

## 冬期講習 基礎解析・代数幾何 S

【1】(東北学院大・経済 89)

(1)  $ka_k = f(k) - f(k-1)$  となる  $f$  を見つけてみよう。

[解] (1)  $a_k = 2^{k-1} \quad \therefore a_{k+1} - a_k = a_k$

$$\therefore ka_k = ka_{k+1} - ka_k = ka_{k+1} - (k-1)a_k - a_k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n ka_k = na_{n+1} - 0 \cdot a_1 - \sum_{k=1}^n a_k = n \cdot 2^n - (2^n - 1)$$

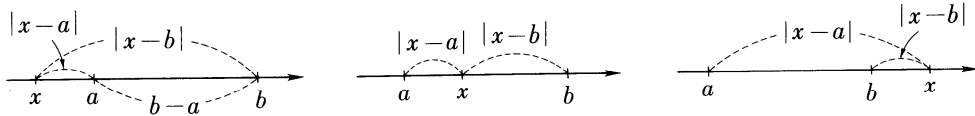
(2)  $k^2 a_k = k^2 a_{k+1} - k^2 a_k = k^2 a_{k+1} - \{(k-1) + 1\}^2 a_k$   
 $= k^2 a_{k+1} - \{(k-1)^2 + 2(k-1) + 1\} a_k$   
 $= k^2 a_{k+1} - (k-1)^2 a_k - 2ka_k + a_k$

$$\sum_{k=1}^n k^2 a_k = n^2 a_{n+1} - 0^2 \cdot a_1 - 2(n \cdot 2^n + 1 - 2^n) + (2^n - 1)$$
$$= (n^2 - 2n + 3) \cdot 2^n - 3$$

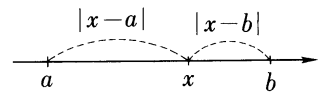
【2】(富山大 89)

**考え方** 昭和40年代に流行したタイプである。 $|u-v|$  は数直線上における2点  $u, v$  の間の距離であるから、

$a < b$  のとき、 $|x-a|+|x-b|$  の最小値は  $b-a$



**解答**  $a < b$  のとき、 $|x-a|+|x-b|$  は、数直線上で、点  $a$  と点  $x$  の距離、点  $b$  と点  $x$  の距離の和であるから、



$$|x-a|+|x-b| \geq b-a$$

(等号は  $a \leq x \leq b$  のとき成り立つ)

$$\therefore |x-1|+|x-100| \geq 99, |x-2|+|x-99| \geq 97$$

$$|x-3|+|x-98| \geq 95, \dots, |x-50|+|x-51| \geq 1$$

$$\therefore f(x) \geq 99+97+95+\dots+1 = \frac{1}{2}(99+1) \cdot 50 = 2500$$

等号は  $1 \leq x \leq 100, 2 \leq x \leq 99, 3 \leq x \leq 98, \dots, 50 \leq x \leq 51$  がすべて成り立つとき、すなわち、 $50 \leq x \leq 51$  のときに成り立つ。 (答) 2500

**別解**  $x \leq 1$  のとき、 $f(x) = (1-x) + (2-x) + \dots + (100-x)$  は減少関数。

$$x \geq 100 \text{ のとき、} f(x) = (x-1) + (x-2) + \dots + (x-100)$$

は増加関数。 $1 \leq x \leq 2, 2 \leq x \leq 3, \dots, 99 \leq x \leq 100$  の各区間で  $f(x)$  は  $x$  の1次関数になるから、 $x=1, 2, \dots, 100$  のいずれかで最小になる。

$i$  を  $1 \leq i \leq 100$  の自然数として、

$$f(i) = (i-1) + (i-2) + \dots + 0 + \dots + (100-i)$$

$$= \frac{1}{2}i(i-1) + \frac{1}{2}(100-i)(100-i+1) = i^2 - 101i + 101 \cdot 50$$

は  $i=50, 51$  で最小値 2500 をとる。

【3】(工学院大 電気・建築 89)

**考え方** 点を群に分けるのが第1手である。今は、直線  $x+y=1, x+y=2, \dots$  上にあるものに着目していく。 $n$ 番目の点におかれる数は  $n$ である(個数と番号が一致する)。(3)は、(1)で求めた数を用いてハサミコミをしていくとよい。

**解答** (1)  $k \geq 2$  のとき、直線

$x+y=1, x+y=2, \dots, x+y=k-1$   
上には、点が  $2, 3, \dots, k$  個あるから、  
ここまでで合計

$$2+3+\dots+k=(1+2+\dots+k)-1$$

$$=\frac{1}{2}k(k+1)-1 \text{ 個}$$

ある。 $n$ はこの次のもので、 $n=\frac{1}{2}k(k+1) \dots$ (答)

これは  $k=1$  のときにも正しい。

(2)  $f(k)=\frac{1}{2}k(k+1)$  とおく。 $(i+j, 0)$ におかれる  
数は  $f(i+j)$  で、 $(i, j)$ におかれる数はこれから  $j$   
番すすんだもの。

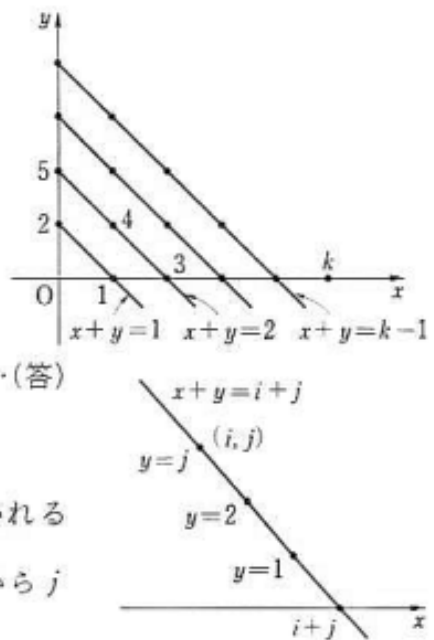
$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+j$$

(3) 1000が直線  $x+y=k$  上にあるとすると、 $f(k) \leq 1000 < f(k+1)$

$$\frac{1}{2}k^2 \approx 1000 \text{ として見当をつけると、} k \approx 20\sqrt{5} = 44.72 \dots$$

$$f(44) = 22 \cdot 45 = 990, \quad f(45) = 45 \cdot 23 = 1035 \quad \therefore f(44) \leq 1000 < f(45)$$

よって直線  $x+y=44$  上で、 $(44, 0)$  から 10 番すすんだもの。(答)  $(34, 10)$



【4】(成城大-経 89)

(1) 球の中心を結んでできる四角すい  
O-ABCD の1辺はどの辺も

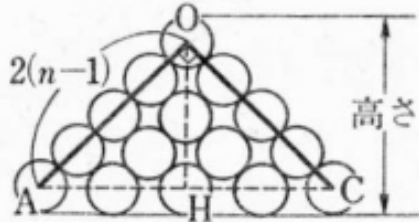
$$2(n-1)$$

この高さHは右図から

$$OH = \sqrt{2}(n-1)$$

よって、求める高さは

$$\sqrt{2}(n-1) + 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2) 球の総数 =  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \dots\dots(\text{答})$

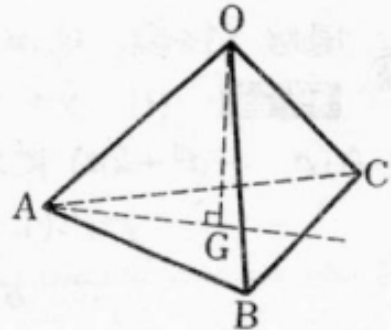
(3) 球の中心を結んでできる三角すいの1辺はどの辺も

$$2(n-1)$$

であり、右図の  $\triangle ABC$  の重心  
をGとすると

$$OG = \sqrt{OA^2 - \left(\frac{2}{3}AB \sin 60^\circ\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2(n-1)$$



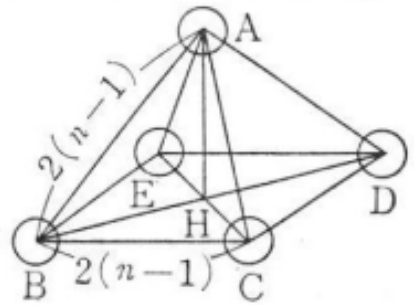
よって、求める高さは  $\frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1) + 2 \quad \dots\dots(\text{答})$

(4) 球の総数 =  $\sum_{k=1}^n (1+2+\dots+k)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \dots\dots(\text{答})$$

【4】(別解)

(1) 右図のように、各頂点にある球の中心を A, B, C, D, E とし、BD と CE の交点を H とする。各頂点の球の中心間の長さはすべて  $2(n-1)$  で等しいので  $AB=2(n-1)$



また  $BD=2\sqrt{2}(n-1) \quad \therefore BH=\sqrt{2}(n-1)$

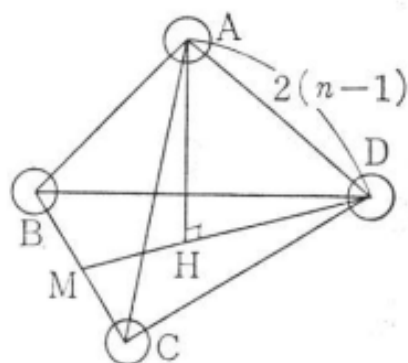
これより  $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{2}(n-1)$

よって、求める高さは  $\sqrt{2}(n-1)+2 \quad \dots\dots$  [答]

$$(2) 1+4+9+\dots+n^2=\sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$\dots\dots$  [答]

(3) (1)と同様に各頂点の球の中心を  $A, B, C, D$  とし,  $BC$  の中点を  $M$ ,  $A$  から底面におろした垂線の足を  $H$  とする. 各頂点の球の中心間の長さはすべて  $2(n-1)$  で等しいので



$$AD=2(n-1)$$

また  $DM=\sqrt{3}(n-1)$  であるから  $DH=\frac{2\sqrt{3}}{3}(n-1)$

これより  $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1)$

よって, 求める高さは  $\frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1)+2$  .....[答]

(4) 各段の個数は上の段から

1, 3, 6, 10, 15, 21, .....

この数列の第  $n$  項は  $1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{2}n(n+1)$

よって, 求める球の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k(k+1) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \text{.....[答]} \end{aligned}$$

【5】(日本大-生産工 89)

(1)  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0$  の解を  $a, \beta$  ( $a < \beta$ ) とすると  $f'(x) = 3(x-a)(x-\beta)$  とかけて、

$$\int_a^\beta f'(x) dx = 3 \int_a^\beta (x-a)(x-\beta) dx \quad \therefore f(\beta) - f(a) = -\frac{1}{2}(\beta-a)^3$$

$$f(a) - f(\beta) = 4 \text{ より } (\beta-a)^3 = 8 \quad \therefore \beta-a = 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \quad \therefore \beta - a = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - 3b} = 3 \quad \therefore a^2 - 3b = 9 \quad \dots\dots(\text{答})$$

【別解】

$3x^2 + 2ax + b = 0$  の解  $a, \beta$  ( $a < \beta$ ) に対し、 $a + \beta = -\frac{2}{3}a$ ,  $a\beta = \frac{b}{3}$

$$\begin{aligned} f(a) - f(\beta) &= (a^3 - \beta^3) + a(a^2 - \beta^2) + b(a - \beta) \\ &= (a - \beta)\{a^2 + a\beta + \beta^2 + a(a + \beta) + b\} \\ &= -\sqrt{(a + \beta)^2 - 4a\beta}\{(a + \beta)^2 - a\beta + a(a + \beta) + b\} \\ &= -\sqrt{\frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}b}\left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{b}{3} - \frac{2}{3}a^2 + b\right) = \frac{4}{27}(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}} \quad [\text{後省略}] \end{aligned}$$

(2)  $x = t$  における接線  $y = (3t^2 + 2at + b)(x - t) + t^3 + at^2 + bt$   
 が  $(0, 8)$  を通るとき、 $8 = -2t^3 - at^2 \quad \therefore 2t^3 + at^2 + 8 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$

$g(t) = 2t^3 + at^2 + 8$  とおく。  $g'(t) = 6t^2 + 2at = 2t(3t + a)$

$g(t) = 0$  が 2 つの実数解をもつ条件は

$$-\frac{a}{3} \neq 0, g\left(-\frac{a}{3}\right)g(0) = 0 \quad \therefore \frac{a^3}{27} + 8 = 0 \quad \therefore a = -6 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3)  $a^2 - 3b = 9$ ,  $a = -6$  より  $b = 9$

また、 $\textcircled{1}$ の解は  $t^3 - 3t^2 + 4 = 0 \quad \therefore (t+1)(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = -1, 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$  であるから  $f'(-1) = 24$ ,  $f'(2) = -3 \quad \dots\dots(\text{答})$

【6】(東北大 88)

(1)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  とおく。

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

の解が 1 と -3 であるから、解と係数の関係より

$$1 + (-3) = -\frac{2b}{3a}, \quad 1 \cdot (-3) = \frac{c}{3a} \quad \therefore b = 3a, \quad c = -9a$$

$$\therefore f(x) = a(x^3 + 3x^2 - 9x) + d$$

$$f(1) = 0, \quad f(-3) = 32 \quad \text{より} \quad -5a + d = 0, \quad 27a + d = 32$$

$$\therefore d = 5a, \quad 32a = 32 \quad \text{より} \quad \therefore a = 1, \quad d = 5$$

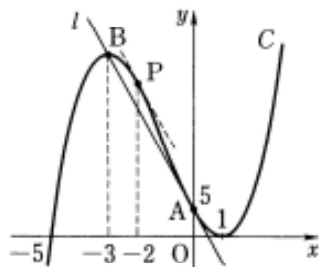
(答)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

(2)  $f'(0) = -9$  であるから  $l$  は  $y = -9x + 5$

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 - (-9x + 5) = x^2(x + 3) = 0$$

から、Bのx座標は-3

ABの間で  $l$  に平行な接線をひく。その接点が求める最大値を与える。



$$f'(x) = -9 \quad \text{を解く。} \quad 3x^2 + 6x - 9 = -9 \quad \therefore x = 0, \quad -2$$

$$\text{よって } P(-2, f(-2)) = (-2, 27) \text{ として、} P \text{ と } 9x + y - 5 = 0$$

の距離は  $\frac{|9 \cdot (-2) + 27 - 5|}{\sqrt{9^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{82}} = \frac{2\sqrt{82}}{41}$  .....(答)

【別解】(1)  $f'(x) = 3A(x-1)(x+3) = A(3x^2 + 6x - 9)$  とかけて、積分すると

$$f(x) = A(x^3 + 3x^2 - 9x) + B \quad (A, B \text{ は定数})$$

あとは  $f(1) = 0, f(-3) = 32$  から  $A, B$  を求める。



【7】

$$\int_1^x x f(t) dt = \int_x^{-1} f(t) dt + x^2 + 3$$

$$x \int_1^x f(t) dt = \int_x^{-1} f(t) dt + x^2 + 3$$

両辺を  $x$  で微分すると

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) = -f(x) + 4x^3$$

$$\triangleright F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

のとき

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(a) = 0$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt + (x+1)f(x) = 4x^3$$

$\triangleright$  積の微分

$$\{f(x)g(x)\}'$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{ここでは } f(x) = x$$

$$g(x) = \int_1^x f(t) dt \text{ とした。}$$

さらに両辺を  $x$  で微分すると

$$f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = 12x^2$$

$$2f(x) + (x+1)f'(x) - 12x^2 = 0$$

$f(x)$  が  $n$  次式で  $n$  次係数が  $a$  であるとすると  $(a \neq 0)$

$n \geq 3$  のとき

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

とすると

$$2(ax^n + bx^{n-1}) + (x+1)\{na x^{n-1} + (n-1)b x^{n-2} + \dots\} = 12x^2$$

$$\text{係数を見れば } (2a + na)x^n + \{2b + (n-1)a\}x^{n-1} + \dots = 12x^2$$

係数を見ると  $x^n$  のとき

$$2a + na = (n+2)a \neq 0$$

これは矛盾 ( $n \leq 1$  のときも矛盾)

$n \leq 2$  のとき

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

$f(x)$ ,  $f'(x)$  を代入する

$$2f(x) + (x+1)f'(x) - 12x^2 = 0$$

$$2(ax^2 + bx + c) + (x+1)(2ax + b) - 12x^2 = 0$$

$$2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax^2 + (2a+b)x + b - 12x^2 = 0$$

$$(4a-12)x^2 + (2a+3b)x + (b+2c) = 0$$

よ、 $\therefore$

$$\begin{cases} 4a-12=0 & \text{--- ①} \\ 2a+3b=0 & \text{--- ②} \\ b+2c=0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\text{①より } 4a-12=0 \quad \text{②に代入して } 6+3b=0$$

$$\therefore a=3$$

$$\therefore b=-2$$

$$\text{③に代入して } -2+2c=0$$

$$\therefore c=1$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

④に

$$\int_1^x x(3t^2 - 2t + 1) dt = x[t^3 - t^2 + t]_1^x$$

$$= x(x^3 - x^2 + x) - x(1 - 1 + 1)$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x$$

$$\int_x^{-1} (3t^2 - 2x + 1) dt + x^4 + 3$$

$$= [t^3 - 2xt + t]_x^{-1} + x^4 + 3$$

$$= (-1 - 1 + 1) - (x^3 - 2x^2 + x) + x^4 + 3$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x$$

これは条件を満たす

$$\underline{f(x) = 3x^2 - 2x - 1} \quad (\text{答})$$

【8】(九州大一文)

曲線の囲む面積の最小

$P(t, t^2)$ とおき、直線  $OP$  の式を求め、積分の式で面積を表します。これをそのまま微分するか、積分してから微分するかです。

解答

$P(t, t^2)$ とすると、直線  $OP: y=tx$  と表せる。

そこで、斜線部の面積を  $S(t)$  とすれば

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (tx - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - tx) dx && \dots\dots\star \\ &= \left[ \frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^t + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{tx^2}{2} \right]_t^1 \\ &= \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} + \left( \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right) - \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2} \right) = \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3} && \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

$t$  の変域は  $0 \leq t \leq 1$  …… $\textcircled{2}$  で、 $\textcircled{2}$  における  $\textcircled{1}$  の増減を調べる。

$$S'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left( t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

より、右の増減表が得られる。

これから、 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、 $S(t)$  は最小であるとわかる。

よって、求める  $P$  の座標は  $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$  ……(答)

$t$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$S'(t)$		- 0 +	
$S(t)$		↘ 最小 ↗	

Comment

$\star$  の式から、 $\frac{dS(t)}{dt}$  を求めることもできます。しかし

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t tx \, dx \right\} &= \frac{d}{dt} \left\{ t \int_0^t x \, dx \right\} \\ &= 1 \cdot \int_0^t x \, dx + t \cdot t = \frac{3}{2} t^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_t^1 x^2 \, dx \right\} = -t^2$$

など少々面倒で、誤りやすいところがあります。

【9】

H: 垂心とすると

$$\vec{HM}_1 = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\vec{HG}_1 = \frac{2}{3} \vec{HM}_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

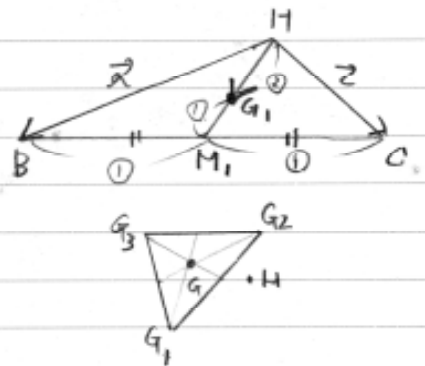
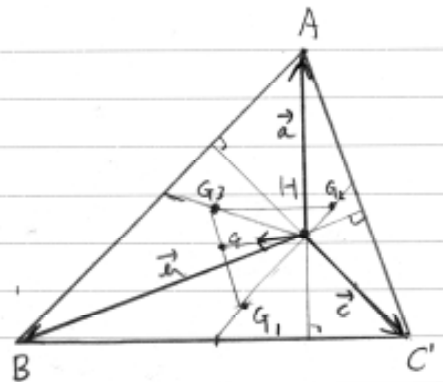
以下同様にして

$$\vec{HG}_2 = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{HG}_3 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{HG} &= \frac{1}{3} (\vec{HG}_1 + \vec{HG}_2 + \vec{HG}_3) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} + \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{HG} = \frac{2}{9} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \left( \frac{2}{3} \right)$$

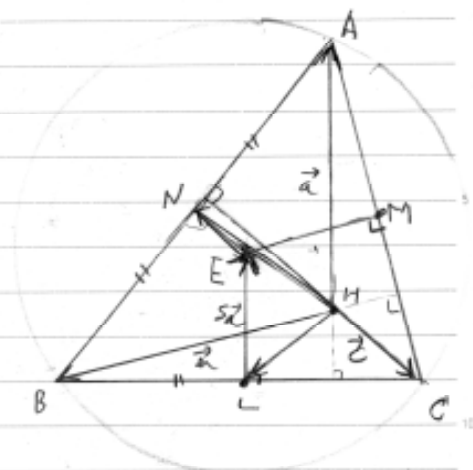


$\triangle ABC$ の外心 $E$ は外接円  
 の中心であり,  $BC, CA, AB$ の  
 中点 $L, M, N$ での3本の垂線  
 の交点である。

$$\vec{HE} = \vec{HL} + \vec{LE}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{HL} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \\ \vec{LE} = s\vec{a} \quad (\because HA \parallel LE) \end{array} \right.$$

$$\therefore \vec{HE} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} + s\vec{a} \quad \text{--- (1)}$$



また,

$$\vec{HE} = \vec{HN} + \vec{NE}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{HN} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ \vec{NE} = t\vec{c} \quad (\because HC \parallel NE) \end{array} \right.$$

$$\therefore \vec{HE} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + t\vec{c} \quad \text{--- (2)}$$

① = ② より

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} + s\vec{a} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + t\vec{c}$$

$$(s - \frac{1}{2})\vec{a} = (t - \frac{1}{2})\vec{c}$$

$\vec{a} \times \vec{c}$  より  $\vec{a} \neq k\vec{c}, \vec{a} = \vec{0}, \vec{c} = \vec{0}$  より

$$s - \frac{1}{2} = 0, t - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore s = t = \frac{1}{2}$$

よって,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  のどの2つも方向が異なるから

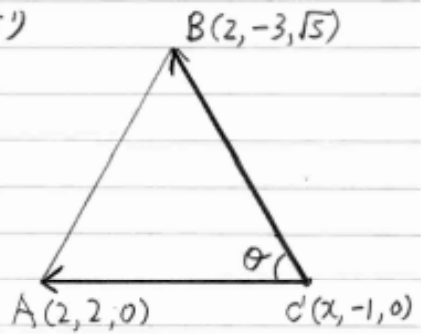
$$\vec{HE} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} \quad \text{(答)}$$

【10】

$$(1) \vec{CA} = (2-x, 3, 0), \vec{CB} = (2-x, -2, \sqrt{5}) \text{ である}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} \\ &= \frac{(2-x)^2 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{(2-x)^2 + 3^2 + 0^2} \sqrt{(2-x)^2 + (-2)^2 + (\sqrt{5})^2}} \\ &= \frac{(2-x)^2 - 6}{\sqrt{(2-x)^2 + 9} \sqrt{(2-x)^2 + 9}} \\ &= \frac{(2-x)^2 - 6}{(2-x)^2 + 9} \\ &= \frac{4 - 4x + x^2 - 6}{4 - 4x + x^2 + 9} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x + 13} \quad (\text{答})$$



$$(2) (1) \text{ より } \cos 2\theta = 1 - \frac{15}{x^2 - 4x + 13} = 1 - \frac{15}{(x-2)^2 + 9}$$

$$(x-2)^2 + 9 \geq 9 \text{ より}$$

$$0 < \frac{15}{(x-2)^2 + 9} \leq \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore 1 - \frac{5}{3} \leq \cos 2\theta < 1$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq \cos 2\theta < 1 \quad (\text{答})$$

(3)  $\triangle ABC$  が正三角形とは、 $|\vec{CA}| = |\vec{CB}|$  か  $\theta = \frac{\pi}{3}$

つまり  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  とする  $x$  を求めればよい。

$$\cos \theta = \frac{x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x + 13} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{15}{x^2 - 4x + 13} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{15}{(x-2)^2 + 9} = -\frac{1}{2}$$

$$(x-2)^2 + 9 = 30$$

$$(x-2)^2 = 21$$

$$\therefore x-2 = \pm\sqrt{21}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{21}$$

よって、 $C$  の座標は  $(2 \pm \sqrt{21}, -1, 0)$  となる。  
(答)





$$(2) A(2t+3, -2t-1, t+2), \\ B(s, 2s, -s+4)$$

よまけるから

$$\vec{BA} = (2t-s+3, -2t-2s-1, t+s-2)$$

$\vec{BA}$  は  $\vec{e}_1$  に垂直だから  $\vec{BA} \cdot \vec{e}_1 = 0$  より

$$2(2t-s+3) - 2(-2t-2s-1) + 1(t+s-2) = 0$$

$$4t - 2s + 6 + 4t + 4s + 2 + t + s - 2 = 0$$

$$9t + 3s + 6 = 0$$

$$3t + s + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

また,  $\vec{BA}$  は  $\vec{e}_2$  に垂直だから  $\vec{BA} \cdot \vec{e}_2 = 0$  より

$$1 \cdot (2t-s+3) + 2(-2t-2s-1) - 1(t+s-2) = 0$$

$$2t - s + 3 - 4t - 4s - 2 - t - s + 2 = 0$$

$$-3t - 6s + 3 = 0$$

$$t + 2s - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} 3t + s = -2 & \dots \textcircled{1} \\ t + 2s = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3 \quad 3t + s = -2$$

$$\quad \quad \quad -) \quad 3t + 6s = 3$$

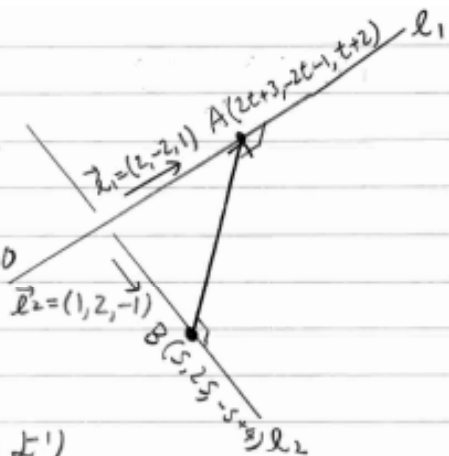
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad -5s = -5$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \therefore -s = 1$$

$$\text{よって } A(2 \cdot (-1) + 3, -2(-1) - 1, -1 + 2) = (1, 1, 1)$$

$$B(1, 2 \cdot 1, -1 + 4) = (1, 2, 3)$$

$$\text{(答)} \underline{A(1, 1, 1), B(1, 2, 3)}$$



(2) 別解  $\vec{a}_1$  と  $\vec{a}_2$  にそれぞれに垂直なベクトルは

$$\vec{n} = (0, 1, 2) \quad \text{より}$$

$$\vec{BA} = (2t - s + 3, -2t - 2s - 1, t + s - 2)$$

$$= k\vec{n} = (0, k, 2k)$$

$$\begin{cases} 2t - s + 3 = 0 & \text{--- (3)} \\ -2t - 2s - 1 = k & \text{--- (4)} \\ t + s - 2 = 2k & \text{--- (5)} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \times 2 \quad -2t - 2s - 1 = k$$

$$+ ) \quad 2t + 2s - 4 = 4k$$

$$-5 = 5k$$

$$\therefore k = -1$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より} \quad 2t - s + 3 = 0$$

$$+ ) \quad -2t - 2s - 1 = -1$$

$$-3s + 2 = -1$$

$$\therefore s = 1$$

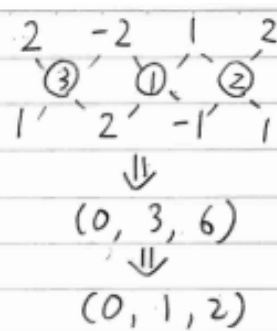
③に代入して

$$2t - 1 + 3 = 0$$

$$2t + 2 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

よって  $A(1, 1, 1), B(1, 2, 3)$  (答)



【12】(早稲田大-理工 85)

**考え方**  $S$ の半径は3で、 $S$ の中心と $\pi$ との距離は7であるから、 $\pi$ と $S$ は交わらない。中心から平面に垂線をおろし、垂線の足も求めることにする。

垂線の式は、(3)のBの座標を求めるのにも役立つ。

$$\pi: 2x-3y+6z=2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$S: x^2+y^2+z^2-6x+2y-14z+50=0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

(1) ②は  $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=3^2$

$S$ の点は点  $C(3, -1, 7)$  から一定な距離3にあるから、 $S$ は中心  $(3, -1, 7)$ 、半径3の球面  $\dots\dots\textcircled{\text{答}}$

(2), (3)  $S$ の中心Cから平面 $\pi$ に垂線をおろし、その足をHとする。

①の法線ベクトルは  $(2, -3, 6)$  であるから、垂線上の点  $P(x, y, z)$  について  $\overrightarrow{CP}=t(2, -3, 6)$  とすると、 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$  により

$$(x, y, z)=(3, -1, 7)+t(2, -3, 6) \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

$P=H$  のとき、③と  $(2, -3, 6)$  との内積は①により

$$2=2x-3y+6z=(6+3+42)+t(4+9+36)$$

$$\therefore 49t=-49 \quad \therefore t=-1$$

$$\overrightarrow{CH}=-\overrightarrow{HC}=(2, -3, 6) \quad \therefore CH=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$\overrightarrow{OH}=(3, -1, 7)-(2, -3, 6)=(1, 2, 1)$$

$CH > 3$  であるから、 $\pi$ と $S$ は交わらない。

$\pi$ の点Aと $S$ の点Bに対して

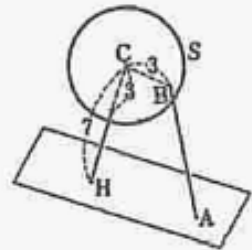
$$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA} \geq \overrightarrow{CH}=7$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \geq 7-3=4$$

$\overrightarrow{AB}$  が最小4となるのは、CBA がCHに重なるときで、

Aは  $H(1, 2, 1)$  と一致し、Bは③で  $t=-\frac{3}{7}$  として得られる。

$$\textcircled{\text{答}} \quad (2) \quad d=4 \quad (3) \quad A(1, 2, 1), \quad B\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}, \frac{31}{7}\right)$$



【13】(東京医大 86)

$$A = \begin{pmatrix} a & -h \\ h & a \end{pmatrix} \text{ とし } \angle \text{ と}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -h \\ h & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -h \\ h & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - h^2 & -2ah \\ 2ah & a^2 - h^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 - h^2 & -2ah \\ 2ah & a^2 - h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -h \\ h & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 - 3ah^2 & -3a^2h + h^3 \\ 3a^2h - h^3 & a^3 - 3ah^2 \end{pmatrix}$$

$A^3 + pA + qE = 0$  より, この式に  $\lambda$  を代入して

$$\begin{pmatrix} a^3 - 3ah^2 & -3a^2h + h^3 \\ 3a^2h - h^3 & a^3 - 3ah^2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} a & -h \\ h & a \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a^3 - 3ah^2 + pa + q & -3a^2h + h^3 - ph \\ 3a^2h - h^3 + ph & a^3 - 3ah^2 + pa + q \end{pmatrix} = 0$$

よって

$$\begin{cases} a^3 - 3ah^2 + pa + q = 0 & \dots \text{①} \\ 3a^2h - h^3 + ph = 0 & \dots \text{②} \end{cases}$$

②より  $h(3a^2 - h^2 + p) = 0$

$h \neq 0$  より  $h^2 = 3a^2 + p \dots \text{③}$

③を①に代入して  $a^3 - 3a(3a^2 + p) + pa + q = 0$

$$a^3 - 9a^3 - 3pa + pa + q = 0$$

$$\therefore 8a^3 + 2pa - q = 0$$

したがって,  $a$  は

$$8x^3 + 2px - q = 0$$

の解となる

(証明終り)

(別解)  $A = \begin{pmatrix} a & -l \\ l & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma \neq \lambda \gamma$$

$$D J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = aE + lJ$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

このとき,  $A^3 + pA + qE = 0$  は

$$(aE + lJ)^3 + p(aE + lJ) + qE = 0$$

$$(a^3E + 3a^2lJ + 3al^2J^2 + l^3J^3) + p(aE + lJ) + qE = 0$$

$J^2 = -E$  だから

$$(a^3E + 3a^2lJ - 3al^2E - l^3J) + (apE + lpJ) + qE = 0$$

$$(a^3 - 3al^2 + ap + q)E + (3a^2l - l^3 + lp)J = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a^3 - 3al^2 + ap + q = 0 & \dots \textcircled{1} \\ l(3a^2 - l^2 + p) = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より  $l \neq 0$  ならば

$$3a^2 - l^2 + p = 0$$

$$l^2 = 3a^2 + p \quad \dots \textcircled{3}$$

③と①に代入して

$$a^3 - 3a(3a^2 + p) + ap + q = 0$$

$$a^3 - 9a^3 - 3ap + ap + q = 0$$

$$-8a^3 - 2ap + q = 0$$

$$\therefore 8a^3 + 2pa - q = 0$$

よって,  $a$  は 方程式  $8a^3 + 2pa - q = 0$  の解である

(証明終わり)

【14】(東京商船大 82、類 宮崎大 87)

(1) [行列の集合  $P \in M, Q \in M$  に対し,  $PQ \in M, P^{-1} \in M$ ]  
を考察しようとする。

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ \frac{1}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & -2 \sin \beta \\ \frac{1}{2} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ \frac{1}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -2 \sin \beta \\ \frac{1}{2} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -2 \sin \beta \cos \alpha - 2 \cos \beta \sin \alpha \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -2 \sin(\alpha + \beta) \\ \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore PQ \in M$  とする。

$$P^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 2 \sin \alpha \\ -\frac{1}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -2 \sin(-\alpha) \\ \frac{1}{2} \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$\therefore P^{-1} \in M$  とする。

(証明系終り)

[  $P = g(\alpha), Q = g(\beta)$  とする,  $PQ = g(\alpha + \beta), P^{-1} = g(-\alpha)$  ]

(2) (1)を繰り返して用いて

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} \cos(d+d) & -2\sin(d+d) \\ \frac{1}{2}\sin(d+d) & \cos(d+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2d & -2\sin 2d \\ \frac{1}{2}\sin 2d & \cos 2d \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} \cos(2d+d) & -2\sin(2d+d) \\ \frac{1}{2}\sin(2d+d) & \cos(2d+d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3d & -2\sin 3d \\ \frac{1}{2}\sin 3d & \cos 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって  $\cos 3d = 1$ ,  $\sin 3d = 0 \therefore 3d = 2n\pi$  ( $n$ は整数)  
 $n = 0, 1, 2$  とし  $\therefore d = \frac{2}{3}n\pi$

$$P = \begin{pmatrix} \cos 0 & -2\sin 0 \\ \frac{1}{2}\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -2\sin \frac{2}{3}\pi \\ \frac{1}{2}\sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -2\sin \frac{4}{3}\pi \\ \frac{1}{2}\sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって  $M$  の要素は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

よって

【15】(山形大-理系 85)

《ポイント》 (3)  $a+d \neq 0$  と  $a+d=0$  に場合分けする.

【解】 (1)  $ad=bc$  のとき

$$\begin{aligned} X^2 - (a+d)X &= X(X - (a+d)E) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \quad \dots\dots \textcircled{1} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) ①から

$$\begin{aligned} X^{n-1}(X^2 - (a+d)X) &= X^{n-1}\mathbf{O} \\ \therefore X^{n+1} - (a+d)X^n &= \mathbf{O} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) ①から

$$\begin{aligned} X^2 &= (a+d)X \quad \dots\dots \textcircled{1}' \\ \therefore X^{10} &= (a+d)^9 X \end{aligned}$$

したがって,  $X^{10}=\mathbf{O}$  のとき,  $(a+d)^9 X=\mathbf{O}$

$a+d \neq 0$  ならば  $X=\mathbf{O}$   $\therefore X^2=\mathbf{O}$

$a+d=0$  ならば, ①'から  $X^2=\mathbf{O}$

よって,  $X$ が  $X^{10}=\mathbf{O}$  を満たすとき,  $X^2=\mathbf{O}$   $\dots\dots (\text{答})$



【16】(九工大)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} x+6=yx \\ 2x-3=y \end{cases}$$

$$\text{これを整理して } \begin{cases} (1-y)x+6=0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x-(y+3)=0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②を①に代入して

$$(1-y)(y+3)+12=0$$

$$\text{整理して } (y-3)(y+5)=0$$

$$\therefore y=3 \text{ または } -5$$

(i)  $y=3$  のとき

$$\textcircled{1} \text{ より } -2x+6=0$$

$$\therefore x=3 \rightarrow (x, y)=(3, 3) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(ii)  $y=-5$  のとき

$$\textcircled{1} \text{ より } 6x+6=0$$

$$\therefore x=-1 \rightarrow (x, y)=(-1, -5) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } (x, y)=(3, 3), (-1, -5) \cdots \cdots (\text{答})$$

(\*) むろん、固有値として  $y$  を、それから固有ベクトルを出して  $x$  を求める方法もある。

$$(2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v} \text{ とおくと, } A\vec{u} = 3\vec{u}, A\vec{v} = -5\vec{v} \text{ なので}$$

$$A^2\vec{u} = A(A\vec{u}) = A(3\vec{u}) = 3^2\vec{u}$$

$$A^3\vec{u} = A(A^2\vec{u}) = A(3^2\vec{u}) = 3^3\vec{u}$$

.....

この操作を続けると  $A^n\vec{u} = 3^n\vec{u}$ , 同様にして  $A^n\vec{v} = (-5)^n\vec{v}$  が得られる。

これを具体的に表わすと

$$A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに, 合わせて行列表示すると

$$A^n \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n(3) & (-5)^n(-1) \\ 3^n(1) & (-5)^n(1) \end{pmatrix}$$

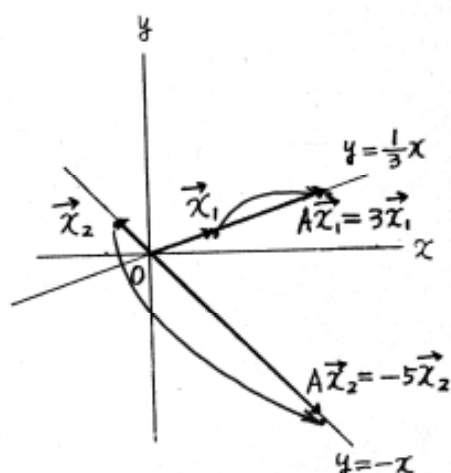
$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -(-5)^n \\ 3^n & (-5)^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -(-5)^n \\ 3^n & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & -(-5)^n \\ 3^n & (-5)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-5)^n & 3^{n+1} - 3(-5)^n \\ 3^n - (-5)^n & 3^n + 3(-5)^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \{3^{n+1} + (-5)^n\} \\ b_n &= \frac{1}{4} \{3^{n+1} - 3(-5)^n\} \\ c_n &= \frac{1}{4} \{3^n - (-5)^n\} \\ d_n &= \frac{1}{4} \{3^n + 3(-5)^n\} \end{aligned} \right\} \text{(答)}$$



【17】

(1) 1次変換を表す行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

とする、 $x - 2y = 1$  と

$2x + 3y = 1$  の交点  $\alpha$  は

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \dots \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より  $x = 2y + 1$

②に代入して

$$2(2y + 1) + 3y = 1$$

$$7y + 2 = 1$$

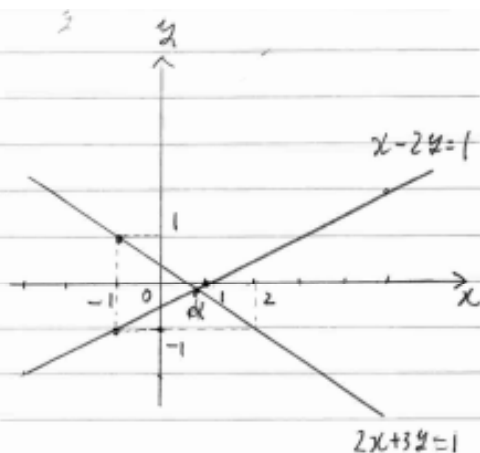
$$\therefore y = -\frac{1}{7}$$

①に代入して  $x = 2\left(-\frac{1}{7}\right) + 1 = \frac{-2 + 7}{7} = \frac{5}{7}$

交点  $\alpha(x, y) = \left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}\right)$  はそれぞれに与えられた交点と一致する。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}a - \frac{1}{7}b \\ \frac{5}{7}c - \frac{1}{7}d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{7}a - \frac{1}{7}b = \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7}c - \frac{1}{7}d = -\frac{1}{7} \end{cases} \therefore \begin{cases} 5a - b = 5 \dots \textcircled{3} \\ 5c - d = -1 \dots \textcircled{4} \end{cases}$$



また  $(1, 0)$  は  $x - 2y = 1$  上にある  $2x + 3y = 1$  に近づける

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

よ)  $2a + 3c = 1 \dots \textcircled{5}$

$(\frac{1}{2}, 0)$  は  $2x + 3y = 1$  上にある  $x - 2y = 1$  に近づける

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

よ)  $\frac{1}{2}a - c = 1, a - 2c = 2 \dots \textcircled{6}$

③, ④, ⑤, ⑥ を解いて

$$\begin{cases} 5a - b = 5 \dots \textcircled{3} \\ 5c - d = -1 \dots \textcircled{4} \\ 2a + 3c = 1 \dots \textcircled{5} \\ a - 2c = 2 \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

⑤ - ⑥  $\times 2$  より  $2a + 3c = 1$

$$\rightarrow 2a - 4c = 4$$

$$7c = -3$$

$$\therefore c = -\frac{3}{7}$$

⑥ に代入

$$a + \frac{6}{7} = 2, a = \frac{-6 + 14}{7}$$

$$\therefore a = \frac{8}{7}$$

③ に代入

$$\frac{40}{7} - b = 5, b = \frac{40 - 35}{7} \therefore b = \frac{5}{7}$$

④ に代入

$$-\frac{15}{7} - d = -1, d = \frac{-15 + 7}{7} \therefore d = -\frac{8}{7}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

(答)

$$(2) \quad A^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{15}{7^2}} \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{-64+15}{49}} \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

$$= -1 \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix} = A \quad (\text{答})$$

$$A^{-1} = A \quad (\text{答})$$

$$A^2 = A A = A A^{-1} = E$$

$$A^3 = A^2 A = E A = A$$

したがって

$$A^{2k} = E, \quad A^{2k+1} = A \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore A^n = \begin{cases} E & (n \text{ が偶数}) \\ A & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

(答)

【18】

(1)  $P(x, y), Q(x', y')$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

かつ  $Q(ax+by, cx+dy)$

$$OP = OQ \text{ かつ } OP^2 = OQ^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (ax+by)^2 + (cx+dy)^2$$

$$x^2 + y^2 = (a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)xy + (b^2+d^2)y^2$$

(これが任意の  $x, y$  について成り立つ)

かつ

$$a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0$$

よって

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる。

(証明終わり)

(1) 別解  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

2点間の距離は変えないから

$$a^2+c^2=1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b^2+d^2=1 \quad \dots \textcircled{2}$$

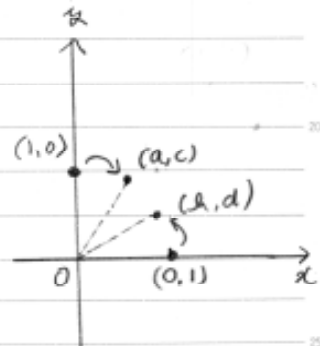
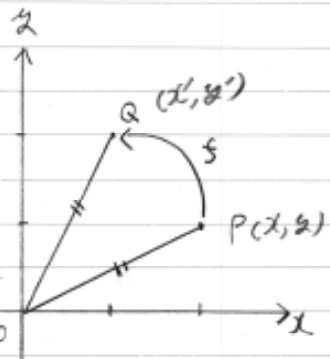
$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

③より ①, ② に代入して

$$a^2+c^2+b^2+d^2-2(ab+cd)=2$$

$$\therefore ab+cd=0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$



(注) 1.  $a^2+c^2=1$ ,  $b^2+d^2=1$ ,  $ac+bd=0$  は

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表せる, 「 $ad-bc=\pm 1$ 」が成り立つ。

また, この行列は「列ベクトルが互いに直交する単位ベクトル」となっているのだから, このような行列は「直交行列」といい, 直交行列で表せる1次元変換を「直交変換」という。

2. 直交変換では, 2つのベクトルの「内積が不変」であることも示せる。したがって, また, 直交変換では「大きさも角も不変」である。

3.  $a^2+c^2=1$  から  $a=\cos\theta$ ,  $c=\sin\theta$  とおける。

このとき  $ab+cd=0$  から  $b\cos\theta+d\sin\theta=0$

これより  $b^2+d^2=1$  から  $b=\pm\sin\theta$ ,  $d=\mp\cos\theta$  (符号相反) となる。

すなわち, 行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

または  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

とかくことが出来る。

(2) 原点についての対称移動変換:  $A$  は

$$\begin{cases} x' = -x = (-1)x + 0 \cdot y \\ y' = -y = 0 \cdot x + (-1)y \end{cases}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これが合成変換変換子だから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & \dots \text{⑤} \\ ab + bd = 0 & \dots \text{⑥} \\ ac + cd = 0 & \dots \text{⑦} \\ bc + d^2 = -1 & \dots \text{⑧} \end{cases}$$

⑥より  $b(a+d) = 0$

$a+d \neq 0$  ならば  $b = 0$

⑤に代入すると  $a^2 = -1$ , これは矛盾

$a+d = 0$  より  $\therefore d = -a \dots \text{⑨}$

⑦と⑨に代入  $ac + cd = 0$

$$ac - ac = 0$$

$$a(b-c) = 0$$

$b-c = 0$  ならば  $b = c$ , ⑤より  $a^2 + c^2 = -1$ , これは矛盾

$b-c \neq 0$  ならば  $a = 0$  ⑨より  $d = 0$

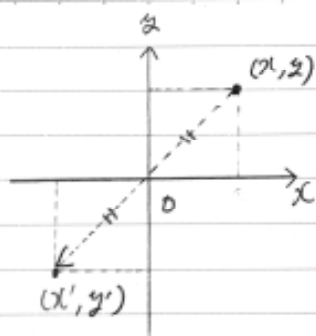
①より  $0^2 + c^2 = 1$  ②より  $b^2 + 0^2 = 1 \therefore c^2 = b^2 = 1$

$\therefore c = \pm 1, b = \mp 1$  ( $\because b = -c$  より)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{符号同順})$$

これは条件を満たす。

(答)





【19】(京都教育大、類：お茶の水女子大 88、類：名古屋大 77)

(1) 3頂点を  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$   
 $C(c_1, c_2), \vec{AB} = (p_1, p_2), \vec{AC} = (q_1, q_2)$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= b_1 - a_1 \\ p_2 &= b_2 - a_2 \\ q_1 &= c_1 - a_1 \\ q_2 &= c_2 - a_2 \end{aligned} \right\}$$

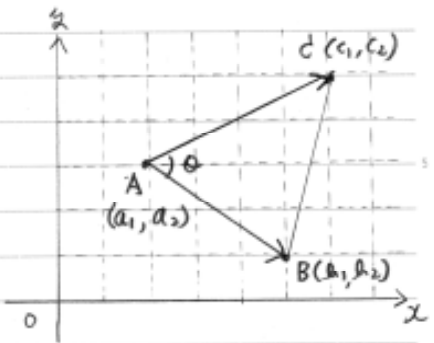
よって、 $p_1, p_2, q_1, q_2$  はすべて整数となる。

$\triangle ABC$  の面積は

$$\triangle ABC \text{ の面積} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |p_1 q_2 - p_2 q_1|$$

となり、これは整数である。よって、 $\triangle ABC$  の面積は有理数である。

(証明終わり)



(2) 1辺の長さが  $p$  の正三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} p = \frac{\sqrt{3}}{4} p^2$$

$\triangle ABC$  が正三角形に仮定とする。

$$\vec{AB} = (p_1, p_2)$$

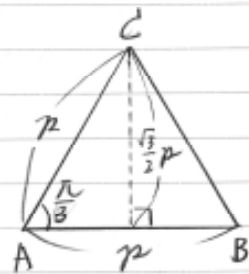
$$|\vec{AB}|^2 = p_1^2 + p_2^2$$

したがって、 $\triangle ABC$  の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (p_1^2 + p_2^2)$$

これは無理数で、(1)に反する。したがって  $\triangle ABC$  は正三角形にたなり得ない。

(証明終わり)



【20】(東京理科大一理)

(1) 円周  $x^2 + y^2 = 1$  上の3点

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の像は、それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

よって、求める円の半径を  $r$  とすれば

$$r^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

$$2^2 + a^2 = 5 \quad \dots \text{①}$$

$$\frac{3^2 + (a-2)^2}{2} = 5 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①より } a^2 + 4 = 5$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = \pm 1$$

$$\text{②より } 3^2 + (a-2)^2 = 10$$

$$9 + a^2 - 4a + 4 = 10$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

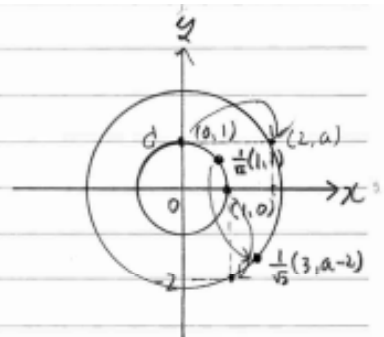
$$(a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1, 3$$

よって ①, ② 共通の値は  $a = 1$  となる。

$$\therefore a = 1, \text{ 半径} = \sqrt{5}$$

(15分)



(2) 円周  $x^2+y^2=1$  上の点は  $(\cos\theta, \sin\theta)$  とかけて、円周

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

の像の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + 2\sin\theta \\ -2\cos\theta + a\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$$

これが線分を表すためには

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \quad \therefore a = -4$$

が必要であり、このとき、 $C$  の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos\theta + 2\sin\theta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

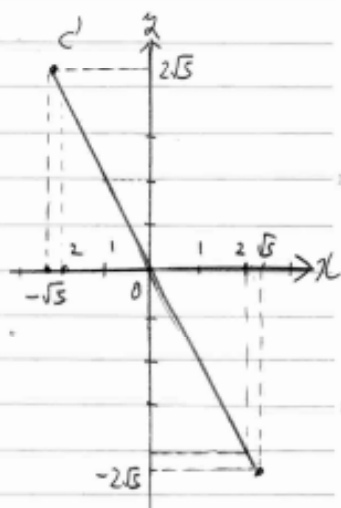
$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし, } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$-\sqrt{5} \leq \cos\theta + 2\sin\theta \leq \sqrt{5}$  に  
より、線分  $C$  の両端点の座標は

$$\pm\sqrt{5} (1, -2)$$

$$\therefore \underline{(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})} \quad (\text{答})$$



(注)  $\vec{u} = (1, 2)$ ,  $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )

のなす角を  $\alpha$  とすれば

$$\cos\theta + 2\sin\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos\alpha = \sqrt{5} \cos\alpha$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \cos\theta + 2\sin\theta \leq \sqrt{5}$$