

1990 直前講習

木 暮 浩 司 の

重要定理公式総点検

は じ め に

大学入試の時期が早まって、既に一部の私大では始まっている頃でしょう。精神的に落ち着かない時であるが、手を抜いては後で悔やむことになる。ところで、直前の学習では更に新しい事を覚えるよりは、現在までに1年間学習した内容を整理して確実な知識とし、使いこなすことに重点をおくのがよい。数学では「定理」「公式」などの重要事項をもう一度チェックし、現在身につけている実力を試験日まで保持することをねらいとする勉強をしてもらいたい。

このゼミでは代数・幾何、基礎解析を中心に最も重要な事柄を整理しながら、標準的な問題の解き方を指導する。

短期間であるが、合格への足がかりになれば幸いである。

目 次

§ 1	ベクトルと図形	3
§ 2	行 列	13
§ 3	1次変換	20
§ 4	数列の漸化式	30
補 充 問 題	38

§ 1. ベクトルと図形

定理1 2つのベクトル $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ に対して

$$\text{垂直条件} : \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{平行条件} : \vec{b} = k \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

2つのベクトル $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ に対して

$$\text{垂直条件} : \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

$$\text{平行条件} : \vec{b} = k \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

定理2 2直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ に対して

$$\text{垂直条件} : mm' = -1$$

$$\text{平行条件} : m = m', n \neq n'$$

2直線 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ に対して

$$\text{垂直条件} : aa' + bb' = 0$$

$$\text{平行条件} : \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

定理3 2つの空間ベクトル $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ の双方に垂直なベクトルの1つは

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

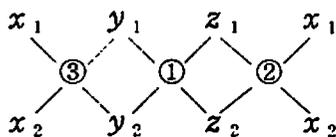
(証明) 求めるベクトルを $\vec{u}(x, y, z)$ とすると

$$\vec{a} \perp \vec{u} \text{ より } x_1 x + y_1 y + z_1 z = 0$$

$$\vec{b} \perp \vec{u} \text{ より } x_2 x + y_2 y + z_2 z = 0$$

この2式より

$$x : y : z = (y_1 z_2 - y_2 z_1) : (z_1 x_2 - z_2 x_1) : (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$



定理4 平面の $ax + by + cz + d = 0$ に点 $P(x_0, y_0, z_0)$ から下ろした垂線の足を H とすると

$$(1) \quad \vec{HP} = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |\vec{PH}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(証明) \vec{PH} は平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に平行だから

$$\vec{PH} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{とおける}$$

$$\text{よって, } \vec{OH} = \vec{OP} + \vec{PH} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

また, H はこの平面上にあるから

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$

$$\therefore t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

以上より, (1)(2) が得られる。

定理5 $\triangle ABC$ において

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \quad (\text{余弦定理})$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

定理6 \vec{a}, \vec{b} を $\vec{0}$ でない2つのベクトルとし、 \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ

($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

定理7 3点 $O(0, 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\angle AOB = \theta$ とすると

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

3点 $O(0, 0, 0), A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$,
 $\angle AOB = \theta$ とすると

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

定理8 平面上の2直線 $y = mx + n, y = m'x + n'$ のなす角 θ は

$$\tan \theta = \frac{m' - m}{1 + mm'} \quad (\theta \text{は回転角})$$

公式1 $\triangle ABC$ の3辺の長さを $a, b, c, a+b+c=2s$ とすると,

$$\begin{aligned} \text{面積 } S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= rs \quad (r \text{ は内接円の半径}) \end{aligned}$$

公式2 2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} の囲む三角形の面積は

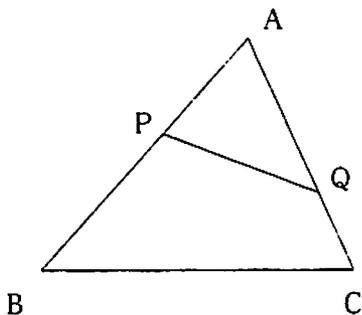
$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

公式3 3点 $O(0, 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ で囲まれる $\triangle OAB$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

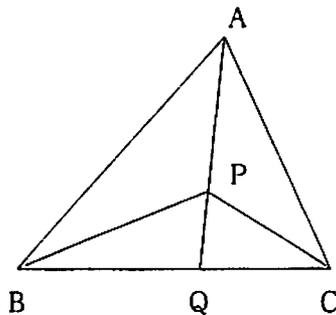
公式4

(1)



$$\begin{aligned} \triangle APQ : \triangle ABC \\ = AP \cdot AQ : AB \cdot AC \end{aligned}$$

(2)



$$\begin{aligned} \triangle ABP : \triangle ACP \\ = BQ : QC \end{aligned}$$

例題1 $\triangle ABC$ において、 $AB=4$ 、 $AC=3$ 、 $\angle A=60^\circ$ である。
頂点と辺BCの中点Mを結ぶ線分AMの長さを求めよ。

[解1] $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$ (余弦定理)

$$= 16 + 9 - 12 = 13$$

$$\therefore BC = \sqrt{13}$$

中線定理 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ より

$$16 + 9 = 2 \left\{ AM^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore AM^2 = \frac{25}{2} - \frac{13}{4} = \frac{37}{4} \quad \therefore AM = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

[解2] $\vec{AB} = \vec{a}$ 、 $\vec{AC} = \vec{b}$ とおくと、

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 6$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \text{ だから}$$

$$|\vec{AM}|^2 = \frac{1}{4} (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= \frac{1}{4} (16 + 2 \cdot 6 + 9) = \frac{37}{4} \quad \therefore |\vec{AM}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

[解3] Aを原点Oにとり、 $B(4, 0)$ とおくと、 $C(3 \cos 60^\circ, 3 \sin 60^\circ)$

よって、BCの中点M(x, y)は

$$x = \frac{4 + 3 \cos 60^\circ}{2} = \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{3 \sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{ゆえに、} AM = \sqrt{\left(\frac{11}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

(注) これ以外にもいろいろの解法がある。

例題2 空間の3点 $A(0, 1, 1)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(2, 3, 1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。

[解1] \vec{AB} , \vec{AC} のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると, 3角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ところで, $\vec{AB} = (-1, -2, 1)$, $\vec{AC} = (2, 2, 0)$ だから

$$\cos \theta = \frac{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{4+4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって, $0 \leq \theta \leq \pi$ では

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

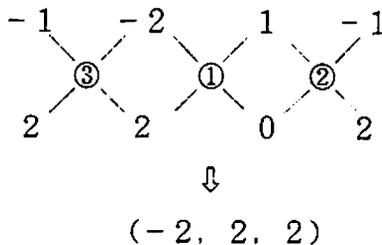
これを①に代入して,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

[解2] $\vec{AB} = (-1, -2, 1)$, $\vec{AC} = (2, 2, 0)$ により

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 8 - (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

[解3] $S = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$



[1] 空間に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 3, 5)$, $B(-1, -2, -3)$,
 $C(3, 1, 5)$ がある。

(1) 3点 O , A , B を通る平面 π の方程式を求めよ。

(2) ベクトル \vec{OC} を π に正射影してできるベクトル \vec{OD} を求めよ。

(3) 三角形 ABD の面積を求めよ。

[2] 空間の直線 $x + 2 = 2 - y = z - 1$ を l とする。

- (1) 点 $A(1, 2, 3)$ を通り直線 l を含む平面 α と、 xy 平面および yz 平面の交線をそれぞれ m_1, m_2 とするとき、直線 m_1, m_2 の方程式を求めよ。
- (2) 2直線 m_1, m_2 のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ であることを示せ。

[3] 球 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ がある。

この球に接し、直線 $x+y=4, z=0$ を含むような、 xy 平面と異なる平面の方程式とそのときの接点Pの座標を求めよ。また、点Pでこの平面に接し、かつ xz 平面と yz 平面に接するもう1つの球の中心の座標と半径を求めよ。

[4] 空間に1辺の長さが1の正4面体OABCがある。OBの midpoint M, OCを1:2に内分する点をNとする。3点A, M, Nを通る平面と点Oの距離 d を求めよ。

§ 2. 行 列

定理1 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0$
 が成り立つ。 (ケーリー・ハミルトンの公式)

定理2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, $xA = yE$ が成り立つならば

(i) $x = y = 0$ または (ii) $A = aE$ である。

定義 $AX = XA = E$ を満たす行列 X を A の逆行列といい, A^{-1} で表す。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\Delta(A) = ad - bc \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

定理3 方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつため

の必要十分条件は A の逆行列が存在しないことである。

すなわち, $\Delta(A) = 0$ である。

逆行列の演算法則

- (1) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (2) $(A^{-1})^{-1} = A$
 (3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}(A^{-1})$ (k は定数)

定理4 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく

(1) $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ が重解 α をもつならば

$$A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E$$

(2) $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ が異なる解 α, β をもつならば

$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} A - \alpha\beta \cdot \frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} E$$

例題3 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ。

[解1] ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 3A + 2E = 0$$

両辺に A^n を掛けると $A^{n+2} - 3A^{n+1} + 2A^n = 0$

$$\text{変形すると } \begin{cases} A^{n+2} - A^{n+1} = 2(A^{n+1} - A^n) \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{より } A^{n+1} - A^n = 2^n(A - E)$$

$$\textcircled{2} \text{より } A^{n+1} - 2A^n = A - 2E$$

$$\text{辺々引いて } A^n = (2^n - 1)A - (2^n - 2)E$$

$$\begin{aligned} &= (2^n - 1) \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - (2^n - 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -3 \cdot 2^n + 3 \\ 2^{n+1} - 2 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{(答)} \end{aligned}$$

[解2] $x^n = (x-1)(x-2)g(x) + ax + b$ とおくと

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \text{ のとき } 1 = a + b \\ x=2 \text{ のとき } 2^n = 2a + b \end{array} \right\} \text{これより } \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

したがって

$$A^n = (A - E)(A - 2E)g(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E$$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 3A + 2E = (A - E)(A - 2E) = 0$$

$$\therefore A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E$$

以下は [解1] と同様に計算できる。

[解3] $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数 k と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めると

$$k=2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k=1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1} \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 3 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -3 \cdot 2^n + 3 \\ 2^{n+1} - 2 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[解4] [解3] における $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ から $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{とおくと } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)$$

$$= P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{n+1} & -3 \cdot 2^n \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -3 \cdot 2^n + 3 \\ 2^{n+1} - 2 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[解5] $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおくと, $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 3c_n & b_{n+1} = -b_n - 3d_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 4c_n & d_{n+1} = 2b_n + 4d_n \end{cases}$$

これから a_n, b_n, c_n, d_n を求める。

[5] a, b, c, d を実数とするとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 次の問い

に答えよ。ただし, E は単位行列である。

(1) 任意の実数 k に対して行列 $kE - A$ が逆行列をもつための必要十分条件を, a, b, c, d を用いて表せ。

(2) A が(1)の条件を満たし, 更に $ad - bc = 1$ で, かつ $a + d$ は整数とする。このとき, $a + d$ のとり得る値を求め, その値に応じて $A^n = E$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

[6] $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の各問に

答えよ。ただし、 $A^1 = A$, $A^n = A^{n-1}A$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) とする。

(1) 積 $P^{-1}AP$ を計算し、これを用いて A^n を求めよ。

(2) $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、

$\sum_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k)$ を n の式で表せ。

[7] (1) n を正の整数として $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

(2) $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, $X = RX + B$ を満たす
行列 X を求めよ。

(3) $A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_n = RA_{n-1} + B$ ($n = 1, 2, \dots$)とするとき,
 A_n を求めよ。

$$[8] \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。次の行列を $R^k J$ 、または R^k (k は整数) の形に表せ。

- (1) S (2) JR (3) JS (4) SR

(一般に、行列 A が逆行列を持つとき、自然数 n に対して、 $A^{-n} = (A^{-1})^n$ とする。)

§ 3. 1 次変換

定理1 1次変換 $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の像は点 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像は点 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ である。

(注) 1次変換 f は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とかくことができる。

定理2 1次変換 f を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, f による平面全体の像は

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のときは 平面全体, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のときは 直線または点で, 点になるのは $A = 0$ のときである。

(注2) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ が存在する。

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ が存在しない。

定理3 直線 g ベクトル表示を

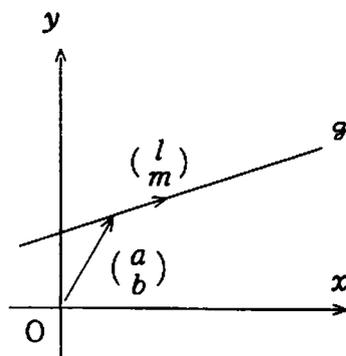
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

とするとき, 行列 A で表される

1次変換による g の像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

で, これは直線または点を表す。



(注3) $A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ならば, 像は直線, $A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ならば, 像は点。

定理4 原点Oを回転の中心とし、平面上の各点Pに、Pを一定の角 θ だけ回転した点P'を対応させる写像 f は1次変換で、その変換式は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

[証明] 3角関数の定義により

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

で、

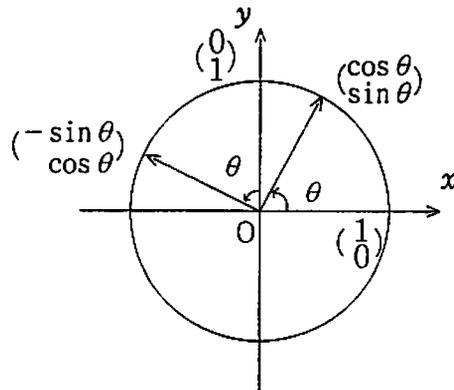
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により、

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を θ 回転する変換は、任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を θ 回転させる。

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



(注4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が同じ幾何学的変換をうけると、任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

は同じ幾何学的変換をうける。

定理5 原点 O と点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を通る直線を l とすると、 l に関する対称

移動 f は1次変換で、その変換式は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

[証明] 明らかに

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

であるから、 f が行列 A で表される

(1次変換である)とすると、

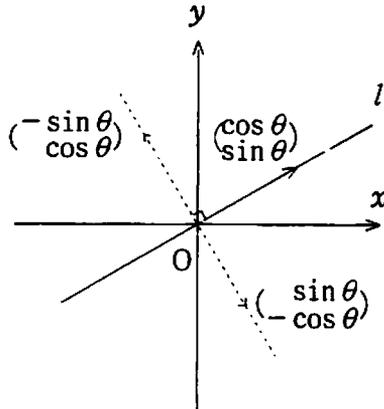
$$A \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一方、 $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ が同じ幾何学的変換をうければ、任意の点

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は同じ幾何学点変換をうける。



例題4 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による1次変換で、直線 $3x - 2y + 1 = 0$

上のすべての点が、点 $(3, 1)$ に移されるように a, b, c, d を決定せよ。

[解1] 直線 $3x - 2y + 1 = 0$ の上のすべての点 (x, y) に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore ax + by = 3, \quad cx + dy = 1$$

これに $y = \frac{3x+1}{2}$ を代入して整理すれば

$$\begin{cases} (2a+3b)x + b = 6 \\ (2c+3d)x + d = 2 \end{cases}$$

これが x の任意の値に対して成り立つから

$$2a + 3b = 0, \quad b = 6, \quad 2c + 3d = 0, \quad d = 2$$

$$\therefore a = -9, \quad b = 6, \quad c = -3, \quad d = 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

[解2] $3x - 2y + 1 = 0$ 上の2点

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

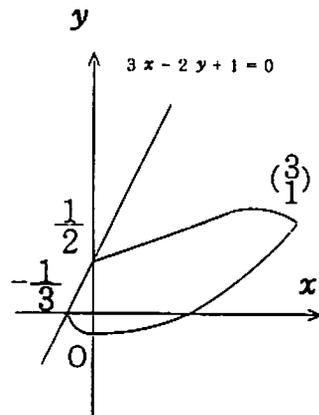
の像は

$$\left(-\frac{a}{3}, -\frac{c}{3}\right), \left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

これらが点 $(3, 1)$ と一致する条件が求めるもので

$$-\frac{a}{3} = 3, \quad -\frac{c}{3} = 1; \quad \frac{b}{2} = 3, \quad \frac{d}{2} = 1$$

$$\therefore a = -9, \quad b = 6, \quad c = -3, \quad d = 2$$



例題5

行列 $\begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$ で表される1次変換で、直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

はどのような図形に移るか。

[解1] 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ をベクトル表示すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、その像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a+1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

これは、 $a \neq 1$ の場合は直線を表し、その方程式は

$$x - y = -2$$

また、 $a = 1$ の場合は、点 $(0, 2)$ を表す。

$$(\text{答え}) \begin{cases} a \neq 1 \text{ の場合 : 直線 } y = x + 2 \\ a = 1 \text{ の場合 : 点 } (0, 2) \end{cases}$$

[解2] 直線上の点 $(2t, -t+1)$ の像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ -t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)t + a-1 \\ (a-1)t + a+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = (a-1)t + a-1 \\ y = (a-1)t + a+1 \end{cases}$$

よって、 $\begin{cases} a \neq 1 \text{ のとき } x - y = -2 \\ a = 1 \text{ のとき 点 } (0, 2) \end{cases}$

例題6 ある直線 l 上の任意の点 (x, y) が、1次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ によって、同じ直線 } l \text{ 上の点に移される。}$$

このとき l の方程式を求めよ。

[解1] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 4x+2y \\ x+3y \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow x(x+3y) - (4x+2y)y = 0 \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \text{ または } x-2y=0$$

よって、求める直線は、 $x+y=n$ または $x-2y=n$

とおけて、その上の点 $(n, 0)$ の像 $(4n, n)$ がその上にある条件は、

いずれも $n=0$

よって、求める直線は $x+y=0$, $x-2y=0$

[解2] l を $x=k$ (k は定数) とすると、 l 上の点 (k, t) の像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+2t \\ k+3t \end{pmatrix}$$

$$\therefore x' = 4k + 2t, \quad y' = k + 3t$$

により、直線 $3x' - 2y' = 10k$ に移されるから、適さない。

したがって、 l を $y = mx + n$ とおける。この上の点 $(t, mt+n)$ の像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m+4)t + 2n \\ (3m+1)t + 3n \end{pmatrix}$$

で、これが $y = mx + n$ 上にあることから

$$(3m+1)t + 3n = m(2m+4)t + 2mn + n$$

が任意の t に対して成り立つ。

$$\therefore \begin{cases} 3m+1 = 2m^2 + 4m \\ 3n = 2mn + n \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2m^2 + m - 1 = 0 \\ (m-1)n = 0 \end{cases}$$

$$\therefore (m, n) = (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

ゆえに、 l の方程式は $y = -x$ または $y = \frac{1}{2}x$

[9] 座標平面における1次変換 f を表す行列 $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}$ が $A^2 = A$

を満たすものとする。 f によって動かない点の集合と f による像が原点になるような点の集合とが互いに直交する直線になるように a, b, c を決定せよ。

[10] f は行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ によって表される1次変換, g は原点のまわりの θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) の回転を表す1次変換であるとする。 f による点 $(2, -1)$ の像と g による点 $(1, 0)$ の像が共に (a, b) であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) 行列 A と角 θ とを求めよ。

(2) 合成変換 $g^{-1} \circ f$ を表す行列を求めよ。また, $g^{-1} \circ f$ による平面全体の像を求めよ。

[11] 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって放物線 $y^2 = x$ が

放物線 $y = x^2$ に移されるという。

- (1) a, b, c, d が満たす条件を求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2$ を1次変換 f で移した図形の方程式を求めよ。
- (3) 放物線 $y = x^2$ の接線を l とし, l の f による像を l' とする。いかなる接線 l に対しても l と l' が直交するように行列 A を定めよ。

[12] xy 平面における1次変換 f は点 $A(1, 0)$ を点 $B(1, \sqrt{3})$ に移し、この点 B を C に、さらに点 C をもとの点 $A(1, 0)$ に移すものとする。

次の各問に答えよ。

(1) 1次変換 f を表す行列を求め、 C の座標を示せ。

(2) 点 P_0 の座標を (p, q) とし、1次変換 f により点 P_k は点 P_{k+1} ($k = 0, 1, 2$) に移されるものとする。 $p^2 + q^2 = 1$ のとき、 $\triangle P_1 P_2 P_3$ の面積の最小値を求め、そのときの (p, q) を示せ。

§ 4. 数列の漸化式

タイプ1 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (階差数列)

(解法) $n \geq 2$ で $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

タイプ2 $a_{n+1} = p a_n + q$ ($p \neq 1$)

(解法) 両辺から $\frac{q}{1-p}$ を引くと

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p \left(a_n - \frac{q}{1-p} \right)$$

よって、数列 $\left\{ a_n - \frac{q}{1-p} \right\}$ は公比 p 、初項 $a_1 - \frac{q}{1-p}$ の
等比数列

$$a_n - \frac{q}{1-p} = p^{n-1} \left(a_1 - \frac{q}{1-p} \right)$$

$$\therefore a_n = \frac{q}{1-p} + p^{n-1} \left(a_1 - \frac{q}{1-p} \right)$$

タイプ3 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ ($p \neq 1$)

(解法) 両辺を p^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$$

$\frac{a_n}{p^n} = b_n$ とおくと数列 $\{b_n\}$ はタイプ1になる。

タイプ4 $a_{n+1} = \frac{a_n}{p a_n + q}$

(解法) $a_n \neq 0$ のとき、両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{a_n} + p$$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと数列 $\{b_n\}$ はタイプ2になる。

(注意) タイプ3で $f(n)$ が n の1次式するとき、

$a_{n+1} - g(n+1) = p(a_n - g(n))$ となる1次式 $g(n)$ を求める。

タイプ5 $a_{n+1} = q a^n$

(解法) $a_n > 0, q > 0$ のとき, 両辺の常用対数をとると

$$\log a_{n+1} = \log q + p \log a_n$$

$\log a_n = b_n$ とおくと タイプ2 になる。

タイプ6 $a_{n+1} = \frac{r a_n + s}{p a_n + q}$

(解法) a_n, a_{n+1} を x とおいて得られる方程式 $x = \frac{r x + s}{p x + q}$

すなわち, $p x^2 + (q - r)x - s = 0$ の解を α, β とする。

$\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = b_n$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列である。

タイプ7 $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$

(解法) 特性方程式 $x^2 - p x - q = 0$ の解を α, β ($\alpha \neq \beta$) とすると,

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は公比 β , 初項 $a_2 - \alpha a_1$ の等比数列である。

よって, $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1} (a_2 - \alpha a_1) \dots \textcircled{1}$

α と β をいれかえても成り立つから

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1} (a_2 - \beta a_1) \dots \textcircled{2}$$

② - ① から a_{n+1} を消去すれば

$$(\alpha - \beta) a_n = \alpha^{n-1} (a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1} (a_2 - \alpha a_1)$$

$$\therefore a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} \alpha^{n-1} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} \beta^{n-1}$$

(注1) $p + q = 1$ のとき, $\beta = 1$ であるから, ②より タイプ1 になる。

(注2) $\alpha = \beta$ のとき, ①より $a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^{n-1} (a_2 - \alpha a_1)$

これは タイプ3 になる。

例題7 $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

[解1] $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ から次の2通りに変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①から、数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比3、初項 $a_2-2a_1=3$ の等比数列である。

$$\therefore a_{n+1}-2a_n=3^n \cdots \textcircled{3}$$

②から同様にして

$$a_{n+1}-3a_n=2^n \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{より} \quad a_n=3^n-2^n \cdots (\text{答})$$

[解2] $x^2-5x+6=0$ の解は2, 3だから

$$a_n=A \cdot 3^{n-1}+B \cdot 2^{n-1}$$

とおけて、 $a_1=1, a_2=5$ から

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=5 \end{cases} \quad \therefore A=3, B=-2$$

$$\therefore a_n=3^n-2^n \cdots (\text{答})$$

[解3] ③において、両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$\therefore a_n=3^n-2^n \cdots (\text{答})$$

例題8 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $a_1=2$, $b_1=1$,

$$a_{n+1}=a_n+2b_n \cdots \textcircled{1} \quad b_{n+1}=-a_n+4b_n \cdots \textcircled{2}$$

で定義されるとき、一般項 a_n , b_n を求めよ。

[解1] $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ を満たす α , β を求める。

①, ②を代入

$$a_n+2b_n+\alpha(-a_n+4b_n)=\beta(a_n+\alpha b_n)$$

$$(1-\alpha-\beta)a_n+(2+4\alpha-\alpha\beta)b_n=0$$

$$1-\alpha-\beta=0, \quad 2+4\alpha-\alpha\beta=0 \quad \text{を解いて}$$

$$\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=3 \end{cases}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n) \cdots \cdots \textcircled{3} \\ a_{n+1}-2b_{n+1}=3(a_n-2b_n) \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3}\text{より, } a_n-b_n=1 \cdot 2^{n-1} \quad \textcircled{4}\text{より, } a_n-2b_n=0$$

$$\text{ゆえに, } a_n=2^n, \quad b_n=2^{n-1} \cdots \cdots \text{(答)}$$

[解2] ②より, $a_n=4b_n-b_{n+1}$ を①に代入すると

$$4b_{n+1}-b_{n+2}=4b_n-b_{n+1}+2b_n$$

$$\therefore b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0$$

$$b_{n+2}-2b_n=3(b_{n+1}-2b_n) \quad \leftarrow \text{例題}$$

$$\text{よって, } b_{n+1}-2b_n=3^{n-1}(b_2-2b_1)=0$$

$$b_{n+1}=2b_n \text{ より, } b_n=2^{n-1}$$

$$\textcircled{2}\text{に代入して, } a_n=4 \cdot 2^{n-1}-2^n=2^n$$

[解3] ①, ②より
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{とおくと, } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{よって, } A^n \text{ を計算すればよい。}$$

[13] $a_1 = 1, a_2 = 4, a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 (n \geq 3)$ となる数列

$\{a_n\}$ がある。

(i) 一般項 a_n を求めよ。

(ii) $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ を簡単にせよ。

[14] $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる

数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して、 $a_n \neq 3$ を示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。また、

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[15] 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 2^n \quad (n \geq 2)$$

によって定義されている。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を n で表せ。

(2) a_n を n で表せ。

[16] 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ が表す 1 次変数を f とし、原点を通る直線で f により自分自

身に移されるものは、直線 $y = 2x$ のみとする。

ただし、 $b - 2a \neq 0$ とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 点列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

定める。このとき $y_n - 2x_n$ を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで x_n, y_n をそれぞれ n の式で表せ。

補 充 問 題

[17] 空間の直線 l_1 の方程式を $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+5}{-5}$ とする。

l_1 を含み $x y$ 平面に垂直な平面と $x y$ 平面との交わりを l_2 とする。 l_2 上の点 $(x, y, 0)$ は 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって直線 l_3 上の点 $(x', y', 0)$ に移される。

- (1) l_3 の方程式を求めよ。
- (2) l_1 と l_3 は同一平面上にあることを示し、この平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形で求めよ。

[18] 数列 $\{a_n\}$ が行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$,

$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定義されているとき,

(1) $A^2 - 3A + 2E = O$ を示せ。ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で

ある。

(2) 自然数 n に対して, $A^n(A - E) = 2^n(A - E)$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

(3) A^n を求めよ。

(4) a_n を n の式で表せ。

[19] 座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $P(3, 1)$, $Q(1, 2)$ をとり, 点Pを通りベクトル \vec{OQ} に平行な直線を l_1 , 点Qを通りベクトル \vec{OP} に平行な直線を l_2 とする。1次変換 T が l_1 を l_2 に移し, かつ l_2 を l_1 に移すとき, T を表す行列 A を求めよ。

[20] 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 9 - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3^{n-2}}$

($n = 1, 2, 3, \dots$) で表されている。

(1) a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。