

1991

直前講習

木暮浩司の

微分・積分

は し が き

入試の日程が早くなって、一部の大学では始まっている頃である。直前の学習では更に新しい事を覚えるよりは、今迄に学習した内容を整理して確実な知識とすることが大切である。数学では基礎となる「定理」「公式」などの重要事項をもう一度確認して、現在身につけている実力を保持することをねらいとする勉強をするとよい。

直前ゼミでは、微分・積分の重要事項を整理しながら、標準的な問題の解き方を指導する。

短期間ではあるが、合格への足がかりになれば幸いである。

目 次

1. 極 限	4
2. 微分の応用	11
3. 積分とその応用 (1)	17
4. 積分とその応用 (2)	24
補 充 問 題	31

1 極 限

公式1 (はさみうちの原理)

3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$ において

$$a_n < x_n < b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

公式2 (重要な数列の極限)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ の収束, 発散

(i) $|r| < 1$ のとき, 0に収束 (ii) $r = 1$ のとき, 1に収束

(iii) $|r| > 1$ のとき, 発散 (IV) $r = -1$ のとき, 振動

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n$ の収束, 発散

(i) $|r| < 1$ のとき, 0に収束 (ii) $|r| \geq 1$ のとき, 発散

(証明) (1)の(iii) $r > 1$ のとき $r = 1 + h (h > 0)$ とおくと, $n \geq 2$ で

$$r^n = (1 + h)^n > 1 + n h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n h) = +\infty \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$$

(2)の(i) $r = 0$ のとき $n r^n = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$

$$0 < |r| < 1 \text{ のとき } |r| = \frac{1}{1 + h} \text{ (} h > 0 \text{) とおくと}$$

$$n \geq 2 \text{ で } (1 + h)^n > {}_n C_2 h^2 = \frac{1}{2} n(n-1) h^2 \text{ より}$$

$$0 < |n r^n| = n |r|^{n-1} = \frac{n}{(1 + h)^{n-1}} < \frac{2}{(n-1) h^2} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$$

公式3 (無限級数の収束, 発散)

(1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散は部分和の数列 $\{S_n\}$ の収束, 発散と一致する。

(2) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ の収束, 発散

(i) $a = 0$ または $|r| < 1$ のとき収束し, その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

(ii) $a \neq 0$ かつ $|r| \geq 1$ のとき発散する。

公式4 (重要な関数の極限)

(1) 3角関数

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(2) 指数・対数関数

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

公式5 (ロピタルの定理)

$x \rightarrow a$ のとき $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

公式6 (平均値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続、开区間 $a < x < b$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

となる c が少なくとも1つ存在する。

公式7

有界である単調数列は収束する。

例題1 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$) のとき,

数列 $\{a_n\}$ は極限值 $\sqrt{2}$ をもつことを示せ。

[解答] まず, $a_n > 0$ であることを数学的帰納法で示す。

$a_1 = 2 > 0$, ある自然数 k に対して, $a_k > 0$ と仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + \frac{a_k}{2} > 0 \text{ が成り立つ。}$$

ゆえに, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{a_n} \cdot \frac{a_n}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \therefore a_{n+1} \geq \sqrt{2}$$

また

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a_n}\right) (a_n - \sqrt{2})$$

$$< \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{2}) \quad \left[\because 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{a_n} < 1 \right]$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-1} - \sqrt{2}) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - \sqrt{2})$$

$$\therefore 0 \leq a_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{2})$$

はさみ打ちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2}) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

[別解] $a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}, a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n}$

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} \text{ とおくと, } b_{n+1} = b_n^2 \quad \therefore b_n = b_1^{2^{n-1}}$$

$$b_1 = 3 - 2\sqrt{2} \text{ で, } 0 < b_1 < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

[1] 数列 $\{x_n\}$ を $0 < x_1 < 1$ として

$$x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) すべての n に対して, $0 < x_n < 1$ であることを示せ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し, その極限値を求めよ。

[2] $a_1 = 3$, $a_{n-1} - a_n = \frac{1}{3} n a_{n-1} a_n$ ($n = 2, 3, \dots$) で与えられる数列がある。

(1) $a_n \neq 0$ ($n = 2, 3, \dots$) であることを示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。 b_n を n の式で表せ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

[3] 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 A の n 個の積を A^n とし、

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおく。}$$

更に、行列 A が $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすとき

- (1) $a_n - c_n$ を a, c で表せ。
- (2) a_n を a, c で表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束する条件を求め、このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を a, c で表せ。

[4] (1) c を正の定数とし, $a_n = \frac{1}{n} \log \left(c^n + \frac{1}{c^n} \right)$ とするとき,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるとする。このとき,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2}$$

を $f'(1)$ を用いて表せ。

2 微分の応用

公式1 (接線・法線の方程式)

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における

(1) 接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

(2) 法線の方程式は

$$\begin{cases} f'(a) \neq 0 \text{ のとき } & y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \\ f'(a) = 0 \text{ のとき } & x = a \end{cases}$$

公式2 (極大・極小)

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む小区間で微分可能であるとき

(1) $x < a$ で $f'(x) > 0$, $x > a$ で $f'(x) < 0$ ならば $x = a$ で極大
($f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ ならば $x = a$ で極大)

(2) $x < a$ で $f'(x) < 0$, $x > a$ で $f'(x) > 0$ ならば $x = a$ で極小
($f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ならば $x = a$ で極小)

(注) 関数のグラフをかくには次のことを調べる。

- | | |
|----------------|------------------|
| (1) グラフの存在範囲 | (2) グラフの対称性, 周期性 |
| (3) 座標軸との交点 | (4) 関数の増減, 極値 |
| (5) 曲線の凹凸, 変曲点 | (6) 漸近線 |

公式3 (漸近線)

(1) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$ または $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$ のとき直線 $x = a$ は曲線の漸近線である。

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ のとき, $y = ax + b$ は漸近線である。
とくに, $a = b = 0$ のとき漸近線は x 軸である。

公式4

x の整式 $f(x)$ が $(x - a)^2$ で割り切れるための必要十分条件は $f(a) = 0$ かつ $f'(a) = 0$ である。

例題2 x に関する方程式 $2^x - ax = 0$ (a は定数)が解をもつための条件を求めよ。

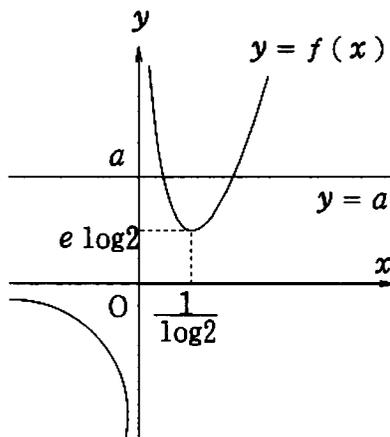
[解答]

解1° $x=0$ は解ではないから, $\frac{2^x}{x} = a$

$f(x) = \frac{2^x}{x}$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{2^x(x \log 2 - 1)}{x^2}$$

よって, $f(x)$ の増減表は右のようになるから, $y = f(x)$ のグラフをえる。このとき, $y = f(x)$ と $y = a$ とが交点をもつのは



$a < 0$ または $a \geq e \log 2$ ……[答]

解2° $2^x = ax$ より $g(x) = 2^x$

上の接点を $(t, 2^t)$ とおくと,

$g'(x) = 2^x \log 2$ であるから,

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\log 2}$		∞
$f'(x)$		-	$-\infty$	-	0	-	$+$
$f(x)$	0	\searrow	$-\infty$	∞	\searrow	極小	\nearrow

接線は

$$y - 2^t = 2^t \log 2 (x - t)$$

これが, 原点を通るから

$$-2^t = 2^t \log 2 (-t)$$

$$\therefore t = \frac{1}{\log 2}$$

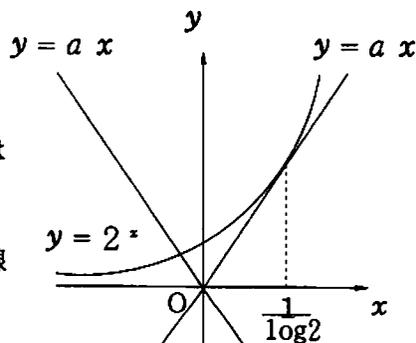
よって, 接線 $y = ax$ の傾き a は

$$a = 2^t \log 2 = e \log 2$$

であるから, 直線 $y = ax$ と曲線

$y = 2^x$ が共有点をもつのは,

$$a < 0 \text{ または } a \geq e \log 2$$



[5] 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2) $f(a-1) < f(a)$ を満たす a の値の範囲を求めよ。
- (3) 区間 $t-1 \leq x \leq t$ での $f(x)$ の最大値 $F(t)$ を求めよ。ただし、 t は任意の実数とする。

[6] 関数 $f_n(x) = \sqrt{n(n+1)} - \frac{n^2-1}{nx} - n \log x$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

の最大値を a_n とする。ただし、対数は自然対数とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[7] $e = 2.718\cdots$ は自然対数の底である。 $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{x}{e^2} + \frac{1 + \log x}{x} \text{ について}$$

- (1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 方程式 $f'(x) = 0$ は相異なる 2 実解をもつことを示せ。なお、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ を用いてもよい。
- (3) (2) で得られた 2 実解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とするとき、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値を、 $x = \beta$ で極小値をもつことを示し、更に極小値を求めよ。

[8] a を 0 でない実数とする。2つの曲線 $y = e^x$ および $y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。

3 積分とその応用 (1)

公式1 (重要な不定積分)

$$(1) \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C (n \neq -1)$$

$$(2) \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C, \quad \int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \log x dx = x \log x - x + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

公式2 (置換積分法)

$$x = g(t) \text{ のとき} \quad \int f(x) dx = \int f\{g(t)\} g'(t) dt$$

とくに、よく用いられる置換は

$$(1) f(ax+b) \rightarrow ax+b=t \quad (2) f'(x)\{f(x)\}^a \rightarrow f(x)=t$$

$$(3) \sqrt{a^2-x^2} \rightarrow x = a \sin x \quad (4) \frac{1}{a^2+x^2} \rightarrow x = a \tan x$$

公式3 (部分積分法)

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

公式4

$$(1) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f\{g(x)\} g'(x)$$

公式5 (面積)

- (1) 区間 $[a, b]$ で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の間の面積は

$$f(x) \geq g(x) \text{ のとき } S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

- (2) 媒介変数表示の曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ と x 軸の間の面積

$$S = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t) dt$$

$$\left[\begin{array}{c|c} dx = f'(t) dt & \\ \hline x & a \rightarrow b \\ \hline t & t_1 \rightarrow t_2 \end{array} \right]$$

公式6 (体積)

- (1) 曲線 $y = f(x)$ を x 軸のまわりに回転した立体の体積

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

- (2) 曲線 $x = g(y)$ を y 軸のまわりに回転した立体の体積

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

公式7 (曲線の長さ)

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ ($a < b$) までの曲線の長さ

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

- (2) 曲線の方程式が媒介変数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ で与えられたとき,

$t = \alpha$ から $t = \beta$ ($\alpha < \beta$) までの曲線の長さ

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

例題3 関数 $f(x)$ は次の定積分で定義されている。

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$$

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフを描け。

[解答] $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$f'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos x - \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)$$

$$= |\cos x| \cos x + |\sin x| \sin x$$

(i) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $f'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \therefore f(x) = x + C$

ここで, 初期条件として,

①より $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ (← 半径1の円の面積の4分の1に等しい)

であるから $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + C \therefore C = -\frac{\pi}{4}$

$$\therefore f(x) = x - \frac{\pi}{4}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき, $f'(x) = -\cos^2 x + \sin^2 x = -\cos 2x$

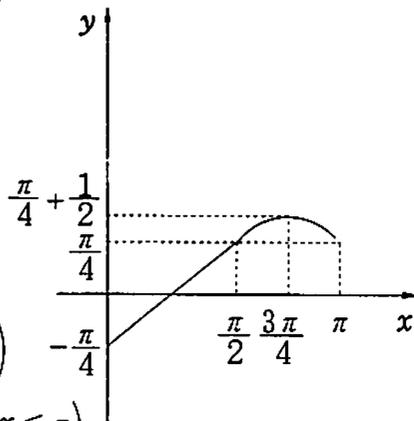
$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + C'$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ であるから, $\frac{\pi}{4} = C'$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2x}{2}$$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2x}{2} & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$



よって, グラフは右図。

[9] $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|x - \theta| dx, \quad g(\theta) = \int_0^{\theta} (x - \theta) \cos(x - \theta) dx$$

とする。

- (1) $f(\theta)$ の最大値, 最小値を求めよ。
- (2) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ の大小関係を調べよ。

[10] a は 1 より大きい実数とする。方程式 $\sin a x = \sin x$ の $x > 0$ における最小の解を θ とおく。

(1) θ を a を用いて表せ。

(2) $0 \leq x \leq \theta$ の範囲で 2 曲線 $y = \sin a x$, $y = \sin x$ によって囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $\lim_{a \rightarrow \infty} (a+1)S(a)$ を求めよ。

- [11] 2つの曲線 $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$), $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれる
図形を直線 $x + y = 0$ のまわりに1回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[12] 曲線 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ の $a \leq x \leq a+2$ ($a > 0$) の部分の長さを $l(a)$ とする。

(1) $l(a)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ において $l(a)$ の最小値を求めよ。

4 積分とその応用 (2)

公式1 (定積分と不等式)

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ で連続であるとき

(1) 区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ ならば $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

等号は恒等的に $f(x) = 0$ のときに限り成り立つ

(2) 区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

等号は恒等的に $f(x) = g(x)$ のときに限り成り立つ

(3) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(4) 区間 $a \leq x \leq b$ における最大値を M , 最小値を m とすれば

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

公式2 (積分の平均値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続ならば

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c), \quad a < c < b$$

となる c が少なくとも1つ存在する。

公式3 (定積分と級数)

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} \\ &= \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 0$ で連続な増加関数ならば

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x) dx < f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

公式4 (微分方程式)

$$(1) \quad y' = f(x) \longrightarrow y = \int f(x) dx$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \longrightarrow \int g(y) dy = \int f(x) dx$$

$$\text{特に, } \frac{dy}{dx} = f(x)y \longrightarrow y = c e^{F(x)}$$

$$\text{ただし, } F(x) = \int f(x) dx$$

例題 4 次の等式を満足する関数 $f(x)$ を求めよ。ただし、 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続であるとする。

$$f(x) = x^2 + \int_0^x (t-x)f'(t) dt$$

[解答] 与式より

$$f(x) = x^2 + \int_0^x t f'(t) dt - x \int_0^x f'(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + x f'(x) - \left\{ \int_0^x f'(t) dt + x f'(x) \right\} \\ &= 2x - \int_0^x f'(t) dt \\ &= 2x - \left[f(t) \right]_0^x = 2x - \{f(x) - f(0)\} \end{aligned}$$

ここで、 $\textcircled{1}$ で、 $x=0$ を代入すると、初期条件 $f(0)=0$ が得られるから

$$f'(x) = 2x - f(x) \quad \therefore f'(x) + f(x) = 2x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ の両辺に e^x をかけると

$$\{f'(x) + f(x)\} e^x = 2x e^x \quad \therefore \{f(x) e^x\}' = 2x e^x$$

両辺を x で積分すると

$$\int \{f(x) e^x\}' dx = 2 \int x e^x dx$$

$$\therefore f(x) e^x = 2 \{(x-1) e^x\} + C$$

ここで、 $f(0)=0$ を用いて $-2 + C = 0$

$$\therefore C = 2$$

$$\therefore f(x) e^x = 2(x-1) e^x + 2$$

ゆえに、求める関数は

$$f(x) = 2(x-1) + 2 e^{-x} \quad \dots\dots (\text{答})$$

[13] k, n を自然数とし, $I_n = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin \frac{k}{n} x \, dx$ とする。

(1) I_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_n$ を求めよ。

[14] 第1象限にある曲線 $C : y = f(x)$ が次の条件(A)と(B)を満たすとき、
 $f(x)$ を求めよ。

(A) C 上の任意の点 P における C の接線は x 軸、 y 軸と交わり、その交点をそれぞれ Q 、 R とすると、点 P は線分 QR を $1 : 2$ に内分する。

(B) 原点から C 上の点への距離の最小値は 1 である。

- [15] 平面上を動く点Pの時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ とする。時刻 $t=0$ でPは原点にあり、時刻 t での速さは $\sqrt{2-y(t)}$ であり、速度ベクトルの x 成分はつねに1で y 成分はつねに負である。このとき、 $t \geq 0$ でのPの軌跡を求めよ。

[16] 関数 $f(x)$ は $x > -1$ において, 第2次導関数 $f''(x)$ をもち, 更に

$$(x+1)^2 f(x) - 2 \int_0^x (x-t) f(t) dt - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) $f(0)$ および $f'(0)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

補 充 問 題

[17] $0 < x_0 < a \leq \frac{1}{2}$ とする。 $x_{n+1} = \frac{1}{1-a}(1-x_n)x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
によって定義される数列 $\{x_n\}$ について

- (1) $x_n < a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (2) $x_n < x_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ を示せ。

[18] 関数 $f(x) = \log(1+x) - ax$ について、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。ただし、対数の底は e とする。

[19] 媒介変数 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) によって $\begin{cases} x = \sin^2 \theta \\ y = \sin^2 \theta \cos \theta \end{cases}$ と表される曲線 C について

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 曲線 C が囲む図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C が囲む図形を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

[20] 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は $x \geq 0$ において連続で、 $f(x) > 0$ とする。曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = 0$, $x = t$ とで囲まれる図形の面積を表す関数を $S(t)$ とし、曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq t$ の部分の長さを表す関数を $L(t)$ とする。これらの関数に対して、 $S(t) + L(t) = f(t) - 4$ が成立するとき、次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$, $L(t)$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ。

(2) $y = f(x)$ の満たす微分方程式をつくれ。

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ。