本問は、区間付きの最大・最小問題で、しかも、文字を含んでいますから、
 a の値によって、場合分けをする

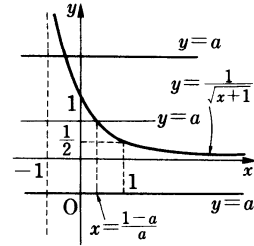
必要があります。とくに、極大点を与える x の値が、区間内に属する場合と属さない場合に分けて考えるのがポイントです。

解答 $f(x) = \log(1+x) - ax$ ($0 \leq x \leq 1$) より

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - a = \frac{a}{1+x} \left(\frac{1-a}{a} - x \right)$$

となるから、区間 $0 \leq x \leq 1$ において、

$y = \frac{1}{1+x}$ と $y = a$ とのグラフを考えると右図のようになる。



よって、区間 $0 \leq x \leq 1$ では

(ア) $a < 0$ のとき、 $\frac{1}{1+x} > a$ だから $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は単調増加となるから、 $M(a) = f(1) = \log 2 - a$

(イ) $a = 0$ のとき、 $f'(x) > 0$ だから $f(x)$ は単調増加。

$$\therefore M(a) = f(1) = \log 2$$

(ウ) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき、 $1 < \frac{1-a}{a}$ であるから、やはり $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は単調増加となるから、 $M(a) = f(1) = \log 2 - a$

(エ) $\frac{1}{2} \leq a < 1$ のとき、 $0 < \frac{1-a}{a} \leq 1$ となり、

$f(x)$ は右の増減表より、 $x = \frac{1-a}{a}$ のとき極大となる。

x	0	$\frac{1-a}{a}$	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗ 極大	↘

最大値(極大値)は

$$M(a) = f\left(\frac{1-a}{a}\right) = \log \frac{1}{a} - (1-a) = a - 1 - \log a$$

(オ) $a \geq 1$ のとき、 $\frac{1-a}{a} \leq 0$ より、 $f'(x) < 0$

ゆえに、 $f(x)$ は単調減少で、 $M(a) = f(0) = 0$

以上の(ア)~(オ)をまとめると

$$M(a) = \begin{cases} \log 2 - a & (a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ a - 1 - \log a & (\frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots\dots(\text{答})$$

《注意》 上の解答では、 $y = a$ が下から上へ動いていくようなイメージをもとに場合分けをしました
 が、実際には

$$a < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq a < 1, a \geq 1$$

の3通りで十分です。

【19】 (信州大 90)

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sin^2 \theta & \dots \textcircled{1} \\ y = \sin^2 \theta \cos \theta & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$y^2 = \sin^4 \theta \cos^2 \theta = \sin^4 \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore y^2 = x^2 (1 - x)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } 0 \leq x \leq 1 \quad \therefore y = \pm x \sqrt{1-x}$$

$$f(x) = x \sqrt{1-x} \text{ とおく}$$

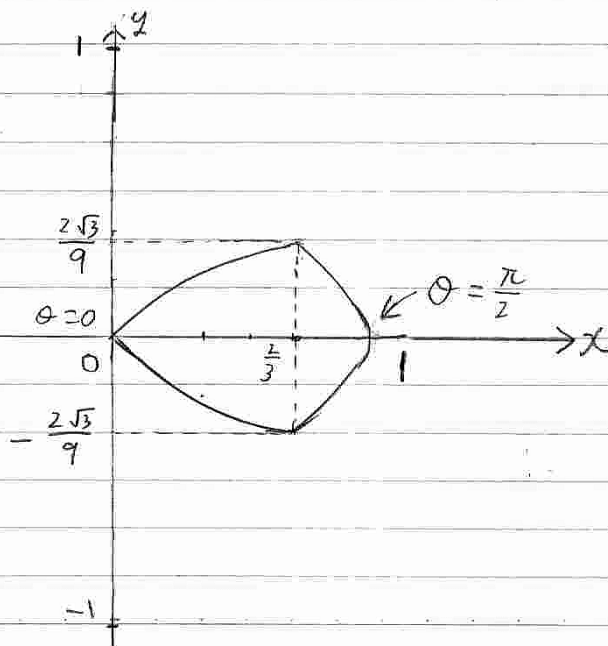
$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		\nearrow	極大	\searrow	

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき極大値 } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f(0) = f(1) = 0$$

$y = -x \sqrt{1-x}$ のグラフをおおせし、求める曲線は下図。



$$(2) \quad S = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$$

$$\sqrt{1-x} = t \quad \& \quad 1-x = t^2, \quad x = 1-t^2$$
$$dx = -2t dt$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

$$\therefore S = 2 \int_1^0 (1-t^2) t (-2t) dt$$

$$= 4 \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt$$

$$= 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt$$

$$= 4 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{8}{15} \quad (\text{Ans})$$

$$(3) \quad V = \pi \int_0^1 (x \sqrt{1-x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 (1-x) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{12} \quad (\text{Ans})$$

【20】(鳥取大-医・工・教育・農 88)

考え方 (1) 面積や弧長の定義をそのまま書けばよいのです。 $f(x) > 0$ に注目します。

(2) 条件式に代入して、等式をつくり、両辺を平方します。

(3) (2)の微分方程式は変数分離形ですから、両辺を積分します。ここで、 $t=0$ とおいて、初期条件を求めることを考えます。

解答 (1) 題意より、 $t \geq 0$ として解く。 $f(x) > 0$ より

$$S(t) = \int_0^t f(x) dx, \quad L(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

(2) 条件式: $S(t) + L(t) = f(t) - 4$ に(1)の結果を代入すると

$$\int_0^t f(x) dx + \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = f(t) - 4 \quad \dots\dots\dots\textcircled{1}$$

①の両辺を t について微分すると

$$f(t) + \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} = f'(t)$$

$$\therefore \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} = f'(t) - f(t)$$

$f'(t) \geq f(t) > 0$ として、両辺を平方すると

$$1 + \{f'(t)\}^2 = \{f'(t)\}^2 - 2f'(t)f(t) + \{f(t)\}^2$$

$$\therefore 2f'(t)f(t) = \{f(t)\}^2 - 1$$

ここで、 $y = f(x)$ とおくと、 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ だから、次の微分方程式をえる。

$$2y \frac{dy}{dx} = y^2 - 1 \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

(3) $\frac{dy}{dx} \geq y > 0$ より $y^2 - 1 > 0$ ゆえ $\frac{2y}{y^2 - 1} dy = dx$ と変形できるから、両辺を積分

すると $\int \frac{2y}{y^2 - 1} dy = \int dx \quad \therefore \log(y^2 - 1) = x + c$

$$\therefore \log(y^2 - 1) = \log e^{x+c} = \log e^c \cdot e^x$$

$e^c = C$ おくと

$$y^2 - 1 = Ce^x \quad \therefore y^2 = Ce^x + 1 \quad \dots\dots\dots\textcircled{2}$$

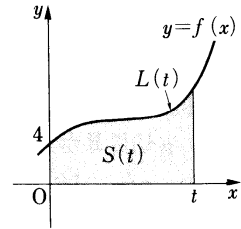
ここで、①に $t=0$ を代入すると、 $f(0)=4$ (初期条件) がえられる。

②より

$$4^2 = Ce^0 + 1 \quad \therefore C = 15$$

よって、 $y^2 = 15e^x + 1$ となり、 $f(x) > 0$ だから、求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sqrt{15e^x + 1} \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$



Point: $S(t) = \int_0^t f(x) dx \iff S'(t) = f(t), \quad S(0) = 0$

$p > 0, q > 0$ とする。点 (x, y) が曲線, $x^p + y^q = 1$ ($x > 0, y > 0$) の上を動くとき, $z = xy$ の最大値を求めよ。

傾向と対策

♥本問は, 点 (x, y) が曲線 $x^p + y^q = 1$ 上を動くという, 条件の下で, $z = xy$ の最大値を求める問題です。この種の問題は, “基解” に多く見られますが, “微積” には, そう多くはありません。しかし, 条件が次のようにカンタンな $a + b = 1$ というものならば結構出題されているといってもよいでしょう。

♥次の基本問題で, そのポイントを再確認して下さい。

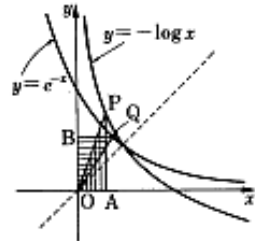
基本例題

$a > 0, b > 0$ とする。原点を O とする座標平面において, 点 $A(a, 0)$ を通り y 軸に平行な直線が曲線 $y = -\log x$ と交わる点を P , 点 $B(0, b)$ を通り x 軸に平行な直線が曲線 $y = e^{-x}$ と交わる点を Q とする。いま $a + b = 1$ であるとき, $\triangle OAP$ と $\triangle OBQ$ の面積の和を最大にする a の値と, その最大値を求めよ。 (’90 東邦大-医)

◀方針▶ 本問に現われる 2 つの関数 $y = -\log x$ と $y = e^{-x}$ は互いに逆関数ですから直線 $y = x$ に関して対称なグラフになります。そこで, グラフを下図のように書いて, 2 つの $\triangle OAP, \triangle OBQ$ を書きますと, どれも直角三角形ですから, 面積はカンタンに表示できます。そこに, 条件 $a + b = 1$ を用いて, 例えば, $b = 1 - a$ として, b を代入します。このとき, $a > 0, b > 0$ より $0 < a < 1$ を忘れないことが大切です。

解

$a > 0, b > 0$
 から $P(a, -\log a)$
 Q の x 座標は $b = e^{-x}$
 $-x = \log b \quad \therefore x = -\log b$
 よって $Q(-\log b, b)$
 $\triangle OAP + \triangle OBQ = S$ とおくと $S = \frac{1}{2}a(-\log a) + \frac{1}{2}b(-\log b)$
 $a + b = 1$ のとき $0 < a < 1$



$$S = -\frac{1}{2}\{a \log a + (1-a) \log(1-a)\}$$

$$\frac{dS}{da} = -\frac{1}{2}\left\{\log a + a \cdot \frac{1}{a} - \log(1-a) + (1-a) \frac{-1}{1-a}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\log a - \log(1-a)\}$$

$\frac{dS}{da} = 0$ となるのは $\log a = \log(1-a)$

$$\therefore a = 1 - a, \quad a = \frac{1}{2}$$

増減表から, $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最大で最大値は

$$S = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log 2$$

a	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{dS}{da}$		+	0
S		↗	↘

♥次の条件付き最大問題は、円錐状の容器の容積を最大にする問題です。当然、条件文を式で表現すればそれが条件式になりますネ。

基本例題

円形の紙から、その2つの半径にそってはさみをいれて扇形を切りおとし、残った部分で切り口として生じた2つの半径をはりあわせてふたのない円錐状の容器を作る。

この容器の容積を最大にするには、切りおとす扇形の中心角をいくらにすればよいか。

(’90 大分医大)

◀**方針**▶ 本問には、文字や変数が与えられてありませんので、自分でそれを適当におきます。では、文字をどう定めるのか。それが本問のポイントです。図を書くとうわかります。

解 残った扇形の半径を a ，中心角を θ とする。

円錐の底面の半径を r ，高さを h とする。

このとき $2\pi r = a\theta$ ， $r^2 = a^2 - h^2$

円錐の容積 V は

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(a^2 - h^2)h \quad (0 < h < a)$$

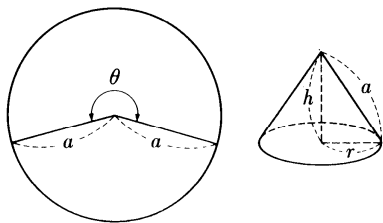
$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(a^2 - 3h^2) = 0 \quad \text{より} \quad h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h < 0 \quad \text{より、} \quad V \text{ は、} \quad 0 < h < a \quad \text{で上に凸。}$$

したがって、 V は $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最大となる。

$$\text{このとき、} \quad r = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad \text{より} \quad \theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

$$\text{よって、切りおとす扇形の中心角は} \quad 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi = \frac{2(3 - \sqrt{6})}{3}$$



◀ 容積 V を h の関数として捉えます。

♥ $z = xy$ を $z^q = x^q y^q$ と直して、 y^q を消去するのがポイントでしょう。

解答 $x^p + y^q = 1 \quad (x > 0, y > 0)$ ①

のとき、 $z^q = x^q y^q$ を最大にする x, y の値に対して、 $z = xy$ は最大になる。

①より $y^q = 1 - x^p \quad (0 < x < 1)$

このとき $f(x) = z^q = x^q(1 - x^p)$

とおけば

$$f'(x) = qx^{q-1}(1 - x^p) + x^q(-px^{p-1}) = x^{q-1}\{q - (p+q)x^p\}$$

$p > 0, q > 0$ より $0 < \frac{q}{p+q} < 1$

であるから、右の増減表により

$z^q = f(x)$ は、 $x = \left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}$ のとき、最大となり、このとき

$$y^q = 1 - \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} \quad \text{より} \quad y = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

よって、 z の最大値は

$$\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{p^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{p}}}{(p+q)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} \quad \left(x = \left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}, y = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}} \text{ のとき}\right)$$

x	0	$\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}$	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗		↘