

冬期直前講習 重要定理公式ゼミ

【1】(横浜市大一商 85)

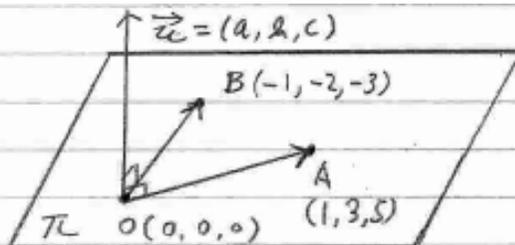
(1) π の法線ベクトル

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

とする。

$$\vec{u} \perp \vec{OA}, \vec{u} \perp \vec{OB} \text{ より}$$

$$\begin{cases} a + 3b + 5c = 0 \\ -a - 2b - 3c = 0 \end{cases}$$



\vec{OA}, \vec{OB} の両方に垂直なベクトルの1つとして

$$a : b : c = 1 : (-2) : 1$$

から、 $\vec{u} = (1, -2, 1)$ としてよい。

$$\therefore \pi : x - 2y + z = 0$$

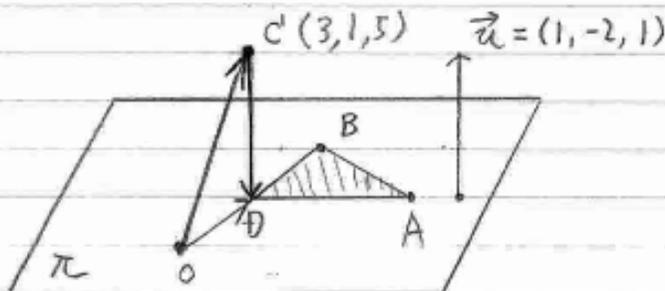
(答)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 1 \\ \oplus & \ominus & \oplus & \ominus \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{array}$$

↓

$$(1, -2, 1)$$

(2)



$\vec{CD} \parallel \vec{u}$ より

$$\vec{CD} = t\vec{u} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表す。

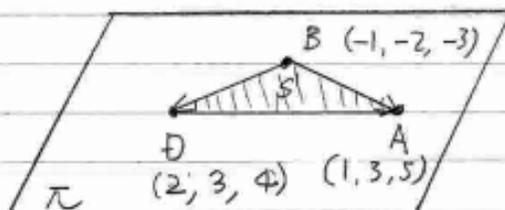
$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 1-2t \\ 5+t \end{pmatrix}$$

$$D \in \pi \text{ より } (3+t) - 2(1-2t) + (5+t) = 0 \therefore t = -1$$

$$\therefore \vec{OB} = (2, 3, 4)$$

(答)

(3)



(2) のよ $\vec{BA} = (2, 5, 8)$, $\vec{BD} = (3, 5, 7)$ より

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{BA}|^2 |\vec{BD}|^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BD})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{93 \times 83 - 87^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{7719 - 7569}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{150}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)$$

【1】別解1

考え方 (3) 三角形 ABD は π 上にあることがわかっているので、
 π と xy 平面のなす角が θ のとき、 π 上の図形を xy 平面へ射影すると
 (射影した図形の面積) = (もとの図形の面積) $\times \cos\theta$

ベクトル \vec{n} に平行な単位ベクトル $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ の z 成分は、 z 軸となす角の余弦

解答 (1) π の法線ベクトル (l, m, n) は、

$$\vec{OA} = (1, 3, 5), \quad \vec{OB} = (-1, -2, -3) \text{ に垂直であるから}$$

$$l + 3m + 5n = 0, \quad -l - 2m - 3n = 0$$

$$\therefore l = n, \quad m = -2n \quad \text{よって } (l, m, n) = (1, -2, 1) \text{ とする。}$$

$$\pi \text{ の方程式は } \quad x - 2y + z = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\vec{CD} = t(1, -2, 1)$ とすると

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = (3, 1, 5) + t(1, -2, 1)$$

\vec{OD} と $(1, -2, 1)$ との内積を 0 とおいて

$$(3 - 2 + 5) + t(1 + 4 + 1) = 0 \quad \therefore 6 + 6t = 0 \quad \therefore t = -1$$

$$\vec{OD} = (2, 3, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) A, B および D(2, 3, 4) の xy 平面への正射影は

$$A'(1, 3, 0), \quad B'(-1, -2, 0), \quad D'(2, 3, 0)$$

$A'D' = 1$, B' と直線 $A'D'$ との距離は $3 - (-2) = 5$

$$\triangle A'B'D' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

平面 π と xy 平面のなす角は、これらに垂直な z 軸とベクトル $(1, -2, 1)$ のなす角に等しく、その余弦は $\frac{1}{\sqrt{6}}$ である。よって

$$\triangle A'B'D' = \triangle ABD \times \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \therefore \triangle ABD = \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

【1】別解2

[解] $\vec{OA}=(1, 3, 5)$, $\vec{OB}=(-1, -2, -3)$

(1) \vec{OA} , \vec{OB} のいずれにも垂直なベクトルの1つは $(1, -2, 1)$

よって、平面 π は原点を通るから

$$\pi: \mathbf{x}-2\mathbf{y}+\mathbf{z}=0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 点 $C(3, 1, 5)$ を通り、 π に垂直な直線と π との交点が D だから

$$\vec{OD}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

とすると、点 $D(3+t, 1-2t, 5+t)$ は π 上にあるから

$$3+t-2(1-2t)+5+t=0 \Leftrightarrow t=-1$$

$$\therefore \vec{OD}=(2, 3, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) $\vec{AB}=(-2, -5, -8)$, $\vec{AD}=(1, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABD &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AD}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AD})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{93 \times 2 - 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

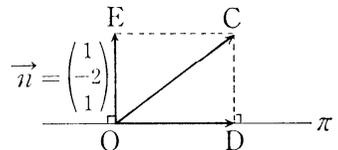
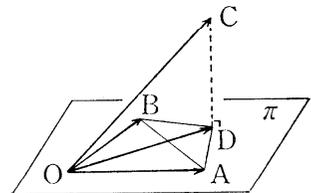
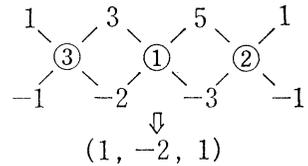
[研究] (2) ‘正射影の公式’を用いると、 \vec{OC} の \vec{n} 上への正射影 \vec{OE} は

$$\vec{OE} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{OC}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

ここで、 $\vec{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{OC}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ だから

$$|\vec{n}|^2=6, \vec{n} \cdot \vec{OC}=6$$

$$\therefore \vec{OE}=\vec{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{OD}=\vec{OC}-\vec{OE}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



【2】(北海道教育大 88)

【考え方】 α は l を含むので、 l と xy 平面との交点は m_1 の1点である。もう1点みつければ、 α の方程式を求める必要はない。

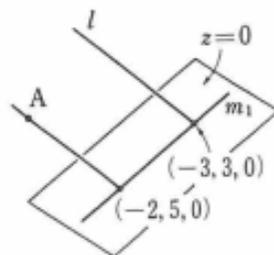
【解答】 (1) $l: x+2=2-y=z-1$ ……①

$A(1, 2, 3)$ を通り l に平行な直線は

$$x-1=2-y=z-3 \quad \dots\dots②$$

①, ②で $z=0$ (xy 平面) とおいて、 $(-3, 3, 0)$, $(-2, 5, 0)$, m_1 はこの2点を結ぶ直線であるから、

$$m_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{2}, z=0 \quad \dots\dots(\text{答})$$



①, ②で $x=0$ (yz 平面) とおいて、 $(0, 0, 3)$, $(0, 3, 2)$, m_2 はこの2点を結ぶ直線であるから

$$m_2: x=0, \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) m_1 の方向ベクトル $\vec{u}=(1, 2, 0)$, m_2 の方向ベクトル $\vec{v}=(0, 3, -1)$ から、 m_1, m_2 のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) について

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{6}{5\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \frac{6}{5\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \quad \therefore \cos \frac{\pi}{6} > \cos \theta > \cos \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ である。

【注】 l は2平面 $x+2=2-y$, $2-y=z-1$

すなわち $x+y=0$, $y+z-3=0$ の交線である。どちらも A を含まない。そこで、 l を含む平面

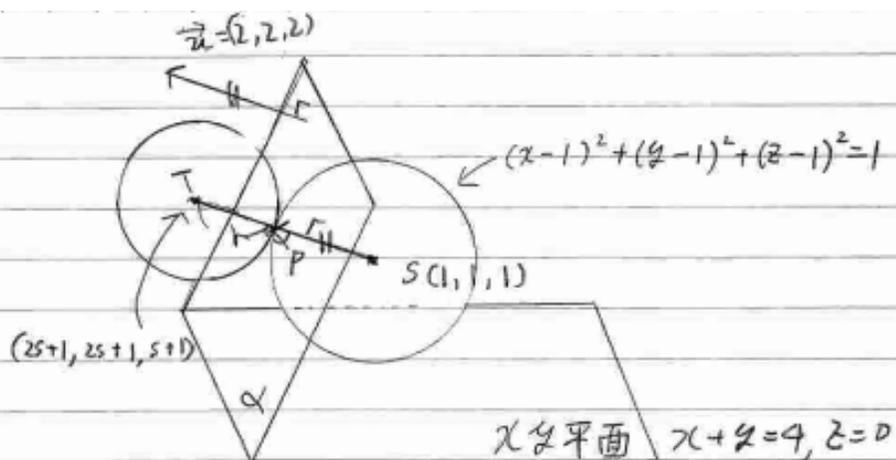
$$x+y+k(y+z-3)=0$$

が A を含むように、 $x=1, y=2, z=3$ を代入して $3+k \cdot 2=0$

$$k = -\frac{3}{2} \quad \alpha \text{ は } x+y-\frac{3}{2}(y+z-3)=0 \quad \therefore 2x-y-3z+9=0$$

上のよう書いた l を含む平面には $y+z-3=0$ だけは除外されることに注意。

【3】(横浜市大一商 90)



球の中心: $S(1, 1, 1)$

$x+y=4, z=0$ を含み, x, y 平面以外の平面は

$$x+y-4+tz=0$$

と表わす(平面束)。球に接するから

$$\frac{|1+1-4+t|}{\sqrt{1^2+1^2+t^2}}=1$$

$$\frac{t-2}{\sqrt{t^2+2}}=1$$

$$\therefore (t-2)^2 = t^2+2$$

$$t^2-4t+4 = t^2+2$$

$$-4t = -2$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

よ, t を求める平面 α の方程式は

$$x+y-4+\frac{1}{2}z=0$$

$$\therefore 2x+2y+z=8$$

(答)

また直線 PS の方程式は (平面的な法線ベクトルが PS の方向ベクトル)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} = s$$

$$\begin{cases} x=2s+1 \\ y=2s+1 \\ z=s+1 \end{cases}$$

これを $2x+2y+z=8$ に代入して

$$2(2s+1) + 2(2s+1) + (s+1) = 8$$

$$9s + 5 = 8$$

$$\therefore s = \frac{1}{3}$$

よって求める P の座標は

$$x = 2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \quad y = 2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore P \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

(答)

点 P での平面に接する球 T の中心は直線 PS 上にあるから、 $(2s+1, 2s+1, s+1)$ とおき半径を t とすると、 xz 平面, yz 平面に接するから

$$\frac{|2(2s+1) + 2(2s+1) + (s+1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = |t| = |x| = |2s+1|$$

$$\therefore \frac{|9s-3|}{3} = |2s+1|$$

$$\begin{cases} 3s-1 = 2s+1 & s=2 \\ 3s-1 = -2s-1 & s=0 \end{cases}$$

$$\therefore 3s-1 = \pm(2s+1)$$

$$\therefore s=0 \text{ または } s=2$$

$s=0$ のとき、 s の球と一致するから不適

$s=2$ のとき、中心 $(5, 5, 3)$, 半径 $t = 2 \times 2 + 1 = 5$ の球となる
(答) (答)

【4】(千葉大)

解法の分析 座標軸を設定して解くこともできますが、それでは発想が貧弱すぎるというものです。設問の諸条件は、ベクトルでの解答を指示しています。

空間図形ですから、1次独立なベクトルを3つ設定すれば、任意のベクトルが3つのベクトルの1次結合の形で表せます。だから、点Oから平面AMにおろした垂線の足をHとすると、 \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} を用いて、 \vec{OH} を表せます。あとは、 $|\vec{OH}|^2$ の計算をすすめればよいことになります。ポイントは、 \vec{OH} の表し方でしょう。

公式の確認 ① 3点A, B, Cを通る平面のベクトル方程式

(イ) $\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$

この式を変形して、次のように表すこともできます。

(ロ)
$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OC}$$

($s+t+u=1$)

② $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
 $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

解答 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと

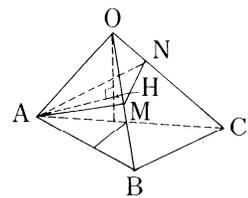
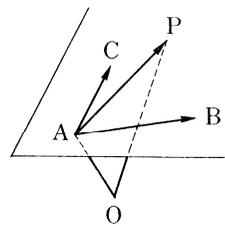
$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 & \dots\dots ① \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} & \dots\dots ② \end{cases}$$

Oから平面AMNにおろした垂線の足をHとすると

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OA} + x\vec{AM} + y\vec{AN} \\ &= \vec{a} + x\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) + y\left(\frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= (1-x-y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{3}y\vec{c} \end{aligned}$$

と表せる。よって、①, ②より

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{AM} &= \left\{ (1-x-y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{3}y\vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \right) \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y - \frac{3}{4} = 0 \\ \therefore 9x + 8y &= 9 & \dots\dots ③ \end{aligned}$$



◆ $|\vec{OH}| = d$
◆ 空間図形だから、 \vec{OH} を3つの、互いに、平行でない(0でない)ベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表示します。

◆ $\vec{OH} \perp \text{平面 AMN}$
 $\iff \begin{cases} \vec{OH} \perp \vec{AM} \\ \vec{OH} \perp \vec{AN} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\vec{OH} \cdot \vec{AN} &= \left\{ (1-x-y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{3}y\vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a} \right) \\ &= \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}y - \frac{5}{6} = 0 \\ &\therefore 12x + 14y = 15 \quad \dots\dots ④\end{aligned}$$

③, ④を連立させると $x = \frac{1}{5}, y = \frac{9}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore d^2 = |\vec{OH}|^2 &= \left| -\frac{1}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{10^2}(1+1+9-1+3-3) = \frac{1}{10} \\ \therefore d &= \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\diamond |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \\ = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を使って計算します。

ゼミナール $|\vec{OH}|$ の最小値を求めようと考えても、次のようにすれば求められます。

別解 $\vec{OH} = (1-x-y)\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} + \frac{y}{3}\vec{c}$ より, $|\vec{OH}|^2$ を計算し, その

右辺を平方完成すると

$$|\vec{OH}|^2 = \frac{3}{4} \left\{ \left(x + \frac{8}{9}y \right) - 1 \right\}^2 + \frac{5}{27} \left(y - \frac{9}{10} \right)^2 + \frac{1}{10}$$

これより, 求める d は $|\vec{OH}|$ の最小値であり, それは

$$x + \frac{8}{9}y - 1 = 0, \quad \text{かつ} \quad y - \frac{9}{10} = 0$$

のとき起こる。すなわち $x = \frac{1}{5}, y = \frac{9}{10}$

$|\vec{OH}|^2$ は x, y の 2 次式となるので平方完成ができます。

なお, 平面のベクトル方程式は, 形として 2 つありますが, パラメーターを 2 つ用いて表現された形の方は, 習熟していない諸君が多いようです。教科書でも, $\vec{p} \cdot \vec{h} = 0$ (\vec{h} : 法線ベクトル) だけが強調されています。これは, 受験の立場で考えるととても不思議なことです。

次のような感覚を, ぜひ身につけてほしいものです。

パラメーターが 1 つのベクトル方程式は, 直線を表す

パラメーターが 2 つのベクトル方程式は, 平面を表す

【5】(鹿児島大・理・工・医 88)

$$(1) kE - A = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-a & -b \\ -c & k-d \end{pmatrix}$$

ここで、逆行列をもつための必要十分条件は

$$\Delta(kE - A) = (k-a)(k-d) - bc = k^2 - (a+d)k + ad - bc \neq 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0 \text{ とする定数 } k \text{ は存在しないから}$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) < 0$$

$$\therefore (a+d)^2 < 4(ad - bc) \quad (\text{答})$$

$$(2) ad - bc = 1 \text{ より, } (a+d)^2 < 4 \quad \therefore -2 < a+d < 2$$

$a+d$ は整数より

$$a+d = \underline{-1, 0, 1} \quad (\text{答})$$

(i) $a+d = -1$ のとき, C.H. の定理より

$$A^2 + A + E = 0$$

$$A \neq E, A^2 = -A - E \neq E$$

$$A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E) = 0$$

$$\therefore A^3 = \underline{E} \quad (\text{答})$$

(ii) $a+d = 0$ のとき $A^2 + E = 0$

$$A \neq E, A^2 = -E$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = -A \neq E$$

$$A^4 - E = (A^2 - E)(A^2 + E) = 0$$

$$\therefore A^4 = \underline{E} \quad (\text{答}) \quad \times = \underline{4} \quad (\text{答})$$

$$(ii) a+d=1 \text{ のとき } A^2 - A + E = 0$$

$$A \neq E, A^2 = A - E \neq E$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(A - E) = A^2 - A \neq E$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A + E$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = -A^2 = -A + E \neq E$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = E$$

$$\left(\frac{6}{5}\right) \lambda = 6$$

【6】(神戸大一文系 88)

解法の分析 (1) $P^{-1}AP$ は、対角行列か三角行列になるのが相場ですが、

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ より, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるようです。}$$

(ゼミナール参照)

(2) A^k を求めて、 $a_k d_k - b_k c_k$ を k で表し、 Σ 計算をするのがふつうでしょう。

公式の確認 ① $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき、 $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

② $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

③ $\sum_{k=1}^n r^k = r \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$

解答 (1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$

$$\blacklozenge P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$$

$B = P^{-1}AP$ とおくと

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots\dots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(P^{-1}A)A(P^{-1}A)A\dots A(P^{-1}A)AP \\ &= P^{-1} \underbrace{AA \dots\dots AA}_{n \text{ 個}} AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

◆ $PP^{-1} = E$ の活用

よって $A^n = PB^nP^{-1}$
 $= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

◆ $B^n = P^{-1}A^nP$ より
 $PB^nP^{-1} = A^n$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 2^n & 3 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3 & -3 \cdot 2^n+3 \\ 2^{n+1}-2 & 3 \cdot 2^n-2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) $2^k = x$ とおくと

$$\begin{aligned}
 a_k d_k - b_k c_k &= (-2x+3)(3x-2) - (2x-2)(-3x+3) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k) &= \sum_{k=1}^n 2^k = 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \\
 &= 2^{n+1} - 2 \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

◆ A^n の成分には 2^n がたくさんあるから、 2^n を x とおきます。

ゼミナール 行列 A は、異なる 2 つの実数 k_1, k_2 と 2 つの 1 次独立なベクトル \vec{u}_1, \vec{u}_2 について、

$$A\vec{u}_1 = k_1\vec{u}_1, \quad A\vec{u}_2 = k_2\vec{u}_2$$

を満たしているものとする。

このとき、行列 P を、 $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ と定めるとき、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ が成り立つ。

【証明】 $A\vec{u}_1 = k_1\vec{u}_1, A\vec{u}_2 = k_2\vec{u}_2$ より

$$\begin{aligned}
 AP &= A(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (k_1\vec{u}_1, k_2\vec{u}_2) = (A\vec{u}_1, A\vec{u}_2) \\
 &= (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\vec{u}_1 \neq \vec{0}, \vec{u}_2 \neq \vec{0}, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ より、 P^{-1} が存在するので、左から P^{-1} を掛けて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

【注】 $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ とは、第 1 列、第 2 列の成分が、それぞれ、 \vec{u}_1, \vec{u}_2 であることを表す。

(例) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ として、 $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、} AP &= \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} = \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\
 &= (A\vec{u}_1, A\vec{u}_2)
 \end{aligned}$$

【7】(明治大一工 88)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と推定できる。

$n=1$ のとき、明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で成り立つ。よって数学的帰納法により

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

$$(2) \quad X = RX + B, \quad (E - R)X = B \quad (E \text{ は単位行列})$$

$$E - R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (E - R)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (E - R)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) (2)で求めた X を用いて

$$A_n = RA_{n-1} + B, \quad X = RX + B \quad \text{から} \quad A_n - X = R(A_{n-1} - X) \\ (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$$

$$\text{よって} \quad A_n - X = R^n(A_0 - X)$$

$$A_0 - X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = 2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

したがって

$$A_n = R^n(A_0 - X) + X \\ = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2^n - n \cdot 2^n & 2^{n+1} \\ -2^{n+1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (7-n)2^n - 2 & 2^{n+1} + 1 \\ -2^{n+1} + 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \dots\dots(\text{答})$$

【8】(早大-理工 85)

$$(1) S = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^2 \mathbf{J} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \mathbf{J}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \mathbf{J}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}^{-1} = (\mathbf{R}^2)^{-1} = \mathbf{R}^{-2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)の【別解】

(1)より $S = \mathbf{R}^2 \mathbf{J}$ そこで,

$$\mathbf{J}\mathbf{S} = \mathbf{J}(\mathbf{R}^2 \mathbf{J}) = (\mathbf{J}\mathbf{R}) (\mathbf{R}\mathbf{J})$$

ここで, (2)を用いて $\mathbf{J}\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}$

これを用いて

$$\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}) (\mathbf{R}\mathbf{J}) = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{J}\mathbf{R}) \mathbf{J} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}) \mathbf{J} \\ = (\mathbf{R}^{-1})^2 \mathbf{J}^2 = \mathbf{R}^{-2} \mathbf{I} = \mathbf{R}^{-2}$$

$$(4) \mathbf{S}\mathbf{R} = (\mathbf{R}^2 \mathbf{J}) \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 (\mathbf{J}\mathbf{R}) = \mathbf{R}^2 (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}) \\ = \mathbf{R} (\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}) \mathbf{J} = \mathbf{R}\mathbf{J} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\leftarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いることが, 解法のポイントです。

$$\leftarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta) \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}(\theta)^* = \mathbf{R}(n\theta)$$

$$\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta)$$

これらは回転を表す行列の基本性質です。

$$\leftarrow \mathbf{J}^2 = \mathbf{I} (= \mathbf{E})$$

【8】別解

R は回転, S, J は折り返しで
 折り返しの積は回転
 ですから, R, S を $R(\theta), S(\theta)$ で表すと
 $S(\theta) \cdot J = R(2\theta) = R^2(\theta)$
 などの関係があります.

[解] (1)
$$S = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore S = R^2 J$$

(2)
$$JR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore JR = R^{-1} J$$

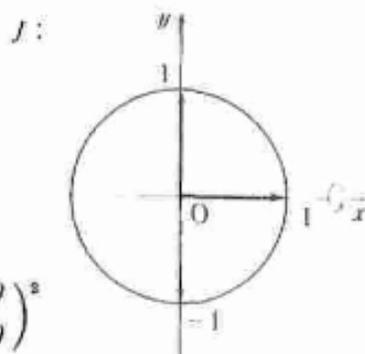
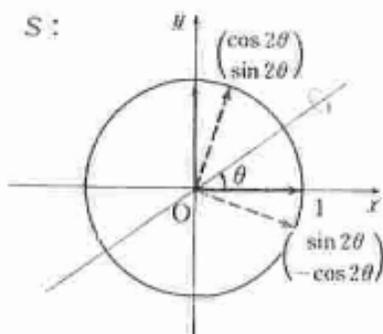
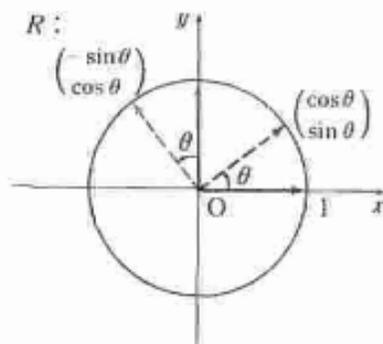
(3)
$$JS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2$$

$$\therefore JS = R^{-2}$$

(4)
$$SR = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore SR = RJ$$



【9】(山梨大一工)

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{5} & \frac{h}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{c}{5} \end{pmatrix}$$

C、Hの定理より

$$A^2 - \frac{1}{5}(a+c)A + \frac{1}{25}(ac-2h)E = 0$$

$A^2 = A$ を代入

$$A - \frac{1}{5}(a+c)A + \frac{1}{25}(ac-2h)E = 0$$

$$\therefore 5(a+c-5) = (ac-2h)E$$

$A \neq E$ より

$$\begin{cases} a+c=5 \\ ac=2h \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

次にS1によつて重力がない点を (x, y) と置く

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a-5 & h \\ 2 & c-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} (a-5)x + hy = 0 \\ 2x + (c-5)y = 0 \end{cases}$$

①より $2x + (c-5)y = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

S1による像で交る点を (x, y) と置く

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} ax + hy = 0 \\ 2x + cy = 0 \end{cases}$$

①より $2x + cy = 0 \quad \dots \textcircled{3}$

②, ③が直交するから

$$4 + c(c - 5) = 0$$

$$c^2 - 5c + 4 = 0$$

$$c = 1, 4$$

①より $c = 1$ のとき

$$a = 5 - c = 5 - 1 = 4$$

$$h = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$$

$c = 4$ のとき

$$a = 5 - c = 5 - 4 = 1$$

$$h = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right) (a, h, c) = (4, 2, 1), (1, 2, 4)$$

別解 $A^2 = A$ より

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & h \\ 2 & c \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 + 2h & h(a+c) \\ 2(a+c) & 2h+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 5h \\ 10 & 5c \end{pmatrix}$$

$(1, 1), (2, 1)$ 成分を比較すると

$$\begin{cases} a^2 + 2h = 5a & \dots \text{①} \\ 2(a+c) = 10 & \dots \text{②} \end{cases}$$

②より $a+c=5$ $\therefore a=5-c$

これを①に代入すると

$$a(5-c) + 2h = 5a$$

$$\therefore ac = 2h$$

よって $a+c=5, ac=2h$

③によつて重かがない点の集合は

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y) の集合であるが、③に注意するとそれは直線

$$2x - ay = 0 \quad \dots \text{④}$$

である。同時に③によつて原点にうつれるような点の集合は

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y) の集合であるが、③に注意するとそれは直線

$$2x + cy = 0 \quad \dots \text{⑤}$$

題意より④と⑤は直交するから

$$ac = 4$$

このとき、③より

$$b = 2, (a, c) = (1, 4), (4, 1)$$

$$\text{(答)} \quad (a, b, c) = (1, 2, 4), (4, 2, 1)$$

【10】

$$f: A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & h \end{pmatrix}, g: B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - c \\ 2c - h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - c \\ 2c - 2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - c = 0 \\ 2c - 2h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ h = c \end{cases}$$

$$\therefore a = h = c$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix}$$

$$\therefore \cos \theta = a, \sin \theta = h$$

$$a = h = c \text{ より } \cos \theta = \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 90^\circ \text{ より } \theta = 45^\circ \text{ (答)}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (答)}$$

(2) g^{-1} を表わす行列

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (答)}$$

平面上の任意の点 (x, y) の像を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = x + y, Y = 0 \Rightarrow \text{像は } X \text{ 軸 (答)}$$

【10】 補充問題 (青山学院大-理工 86)

次の条件をみたす行列で、成分が0または1の例を、(1), (2)については1つ、(3)については1組、あげよ。ただし、 E は単位行列を表す。

- (1) $A^2=O$ かつ $A \neq O$
 (2) $A^2=A$ かつ $A \neq O, A \neq E$
 (3) $AB=O$ かつ $BA \neq O$

(1) $A^2=O, A \neq O$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = O$$

$$a+d \neq 0 \text{ とすれば } b=c=0$$

$$a+d=0 \text{ のときは } a=d=0, b \neq 0 \text{ 又は } c \neq 0$$

$$\text{(答)} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(答)

(2) $A^2=A, A \neq O, A \neq E$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ d^2+bc = d \end{cases}$$

$$A \neq E \text{ より } A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

$$(1-a-d)A + (ad-bc)E = O$$

$$\therefore a+d=1, ad-bc=0$$

$$A^2 - A = O$$

$$\text{(答)} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $AB=O, BA \neq O$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{pmatrix}$$

$AB=O$ より

$$\begin{cases} ap+br=0 \\ aq+bs=0 \\ cp+dr=0 \\ cq+ds=0 \end{cases}$$

$$a=b=c=0, d=1, p=r=s=0, q=0$$

$$\text{(答)} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(答)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[研究] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$

を満たす。よって, $a+d=0, ad-bc=0$ かつ

$A^2=O, a+d=1, ad-bc=0$ かつ $A^2=A$ なる
一般には

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が $A^2 - pA + qE = O$ を満たすときには, $A = \frac{p}{q}E$ の単位形

か, または $p = a+d, q = ad-bc$ が成り立つ

が成り立つ。解はこれ以外にも多数存在する。

【10】 補充問題別解

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (1) $A^2 = O$ から $a^2 + bc = bc + d^2 = 0$, a, b, c, d は 0 または 1 であるから $a^2 = 0, d^2 = 0 \quad \therefore a = d = 0, bc = 0$

A^2 の (1, 2), (2, 1) 成分は 0 (答) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A^2 = A, A(A - E) = O$ A が逆行列をもつとすると, $A - E = O, A = E$ となり, 仮定に反する。よって, $ad - bc = 0$
 $A^2 = (a + d)A$ であるから, $a + d = 1$ よって, a, d は 0 と 1 である。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は条件に適する。 (答) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) (答) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

【11】(山口大一教・経・農)

(1) $y^2 = x$ 上の点 (t^2, t) の像は

$$\begin{pmatrix} a & h \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + ht \\ ct^2 + dt \end{pmatrix}$$

で $y = x^2$ 上に移るから

$$ct^2 + dt = (at^2 + ht)^2$$

$$a^2t^4 + 2ahct^3 + (h^2 - c)t^2 + dt = 0$$

任意の実数 t に対して成り立つから

$$a^2 = 0, 2ahc = 0, h^2 - c = 0, d = 0$$

$$a = d = 0, c = h^2$$

放物線が放物線にうつるから

$$\Delta = ad - hc = -hc = -h^3 \neq 0$$

求める条件は $a = d = 0, c = h^2 \neq 0$ (答)

(2) (1)より $A = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h^2 & 0 \end{pmatrix}$

$y = x^2$ 上の点 (s, s^2) の像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hs \\ h^2s^2 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} x = hs \\ y = h^2s^2 \end{cases}$$

s を消去して $h^3x = (h^2s)^2 = y^2 \therefore \underline{y^2 = h^3x}$ (答)

(3) $y = x^2$ より $y' = 2x$

$y = x^2$ 上の点 (u, u^2) における接線は

$$y - u^2 = 2u(x - u)$$

$$\therefore y = 2ux - u^2$$

その方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2u \end{pmatrix}$ の像は

$$\begin{pmatrix} a & h \\ h^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2hu \\ h^2 \end{pmatrix} \text{ で直交するから}$$

$$\begin{array}{l} 2hu + 2h^2u = 0 \\ 2h(h+1)u = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{任意の } u \text{ に対して成り立つから} \\ h \neq 0 \text{ を用いて } h = -1, \therefore c = 1 \end{array} \therefore \underline{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{ (答)}$$

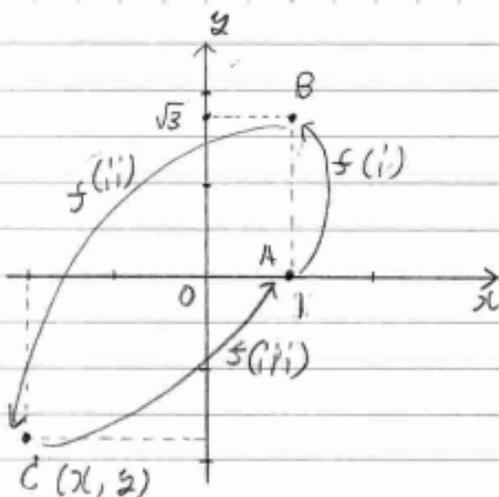
【12】

(1) 子を表す行列を F

$C(x, y)$ とおく

$$(i) F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(ii) F \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



束ねて

$$F \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ \sqrt{3} & y \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & x \\ \sqrt{3} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x \\ \sqrt{3} & y \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & x-1 \\ 3 & y-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

また

$$(iii) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & x-1 \\ 3 & y-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} \sqrt{3}x + y(x-1) = \sqrt{3} \dots ① \\ 3x + y(y-\sqrt{3}) = 0 \dots ② \end{cases}$$

$$① \times 3 \quad 3\sqrt{3}x + 3y(x-1) = 3\sqrt{3}$$

$$② \text{ ①に} + \quad \sqrt{3}(\sqrt{3}y - y^2) + y(\sqrt{3}y - y^2) - 3y = 3\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y^2 + 3y - y^3 + \sqrt{3}y^2 - 3y = 3\sqrt{3}$$

$$y^3 = -3\sqrt{3} = -\sqrt{27} = -\sqrt{3^3}$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}$$

$$② \text{ よ} ①) \quad 3x - \sqrt{3}(-\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

$$3x = -6$$

$$\therefore x = -2$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 3 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} -2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) $p^2 + q^2 = 1$ より $p = \cos \theta$, $q = \sin \theta$ と置く

$$p_0: \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$p_1: \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$p_2: \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ -\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{p_0 p_1} = (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta - 3 \sin \theta)$$

$$\overrightarrow{p_0 p_2} = (-3 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, -\sqrt{3} \cos \theta)$$

$\triangle p_0 p_1 p_2$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |3 \sin \theta \cos \theta - (\sqrt{3} \cos \theta - 3 \sin \theta)(-\sqrt{3} \cos \theta)|$$

$$= \frac{1}{2} |-9 \sin \theta \cos \theta + 3\sqrt{3}|$$

$$= \frac{1}{2} \left| -\frac{9}{2} \sin 2\theta + 3\sqrt{3} \right|$$

$\sin 2\theta = 1$ のとき

$$\text{最小値} = \frac{1}{2} \left| 3\sqrt{3} - \frac{9}{2} \right| = \frac{3}{4} (2\sqrt{3} - 3)$$

$\sin 2\theta = 1$ のとき $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ である

$$(p, q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(答)

【13】(福岡工大 90)

$$(i) \quad a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 2, 初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 = 2$ の等比数列である。

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

2^{n+1} で両辺を割る。

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$\left\{ \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \right\}$ は公差 $\frac{1}{2}$, 初項 $\frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$ の等差数列である。

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \times n$$

$$\therefore a_n = \underline{n \cdot 2^{n-1}} \quad (\text{答})$$

$$(ii) \quad S' = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$$

$$= 1 + 2(2x) + 3(2x)^2 + \dots + n(2x)^{n-1}$$

$$2x S' = 2x + 2(2x)^2 + \dots + (n-1)(2x)^{n-1} + n(2x)^n$$

辺々引く

$$(1-2x)S' = 1 + 2x + (2x)^2 + \dots + (2x)^{n-1} - n(2x)^n$$

(I) $2x \neq 1$ のとき

$$(1-2x)S' = \frac{1-(2x)^n}{1-2x} - n(2x)^n$$

$$\therefore S' = \frac{1-(2x)^n}{(1-2x)^2} - \frac{n(2x)^n}{1-2x} = \frac{1-(n+1)(2x)^n + n(2x)^{n+1}}{(1-2x)^2}$$

(II) $2x = 1$ のとき

$$S' = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(答)

【14】(鹿児島大-理<数> 88)

$$(1) \quad a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 2} \quad (a_n \neq 2)$$

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = 4 \neq 3$$

$n=k$ のとき $a_k \neq 3$ と仮定する。

$$a_{k+1} - 3 = \frac{a_k - 3}{a_k - 2} \neq 0$$

$$\therefore a_{k+1} \neq 3 \quad (\text{証明終わり})$$

別解 $n=k+1$ のときも成り立つと仮定する。

$$a_n = \frac{4a_{n-1} - 9}{a_{n-1} - 2}$$

とすると

$$a_n = 3 \text{ とすると } a_{n-1} = 3$$

よって $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1 = 3$ となり矛盾する

$$\therefore a_n \neq 3 \text{ となる。} \quad (\text{証明終わり})$$

$$(2) \quad a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 3 + 1}$$

$$\frac{1}{a_n - 3} = b_n \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} + 1} = \frac{1}{1 + b_n}$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n + 1$$

数列 $\{b_n\}$ は公差 1,

$$\text{初項 } b_1 = \frac{1}{a_1 - 3} = 1 \text{ の等差数列}$$

$$\therefore b_n = n, \quad \frac{1}{a_n - 3} = n, \quad a_n - 3 = \frac{1}{n} \therefore a_n = \frac{1}{n} + 3 \quad (\text{答})$$

【14】別解

考え方 (1) $a_{n+1}-3=\frac{a_n-3}{a_n-2}$ となる。これをくり返し用いて、

$$\begin{aligned} a_n-3 &= \frac{1}{a_{n-1}-2} \cdot (a_{n-1}-3) = \frac{1}{a_{n-1}-2} \cdot \frac{1}{a_{n-2}-2} (a_{n-2}-3) \\ &= \dots = \frac{1}{(a_{n-1}-2)(a_{n-2}-2)\cdots(a_1-2)} (a_1-3) \neq 0 \end{aligned}$$

としてもよいし、数学的帰納法でもよい。ただし「 $a_n \neq 3$ とすると $a_{n+1} \neq 3$ 」というふうに「 \neq 」ですすむ帰納法は気持ちが悪いので、背理法を使おう。

解答 (1) ある a_{n+1} について、 $a_{n+1}=3$ になったとすると、漸化式から

$$3(a_n-2)=4a_n-9 \quad \therefore a_n=3$$

これをくり返し、 $a_{n-1}=3, a_{n-2}=3, \dots, a_1=3$ となり、 $a_1=4$ に反する。よって、つねに $a_n \neq 3$

$$(2) \quad a_{n+1}-3 = \frac{4a_n-9}{a_n-2} - 3 = \frac{a_n-3}{a_n-2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-3} = \frac{a_n-2}{a_n-3} = \frac{a_n-3+1}{a_n-3} = 1 + \frac{1}{a_n-3}$$

$$\text{よって } b_{n+1} = 1 + b_n, \quad b_1 = \frac{1}{a_1-3} = 1 \quad \therefore b_n = n, \quad a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad \dots\dots(\text{答})$$

【15】(宮城教育大 78)

$$(1) \quad a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 2^n \quad (n \geq 2)$$

$$a_{n+1} - a_n - 2(a_n - a_{n-1}) = 2^n$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad \text{と置く}$$

$$b_n - 2b_{n-1} = 2^n$$

2^n で割ると

$$\frac{b_n}{2^n} - \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}} = 1 \quad (n \geq 2)$$

数列 $\left\{ \frac{b_n}{2^n} \right\}$ は公差 1, 初項 $\frac{b_1}{2} = \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

の等差数列

$$\frac{b_n}{2^n} = n \quad \therefore b_n = n \cdot 2^n$$

$$\therefore \underline{a_{n+1} - a_n = n \cdot 2^n} \quad (\text{答})$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^k$$

$$S' = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1}$$

$$2S' = 1 \cdot 2^2 + \dots + (n-2) \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^n$$

引き引く

$$-S' = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^n$$

$$-S' = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} - 2^n(n-1)$$

$$= 2^n - 2 - n \cdot 2^n + 2^n = -(n-2) \cdot 2^n - 2$$

$$S' = (n-2) \cdot 2^n + 2$$

$$\therefore \underline{a_n = 1 + (n-2) \cdot 2^n + 2 = (n-2) \cdot 2^n + 3} \quad (\text{答})$$

$$\text{別解 } a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 2^n \quad (n \geq 2)$$

$$(a_{n+1} - 2a_n) - (a_n - 2a_{n-1}) = 2^n$$

$$a_{n+1} - 2a_n = c_n \quad \text{と置く}$$

$$c_n - c_{n-1} = 2^n$$

$$c_{n+1} - c_n = 2^{n+1}$$

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} = 2^{n+1} - 3$$

(1) と合わせると

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = n \cdot 2^n & \dots \text{①} \\ a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1} - 3 & \dots \text{②} \end{cases}$$

① - ② より

$$a_n = n \cdot 2^n - 2^{n+1} + 3$$

$$\therefore a_n = \underline{\underline{(n-2) \cdot 2^n + 3}} \quad (\text{答})$$

【15】別解

$$a_{n+1} - (\alpha + \beta) a_n + \alpha \beta a_{n-1} = \delta^n \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\therefore a_{n+1} - \beta a_n - \alpha (a_n - \beta a_{n-1}) = \delta^n$$

$$\text{②} \quad a_{n+1} - \beta a_n = b_n \quad \text{①} \quad \delta^n$$

$$\therefore b_n - \alpha b_{n-1} = \delta^n$$

$$b_{n+1} - \alpha b_n = \delta^{n+1} = \delta \cdot \delta^n$$

$$\therefore b_{n+1} - \alpha b_n = \delta (b_n - \alpha b_{n-1})$$

$$\therefore b_{n+1} - (\alpha + \delta) b_n + \alpha \delta b_{n-1} = 0$$

同様に, $a_{n+1} - \alpha a_n = c_n \quad \text{③} \quad \delta^n$

$$a_{n+1} - \alpha a_n - \beta (a_n - \alpha a_{n-1}) = \delta^n$$

$$c_n - \beta c_{n-1} = \delta^n$$

$$\therefore c_{n+1} - \beta c_n = \delta (c_n - \alpha c_{n-1})$$

$$\therefore c_{n+1} - (\beta + \delta) c_n + \beta \alpha c_{n-1} = 0$$

よ、②

1) $\alpha \neq \delta, \beta \neq \delta$ のときは

$$b_n = A \alpha^{n-1} + B \delta^{n-1}, \quad c_n = C \beta^{n-1} + D \delta^{n-1}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \beta a_n = A \alpha^{n-1} + B \delta^{n-1} \\ a_{n+1} - \alpha a_n = C \beta^{n-1} + D \delta^{n-1} \end{cases}$$

②と③に①をひいて a_{n+1} を消去すれば

$$a_n = E \alpha^{n-1} + F \beta^{n-1} + G \delta^{n-1}$$

2) $\alpha = \delta, \beta \neq \delta$ のときは

$$b_n = (A + Bn) \alpha^{n-1}, \quad c_n = C \beta^{n-1} + D \alpha^{n-1}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \beta a_n = (A + Bn) \alpha^{n-1} \\ a_{n+1} - \alpha a_n = C \beta^{n-1} + D \alpha^{n-1} \end{cases}$$

②と③に①をひいて a_{n+1} を消去すれば

$$a_n = E \beta^{n-1} + (F + Gn) \alpha^{n-1}$$

このとき, $\alpha = \gamma = 2, \beta = 1$ とみよして

$$a_n = E + (F + G\alpha)2^{n-1}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3a_2 - 2a_1 + 2^2 = 9 - 2 + 4 = 11 \text{ により}$$

$$\begin{cases} E + F + G = 1 \\ E + 2(F + 2G) = 3 \\ E + 4(F + 3G) = 11 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} E + F + G = 1 \dots (i) \\ F + 3G = 2 \dots (ii) \\ F + 4G = 4 \dots (iii) \end{cases}$$

$$(iii) - (ii) \text{ より} \quad (ii) \text{ より} \quad F + 3 \cdot 2 = 2 \quad \therefore F = -4$$

$$F + 3G = 2 \quad (i) \text{ より} \quad E - 4 + 2 = 1 \quad \therefore E = 3$$

$$\rightarrow F + 4G = 4 \quad \therefore E = 3, F = -4, G = 2$$

$$-G = -2$$

$$\therefore G = 2$$

よって

$$a_n = 3 + (-4 + 2\alpha)2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 + (\alpha - 2) \cdot 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \underline{a_n = 3 + (\alpha - 2) \cdot 2^n}$$

(1) 方向ベクトルを $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とおく

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m \\ a+hm \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+2m}{a+hm} = \frac{1}{m}$$

$$\therefore 2m^2 - (h-1)m - a = 0$$

この解が $m=2$ のみであるから

$$D = (h-1)^2 + 8a = 0$$

$$(m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 8 = 0$$

$$\therefore h-1 = 8 \text{ かつ } h = 9$$

$$a = -8 \text{ かつ } a = -8 \quad (\text{答}) \underline{a = -8, h = 9}$$

$$(2) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -8x_n + 9y_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 2x_{n+1} &= (-8x_n + 9y_n) - 2(x_n + 2y_n) \\ &= -10x_n + 5y_n \\ &= 5(y_n - 2x_n) \end{aligned}$$

数列 $\{y_n - 2x_n\}$ は公比 5, 初項 $y_1 - 2x_1 = 3 - 2 = 1$ の等比数列

$$\therefore y_n - 2x_n = 5^{n-1} \quad (\text{答})$$

(3) $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ に $y_n = 2x_n + 5^{n-1}$ を代入する。

$$x_{n+1} = x_n + 2(2x_n + 5^{n-1})$$

$$x_{n+1} = 5x_n + 2 \cdot 5^{n-1}$$

両辺を 5^{n+1} で割る

$$\frac{x_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{x_n}{5^n} + \frac{2}{25}$$

$$\therefore \frac{x_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{x_n}{5^n} = \frac{2}{25}$$

数列 $\left\{ \frac{x_n}{5^n} \right\}$ は公差 $\frac{2}{25}$ 、初項 $\frac{x_1}{5^1} = \frac{1}{5}$ の等差数列

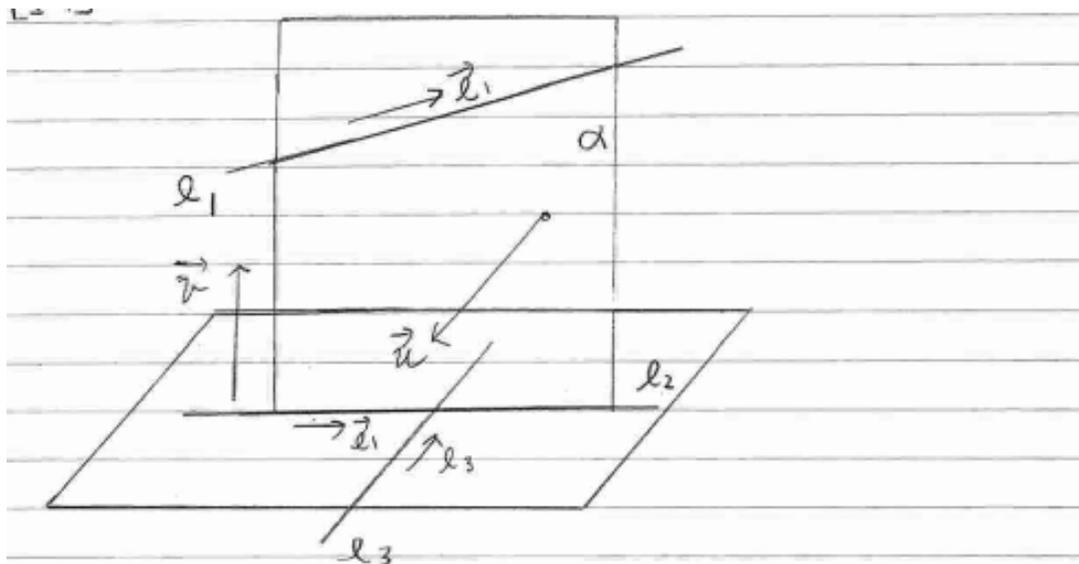
$$\frac{x_n}{5^n} = \frac{1}{5} + (n-1) \cdot \frac{2}{25}$$

$$\frac{x_n}{5^n} = \frac{5 + 2n - 2}{5^2}$$

$$x_n = (2n + 3) 5^{n-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_n &= 2x_n + 5^{n-1} = (2n + 3) 5^{n-2} \cdot 2 + 5^{n-1} \\ &= (4n + 11) 5^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \begin{cases} x_n = (2n + 3) 5^{n-2} \\ y_n = (4n + 11) 5^{n-2} \end{cases}$$



$$(1) \quad l_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+5}{-5}$$

l_1 を含む x, y 平面に垂直な平面の法線ベクトルを $\vec{n} = (l, m, 0)$ とおける。

l_1 の方向ベクトル $\vec{d}_1 = (3, 8, -5)$ で $\vec{n} \perp \vec{d}_1$ より

$$3l + 8m = 0$$

$$\therefore l : m = 8 : -3$$

$\vec{n} = (8, -3, 0)$ としてよい。

l_1 の点 $(3, 2, -5)$ を含むから

$$\alpha: 8(x-3) - 3(y-2) + 0(z-5) = 0$$

$$\therefore \alpha \text{ の方程式は } \underline{8x - 3y = 18} \quad (\text{答})$$

l_2 の方程式は, $8x - 3y = 18, z = 0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x = x', y = 3x' + y'$ を代入して $8x' - 3(3x' + y') = 18$

$$\therefore l_2 \text{ の方程式は } \underline{x + 3y + 18 = 0, z = 0} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad l_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+5}{-5}$$

$$l_2: \frac{x}{3} = \frac{y+6}{-1}, z=0$$

l_1 において $z=0$ とおく。 $x=0, y=-6$

これは、 l_2 も満たす。つまり点 $(0, -6, 0)$ で交わるが
同一平面上にある。

この平面の法線ベクトルを $\vec{v} = (p, q, r)$ とおくと、

$$\vec{v} \perp \vec{d}_1 \Rightarrow \begin{cases} 3p + 8q - 5r = 0 \\ 3p - q = 0 \end{cases}$$

$$p = \frac{5}{27}r, q = \frac{5}{9}r,$$

$$p : q : r = \frac{5}{27}r : \frac{5}{9}r : r$$

$$\therefore p : q : r = 5 : 15 : 27$$

求める平面は、 $5x + 15(y+6) + 27z = 0$

$$\therefore \underline{5x + 15y + 27z = -90} \quad (\text{答})$$

【18】(福岡教育大)

$$\begin{aligned}(1) \quad & A^2 - 3A + 2E \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7-9+2 & -6+6+0 \\ 3-3+0 & -2-0+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \quad (\text{証明終り})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{別解} \quad & A^2 - 3A + 2E \\ &= (A - 2E)(A - E) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \quad (\text{証明終り})\end{aligned}$$

$$(2) \quad A^2 - 3A + 2E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

$$A^2 - A - 2A + 2E = O$$

$$A(A - E) = 2(A - E)$$

自然数 n に対して

$$A^n(A - E) = 2^n(A - E) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことを示す。

(i) ①から

$$A(A - E) = 2(A - E)$$

となるので、 $n=1$ のとき②が成り立つ

(i) $\lambda = k$ のとき ② が成り立つ。すなわち

$$A^k(A-E) = 2^k(A-E)$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} A^{k+1}(A-E) &= A \cdot A^k(A-E) \\ &= A\{2^k(A-E)\} \\ &= 2^k A(A-E) \\ &= 2^k \cdot 2(A-E) \\ &= 2^{k+1}(A-E) \end{aligned}$$

となるので、 $\lambda = k+1$ のときも ② が成り立つ。

以上 (i), (ii) が示されたため

$$A^n(A-E) = 2^n(A-E) \dots \textcircled{2}$$

は成り立つ。

(証明終わり)

(3) (2) で示したことと同様にして

$$A^n(A-2E) = A-2E$$

を示し、これと (2) で示したことから、 A^{n+1} を消去する

$$A^2 - 3A + 2E = 0$$

から

$$A^2 - 2A - A + 2E = 0$$

$$A(A-2E) = A-2E$$

よって、(2) と同様にして、

$$A^n(A-2E) = A-2E \dots \textcircled{3}$$

が成り立つことが示される。

② - ③ から

$$A^n = 2^n(A-E) - (A-2E)$$

$$= (2^n - 1)A - (2^n - 2)E$$

$$= (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (2^n - 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$$

(答)

(3)の別解: ②が5

$$A^{\lambda+1} - A^\lambda = 2^\lambda (A - E)$$

したがって, $\lambda \geq 2$ のとき

$$A^\lambda = A + \sum_{k=1}^{\lambda-1} (A^{k+1} - A^k)$$

$$= A + \sum_{k=1}^{\lambda-1} \{2^k (A - E)\}$$

$$= A + \frac{2(2^{\lambda-1} - 1)}{2 - 1} (A - E)$$

$$= (2^\lambda - 1)A - (2^\lambda - 2)E$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{\lambda+1} - 1 & -2^{\lambda+1} + 2 \\ 2^\lambda - 1 & -2^\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} 2^{\lambda+1} - 1 & -2^{\lambda+1} + 2 \\ 2^\lambda - 1 & -2^\lambda + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

となるので, $\lambda = 1$ の場合を含めて

$$A^\lambda = \begin{pmatrix} 2^{\lambda+1} - 1 & -2^{\lambda+1} + 2 \\ 2^\lambda - 1 & -2^\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

(答)

$$(4) \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{X5}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -1, a_2 = 2 \quad (\text{X1})$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & -2^n + 2 \\ 2^{n-1} - 1 & -2^{n-1} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 4 \\ 3 \cdot 2^{n-1} - 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 4} \quad \left(\frac{15}{2}\right)$$

[19]

$$l_1 \rightarrow l_2, l_2 \rightarrow l_1 \text{ (')}$$

$$l_1: y = 2(x-3) + 1$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

$$l_2: y = \frac{1}{3}(x-1) + 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$T: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

l_1 に代'入して

$$cx + dy = 2(ax + by) - 5$$

$$(2a - c)x + (2b - d)y - 5 = 0$$

これは $x - 3y + 5 = 0$ と一致する。

$$\begin{cases} 2a - c = -1 \quad \dots \textcircled{1} \\ 2b - d = 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - c = -1 \quad \dots \textcircled{1} \\ 2b - d = 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

l_2 に代'入して

$$3(cx + dy) = (ax + by) + 5$$

$$(a - 3c)x + (b - 3d)y + 5 = 0$$

これは $2x - y - 5 = 0$ と一致する。

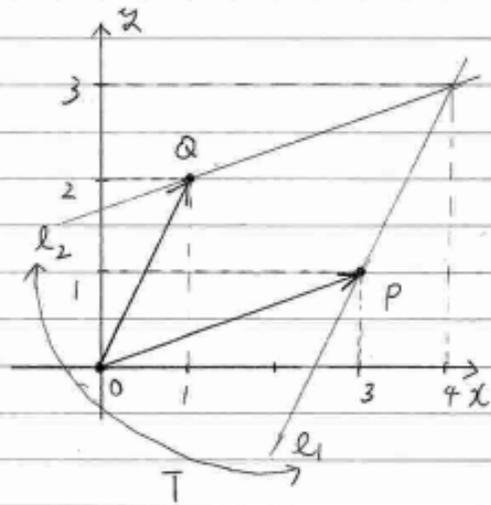
$$\begin{cases} a - 3c = -2 \quad \dots \textcircled{3} \\ b - 3d = 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 3c = -2 \quad \dots \textcircled{3} \\ b - 3d = 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

①, ②, ③, ④ を解いて

$$\begin{cases} 2a - c = -1 \quad \dots \textcircled{1} \\ a - 3c = -2 \quad \dots \textcircled{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2b - d = 3 \quad \dots \textcircled{2} \\ b - 3d = 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{5} \right) a = -\frac{1}{5}, b = \frac{8}{5}, c = \frac{3}{5}, d = \frac{1}{5}$$



(別解) $l_1 \rightarrow l_2, l_2 \rightarrow l_1$ より

直線 $OP \rightarrow$ 直線 OQ , 直線 $OQ \rightarrow$ 直線 OP

よ、 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

束ねて

$$A \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(答)

$$(1) \quad s_n = 9 - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3^{n-2}} \quad \text{--- ①}$$

$n \rightarrow n+1$ とおく

$$s_{n+1} = 9 - \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{--- ②}$$

② - ①

$$s_{n+1} - s_n = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{2}{3^{n-1}} = a_{n+1}$$

$$-\frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = -\frac{2}{3^{n-1}}$$

$$\therefore 3a_{n+1} - a_n = \frac{4}{3^{n-1}}$$

(答)

(2) 両辺に 3^n をかける

$$3^{n+1}a_{n+1} - 3a_n = 12$$

$$\{3^n a_n\} = b_n \text{ とおく}$$

$$b_{n+1} - b_n = 12$$

b_n は公差 12 の等差数列だから初項 b_1 は

$$b_1 = 3a_1 = 3s_1 = 3\left(9 - \frac{1}{2}a_1 - 3\right)$$

$$a_1 = 6 - \frac{1}{2}a_1$$

$$3a_1 = 12$$

$$\therefore a_1 = 4$$

$$\therefore b_1 = 3a_1 = 3 \times 4 = 12$$

$$b_n = 12n$$

$$3^n a_n = 12n$$

$$\therefore a_n = \frac{12n}{3^n} = \frac{4n}{3^{n-1}}$$

(答)