

冬 期 講 習

基礎解析・代数幾何

(スタンダード)

はじめに

このテキストは、基礎解析・代数幾何の分野からもっとも出題率の高い5つの単元を選び

第1日目	数 列
第2日目	微分法・積分法
第3日目	ベクトルと空間図形
第4日目	行 列
第5日目	1次変換

の順序に配列されている。

このテキストには、標準問題を中心にややハイレベルの問題まで含まれている。20問のうちに融合問題が多く含まれていることに気がつくであろう。これは最近の入試の実情を強く意識したからである。この数年間に出版された有名大学の問題を調べてみると、難化の傾向は感じられないが、1つの問題から受験生の総合的な学力をみるために、融合問題が多くみられるようになった。このような実情に対処するために編集したのがこのテキストである。

数学は、講義を聴いて理解するだけでは“合格できる実力”は身につかない。真の実力をつけるためには予習することがベストである。たとえ、問題が解けなくても、自分なりに考える時間をつくることが実力をつける端緒をつかむことになる。また、復習にも十分な時間を割いてもらいたい。基礎事項を整理しながら、定理・公式を確実に理解し、1つの問題を完答するまでの、考え方・解き方のプロセスをマスターすれば、十分な実力がつくものと確信している。

冬期講習を制するものが入試を制するといわれている。短期間の講習会であるが、充実した日々を過ごせば、明春は合格の栄冠がキミの頭上に輝くはずである。

目 次

第 1 回	数 列	1
第 2 回	微分法・積分法	3
第 3 回	ベクトルと空間図形	5
第 4 回	行 列	7
第 5 回	1 次変換	9

第 1 回 数 列

【1】 数列 (a_n) が初項 1, 公比 2 の等比数列であるとき, 次の式をそれぞれ n で表せ。

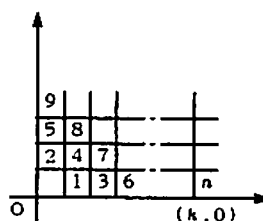
$$(1) \sum_{k=1}^n k a_k$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 a_k$$

【2】 実数 x の関数 $f(x) = \sum_{k=1}^{100} |x - k|$ の最小値を求めよ。

【3】 右図のように $1, 2, 3, \dots$ が整数
 点上にある。整数点 (p, q) とは p, q
 がともに整数の点である。

- (1) 点 $(k, 0)$ におかれる数 n を k で表せ。
- (2) これを用いて点 (i, j) におかれる数
 を i と j で表せ。
- (3) 1000 におかれる点の座標を求めよ。



- 【4】 (1) 半径 1 の球を四角すい形に n 段積み重ねたとき、全体の高さを求めよ。
- (2) (1)のときの球の総数を求めよ。
 - (3) 半径 1 の球を三角すいの形に n 段積み重ねたとき、全体の高さを求めよ。
 - (4) (3)のときの球の総数を求めよ。

第2回 微分法・積分法

【5】 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ において、

(1) $f(x)$ が極大値と極小値をもち、その差が4のとき $a^2 - \square b = \square$

(2) 曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, 8)$ から引いた接線がちょうど2本であれば

$$a = -\square$$

(3) (1), (2)が共に成り立つとき、2本の接線の傾きは $\square \square$ および $-\square \square$ である。

【6】 3次関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極小値0, $x = -3$ で極大値32をとる。

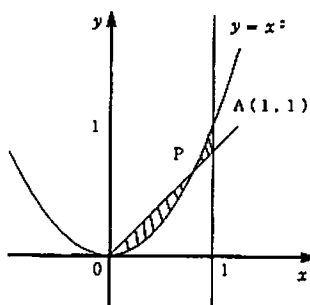
(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 点 $A(0, f(0))$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線 l が再び C と交わる点を B とする。点 P が C 上を A から B まで動くとき、 P と l との距離の最大値を求めよ。

【7】 次の関数を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_1^x x f(t) dt = \int_x^{-1} f(t) dt + x^4 + 3$$

【8】 点 P は曲線 $y = x^2$ の上を原点 O から点 $A(1, 1)$ まで動く。このとき、2点 O, P を通る直線、曲線 $y = x^2$ および直線 $x = 1$ で囲まれる、図の斜線をひいた部分の面積が最小となるのは P がどんな位置にあるときか。
その点 P の座標を求めよ。



第 3 回 ベクトルと空間図形

【9】 直角三角形でない $\triangle ABC$ において、垂心（各頂点から対辺に下した3垂線の交点）を H 、外心を E とする。 $\triangle HBC$ 、 $\triangle HCA$ 、 $\triangle HAB$ の重心をそれぞれ G_1 、 G_2 、 G_3 とし、 $\triangle G_1G_2G_3$ の重心を G とする。このとき、 $\vec{a} = \vec{HA}$ 、 $\vec{b} = \vec{HB}$ 、 $\vec{c} = \vec{HC}$ とおき、これらを用いて \vec{HG} および \vec{HE} を表せ。

【10】 空間における3点 $A(2, 2, 0)$ 、 $B(2, -3, \sqrt{5})$ 、 $C(x, -1, 0)$ において $\angle ACB = \theta$ とする。

- (1) $\cos \theta$ を x で表せ。
- (2) $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形となるとき、点 C を求めよ。

【11】 空間の2直線

$$l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = z-2, \quad l_2: x = \frac{y}{2} = -z+4$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 2直線 l_1 , l_2 はねじれの位置にあることを証明せよ。
- (2) 直線 l_1 , l_2 上にそれぞれ A , B をとり、線分 AB が l_1 , l_2 の両方に垂直となるようにしたときの点 A , B の座標を求めよ。

【12】 座標を定めた空間において、点 A は平面

$$\pi: 2x - 3y + 6z = 2$$

の上を動き、点 B は図形

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 14z + 50 = 0$$

の上を動く。このとき、つぎの問いに答えよ。

- (1) S はどんな図形か。
- (2) 距離 \overline{AB} の最小値 d を求めよ。
- (3) $\overline{AB} = d$ となる A , B の座標を求めよ。

第 4 回 行 列

【13】 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ が $A^3 + pA + qE = O$ を満たすとき、 a は方程式

$8x^3 + 2px - q = 0$ の解であることを示せ。ただし、 a, b, p, q は実数

で、かつ、 $b \neq 0$ 、また、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

【14】 $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \text{ は実数} \right\}$ とする。

(1) 行列 P, Q が G の元ならば、 PQ, P^{-1} は G の元であることを示せ。

(2) $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす G の元をすべて求めよ。

【15】 行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし, $ad = bc$ とする) について, 次の各問に答

えよ。

- (1) $X^2 - (a+d)X$ を求めよ。
- (2) $X^{n+1} - (a+d)X^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (3) X が $X^{10} = 0$ を満たすとき X^2 を求めよ。

【16】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ のとき, 次の問に答えよ。

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つような実数 x, y の組は 2 つある。これを求めよ。

(2) A の n 個の積 A^n を $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおく。(1) で求めた 2 個の x を α, β

とし, $A^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, A^n \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算して, a_n, b_n, c_n, d_n を求めよ。

第 5 回 1 次変換

【17】 2直線 $2x + 3y = 1$, $x - 2y = 1$ はある 1 次変換により, 互いに他の直線へ写されるものとする。

- (1) この 1 次変換を表す行列 A を求めよ。
- (2) A^{-1} と A^n ($n \geq 2$) を求めよ。

【18】 座標平面において, 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f は 2 点間の距離を変えないという。

(1) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることを示せ。

(2) 合成変換 $f \circ f$ が各点を原点に関して対称な点に移すように行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を定めよ。

【19】 座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

いま、3つの頂点 A 、 B 、 C がいずれも格子点であるような三角形について、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積は有理数であることを証明せよ。
- (2) $\triangle ABC$ は正三角形になり得ないことを証明せよ。

【20】 座標平面上の一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって円 $x^2 + y^2 = 1$ がうつされる図形を C とする。

- (1) C が原点を中心とする円であるとき、 a の値とその円の半径を求めよ。
- (2) C が一つの線分であるとき、 a の値と、その線分の両端点の座標を求めよ。